НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ» імені Т.Г.ШЕВЧЕНКА

С.В. ГАРКУША

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Навчально-методичний посібник для аспірантів спеціальностей 014 Середня освіта (фізична культура), 017 Фізична культура і спорт

Чернігів – 2019

УДК 796:519.2
ББК Ч 5186
Г 20

Рецензенти:

Горошко Ю.В., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та обчислювальної техніки Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка;

Архипов О.А., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри фізичного виховання і спорту НПУ імені М.П. Драгоманова.

Гаркуша С.В.
Г 20 **Методи математичної статистики в педагогічних дослідженнях**. Навчально-методичний посібник для аспірантів. Чернігів, 2019. 72 с.

Навчально-методичний посібник «Методи математичної статистики в педагогічних дослідженнях» підготовлено відповідно до освітньої програми підготовки здобувачів вищої освіти освітньо-наукового ступеня доктор наук з метою забезпечення систематизації і поглиблення знань аспірантів з використання методів математичної статистики для оволодіння методичними і практичними знаннями, уміннями та навичками щодо здійснення вимірювань та контролю в галузі педагогіки та фізичного виховання. Рекомендовано для студентів, які навчаються з галузі знань 01 Освіта/Педагогіки за спеціальностями 014 Середня освіта (фізична культура), 017 Фізична культура і спорт.

ББК Ч 5186
УДК 796:519.2

Рекомендовано до друку вченою радою
Національного університету «Чернігівський колегіум»
імені Т.Г.Шевченка
(Протокол №8 від 27 березня 2019 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний посібник «Методи математичної статистики в педагогічних дослідженнях» підготовлено з залученням основ загальної та спортивної метрології, які використовуються в сучасних наукових дослідженнях у галузі фізичної культури та відповідають на основні питання: як виміряти і представити в числовому еквіваленті ті явища і процеси, які відбуваються у фізичному вихованні і спорті, та як їх математично опрацювати? Адже кількісні виміри дозволяють виявити тенденції і закономірності, визначити базові поняття у фізичному вихованні та спортивних науках.

В основному, вимірювання кількісних параметрів проводяться в процесі фізичного виховання та спортивного тренування. Зокрема, контролюються функціональний стан людини в процесі занять фізичними вправами та спортивної діяльності, можливості й особливості адаптації організму до різного роду навантажень, характер рухової активності й техніко-тактичні показники рухової діяльності.

Базовими числовими даними є функціональні й механічні параметри, для вимірювання яких використовують спеціальні прилади і пристрої. В навчальному посібнику показано, яким чином їх можна використовувати для отримання необхідних кількісних даних та для оцінки рівня підготовленості осіб, що займаються фізичним вихованням і спортом.

Навчальний посібник складається з дев’яти розділів, які включають як теоретичний, так і практичний блоки навчального матеріалу, а також до кожного розділу розроблені тести для перевірки рівня знань студентів.

Перші три розділи присвячені основам вимірювань у фізичному вихованні і спорті, у них представлені основні терміни та поняття, предмет і завдання, історія розвитку метрології; висвітлено основи теорії вимірювань фізичних величин, поняття та види контролю й аспекти управління підготовкою спортсменів і фізкультурників. Велика увага приділена характеристиці засобів і шкал вимірювань, а також об'єктів вимірювань у метрології фізичного виховання і спорту.

У четвертому розділі, присвяченому математичній статистиці як самостійній галузі знань, розглядаються основні методи статистичної обробки результатів вимірювань і наводяться приклади їх застосування. Подано докладну характеристику методів первинної обробки статистичного матеріалу, а саме: метод середніх величин, вибірковий метод, метод кореляційного аналізу, прилади проведення первинної обробки результатів спортивних вимірювань.

У наступних розділах широко представлені матеріали щодо проведення тестування, метрологічні аспекти контролю фізичної та техніко-тактичної підготовленості, а також розкрито особливості використання інструментальних методів контролю у підготовленості осіб, які займаються фізичним вихованням і спортом.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИМІРЮВАНЬ У ГАЛУЗІ ПЕДАГОГІКИ ТА ФІЗИЧНОГО ВИХОВАННЯ І СПОРТУ

1.1. Поняття про вимірювання у алузі педагогіки та фізичному вихованні і спорті. Види вимірювань.
1.2. Метрологічне забезпечення вимірювань у фізичному вихованні і спорті. Одиниці вимірювань та їх системи.
1.3. Точність вимірювань у фізичному вихованні і спорті.
1.4. Систематична та випадкова похибки вимірювань.
1.5. Класифікація спортивних даних.
Тестові завдання.

Основні терміни теми:

▪*Вимірювання – встановлення відповідності між явищами, які вивчаються, з одного боку, і числами – з іншого.*

▪*Метрологічне забезпечення вимірювань – це використання наукових та організаційних основ, технічних засобів, правил та норм, необхідних для досягнення єдності й точності вимірювань у фізичному вихованні та спорті.*

▪*Похідна одиниця вимірювання – це одиниця, що визначається рівнями зв'язку, які виражають математичну залежність однієї величини від іншої.*

▪*Основна одиниця вимірювання – це така, розмір якої встановлюється незалежно від інших одиниць.*

▪*Непряме вимірювання – вимірювання, за якого дійсне значення величини знаходять на основі залежності між даною величиною і величинами, які підлягають вимірюванню.*

▪*Пряме вимірювання – вимірювання, коли дійсне значення величини отримується безпосередньо з дослідних даних.*

▪*Рандомізація – перетворення систематичної похибки у випадкову.*

▪*Калібрування – визначення похибок, величини, поправок, установлення коефіцієнтів перетворення.*

▪*Тарування – перевірка показань вимірювальних приладів шляхом порівняння їх із показниками еталонів у всьому діапазоні можливих значень вимірювальної величини.*

1.1. Поняття про вимірювання у фізичному вихованні й спорті. Види вимірювань

Виміри служать для одержання точного, об'єктивного й легко відтвореного опису фізичної величини. Не роблячи вимірів, не можна охарактеризувати фізичну величину кількісно. Чисто словесні визначення – «низька» або «висока» температура, «низька» або «висока» напруга – неадекватні, тому що вони не містять порівняння з відомими еталонами й, отже, відбивають лише суб'єктивні думки. При вимірюванні фізичної величини їй приписується деяке чисельне значення.

Вимірюванням (у широкому розумінні слова) називають установлення відповідності між явищами, які вивчаються, з одного боку, і числами – з іншого.

Усім відомі й зрозумілі найбільш прості різновиди вимірювань, наприклад вимірювання довжини стрибка або ваги тіла. Але, як виміряти (і чи можна це виміряти?) рівень знань, ступінь утоми, виразність рухів, технічну майстерність? На перший погляд здається, що це явища, які не можуть бути виміряними. Але в кожному з цих випадків можна встановити відношення «більше – дорівнює – менше» і казати, що спортсмен А володіє технікою краще за спортсмена Б, а техніка у Б краща, ніж у В і т.д. Можна використовувати замість слів числа. Наприклад, замість слів «задовільно», «добре», «відмінно» – числа «3», «4», «5». У спорті досить часто доводиться виражати в числах показники, які не вимірюються. Наприклад, на змаганнях з фігурного катання на ковзанах технічна майстерність та артистичність виражаються в числах суддівських оцінок, і все це виступає вимірюванням. Ми розглянемо три питання, які утворюють основи теорії вимірювань: шкали вимірювання, одиниці вимірювання і точність вимірювання.

Види вимірювань

Сучасна метрологія поряд з одиницями вимірювання методами створення та збереження еталонів аналізує джерела похибок вимірювань та способи їх зменшення, розробляє методи інструментальних високоточних вимірювань і приділяє особливу увагу стандартизації процедур вимірювань, перевірці, метрологічній атестації, таруванню та калібровці вимірювальних приладів. Але наявність сучасних методів та засобів вимірювань ще не означає високого рівня вимірювань, оскільки необхідно також ними правильно користуватися. Тому в метрології можна виділити два напрями підвищення точності вимірювань: науково-технічний та законодавчий. Змістом науково-технічного напряму є створення, наприклад, еталонів, засобів та методів вимірювань, а законодавчого – створення регламентованих державою загальних правил, вимог та норм, що забезпечують високий рівень наукової основи організації процесу вимірювання.

Принципи й методи встановлення найбільш ефективних норм та правил взаємодії елементів суспільного виробництва з точки зору їх суміщення, уніфікації та раціональної організації називаються стандартизацією.

Людина – високодосконалий «засіб вимірювання». Проте цілком об'єктивними можуть уважатися тільки вимірювання, що виконуються без участі людини.

Вимірювання, що виконуються за допомогою спеціальних технічних засобів, називаються **інструментальними.** Серед них можуть бути автоматизовані й автоматичні. При **автоматизованих** вимірюваннях роль людини повністю не виключається. Вона може, наприклад, проводити знімання даних із звітного пристрою вимірювального приладу (шкали зі стрілкою або цифрового табло), вести їх реєстрацію в журналі, обробляти подумки або за допомогою обчислювальних засобів. На якість цих операцій впливає настрій людини, ступінь її зосередженості, серйозності, міра відповідальності за доручену справу, рівень професійної діяльності, тобто елемент суб'єктивізму при автоматизованих вимірюваннях залишається.

Автоматичні вимірювання виконуються без участі людини. Результат їх представляється у формі документа і є абсолютно об'єктивним.

За способом набуття числового значення вимірюваної величини всі вимірювання ділять на чотири основні види: **прямі, непрямі, сукупні й сумісні.**

Пряме вимірювання – вимірювання, коли дійсне значення величини отримується безпосередньо з дослідних даних або за показниками вимірювального приладу. Наприклад, реєстрація часу подолання дистанції секундоміром, дальності стрибків рулеткою або підрахування кількості згинань-розгинань рук у висі на поперечині чи упорі лежачи.

Непрямі вимірювання – вимірювання, при яких дійсне значення величини знаходять на основі залежності між даною величиною і величинами, які підлягають вимірюванню. Наприклад, між швидкістю ведення м’яча футболістом (V) і затратами енергії (E) існує залежність типу $y = 1{,}683 + +1{,}322 \cdot x$, де y – затрати енергії в ккал; x – швидкість ведення м’яча. Якщо спортсмен веде м’яч з $V = 6$ м/с, то $E = 9{,}6$ ккал/хв.

Так, використовуючи відомий функціональний взаємозв'язок, можна розраховувати електричний опір за наслідками вимірювань падіння напруги і сили електричного струму. Значення деяких величин легше і простіше знаходити шляхом непрямих вимірювань, оскільки прямі вимірювання іноді практично неможливо здійснити. Наприклад, щільність твердого тіла визначають за наслідками вимірювань об'єму і маси. Прямим способом виміряти МСК складно, а час бігу – легко. Тому час бігу вимірюють, а МСК – розраховують.

Сукупними вимірюваннями називають такі, у яких значення вимірюваних величин знаходять за даними повторних вимірювань однієї або декількох однойменних величин при різних поєднаннях мір або цих величин. Результати сукупних вимірювань знаходять шляхом вирішення системи рівнянь, що складаються за результатами декількох прямих вимірювань.

Сумісні вимірювання – це одночасні вимірювання (прямі або непрямі) двох неоднорідних фізичних величин для визначення функціональної залежності між ними. Наприклад, визначення залежності довжини тіла від температури.

За характером вимірювання величини розрізняють **статистичні, динамічні й статичні вимірювання.**

Статистичні вимірювання пов'язані з визначенням характеристик випадкових процесів, звукових сигналів, рівня шумів тощо.

Динамічні вимірювання пов'язані з такими величинами, які в процесі вимірювань зазнають тих чи інших вимірювань. Наприклад, зусилля, що розвиваються спортсменом в опорний період при стрибках у довжину з розбігу.

Статичні вимірювання мають місце тоді, коли вимірювана величина практично постійна (довжина стрибка в довжину, дальність польоту снаряда, вага ядра тощо).

За кількістю вимірюваної інформації вимірювання бувають **одноразові й багатократні.**

Шкала	Основні операції	Математичні операції (статистика)	Приклади
Найменувань	Об’єкти згруповані, а групи позначені номерами. Те, що номер однієї групи більший або менший від іншої, ще нічого не говорить про їхні властивості, за винятком того, що вони відрізняються нумерацією. Установлення рівності	Число випадків, мода, кореляція випадків	Нумерація спортсменів у команді, результати жеребкування
Порядку	Числа, присвоєні об’єктам, відображають кількість властивості, яка належить їм. Можливе встановлення співвідношень «більше або менше»	Медіана, рангова кореляція, рангові критерії, перевірка гіпотез непараметричною статистикою.	Місце, зайняте на змаганнях, результати ранжування спортсменів групою експертів
Інтервалів	Існує одиниця вимірювання, за допомогою якої об’єкти можна не тільки упорядкувати, але і приписати їм числа так, щоб рівні різниці відображали різні відмінності. Нульова точка довільна і не вказує на відсутність властивості. Установлення рівності інтервалів	Середнє, середнє квадратичне відхилення, кореляція. Усі методи статистики	Календарні дати (час), суглобні кути
Відношень	Числа, присвоєні предметам, володіють усіма властивостями інтервальної шкали. На шкалі існує абсолютний нуль, який указує на повну відсутність даної властивості у об’єкта. Відношення чисел, присвоєних об’єктам після вимірювань, відображають кількісні відношення вимірюваної властивості. Установлення рівності відношень	Коефіцієнт варіації, середнє геометричне. Усі методи статистики	Довжина, сила, швидкість та інші

Одноразові вимірювання – це одне вимірювання однієї величини, тобто число вимірювань дорівнює числу вимірюваних величин. Оскільки одноразові вимірювання завжди пов'язані з похибками, слід проводити не менше трьох одноразових вимірювань і кінцевий результат знаходити як середнє арифметичне значення.

Багатократні вимірювання характеризуються перевищенням числа вимірювань кількості вимірюваних величин. Звичайне мінімальне число вимірювань у такому випадку більше трьох. Перевага багатократних вимірювань у значному зниженні впливів випадкових чинників на похибку під час вимірювання.

1.2. Метрологічне забезпечення вимірювань у фізичному вихованні і спорті. Одиниці вимірювань та їх системи

Метрологічне забезпечення вимірювань – це використання наукових та організаційних основ, технічних засобів, правил та норм, необхідних для досягнення єдності й точності вимірювань у фізичному вихованні та спорті. Науковою основою цього забезпечення є метрологія, організаційною – метрологічна служба. Технічна основа включає в себе:

1) систему державних еталонів;
2) систему розробки і випуску засобів вимірювання;
3) метрологічну атестацію і перевірку засобів та методів вимірювання;
4) систему стандартних даних про показники, які підлягають контролю в процесі підготовки спортсменів.

Метрологічне забезпечення спрямоване на забезпечення єдності і точності вимірювань. Єдність вимірювань досягається тим, що їх результати повинні бути представлені в узаконених одиницях з відомою величиною похибки.

Для того, щоб результати різних вимірювань можна було порівняти один з одним, вони повинні бути виражені в однакових одиницях. Історія нараховує велику кількість різноманітних одиниць вимірювання. Наприклад, у дореволюційній Росії для вимірювання довжини використовувались верста (1,0668 км), сажень (2,1336 м), аршин (0,7112 м), вершок (4,445 см), дюйм (2,54 см) та інші міри. Це призводило до ускладнень на практиці.

Перша єдина система мір була розроблена в період Великої Французької революції в кінці XVIII ст. у 1790 році. Це відома всім метрична (десяткова) система мір. Відображаючи рівень знань того часу, вона включала в себе тільки одиниці довжини, маси, площі, об’єму. Тому робота щодо удосконалення системи одиниць продовжувалась. У 1960 році на Міжнародній генеральній конференції по мірах і вагах була прийнята Міжнародна система одиниць, яка отримала скорочену назву СІ (від початкових літер слів Systeme International). У 1961 році Комітет стандартів, мір і вимірювальних приладів затвердив ГОСТ 9667–61 «Міжнародна система одиниць», якою встановилось використання даної системи у всіх галузях науки і техніки, у народному господарстві, а також у викладанні.

При вимірюванні характеристик рухів користуються відповідними одиницями вимірювань. При цьому виникає проблема вибору еталонів. Усі одиниці вимірювання поділяються на основні, додаткові та похідні.

Основні одиниці вимірювання – це такі, розмір яких установлюється незалежно від інших одиниць.

Похідні – це одиниці, що визначаються рівнями зв'язку, котрі виражають математичну залежність однієї величини від іншої.

Системою одиниць прийнято називати сукупність поодиноких вимірювань, що охоплюють якусь специфічну область фізичних величин (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Основні одиниці міжнародної системи одиниць (СІ)

Величини	Розмір-ність	Одиниця		
		Назва	Позначення	
			Українські	Міжнародні
Основні				
Довжина	L	Метр	м	m
Маса	M	Кілограм	кг	kg
Час	T	Секунда	с	s
Сила електричного струму	I	Ампер	А	A
Температура	Θ	Кельвін	К	K
Кількість речовини	N	Моль	моль	mol
Сила світла	G	Кандела	кд	cd
Додаткові				
Плоский кут	–	радіан	Рад	rad
Тілесний кут	–	стерадіан	ср	sr

Єдності вимірювань досягають шляхом представлення результатів в узаконених одиницях і з певною вірогідністю похибок. Нині в метрології використовується Міжнародна система одиниць – СІ (SI). **Основні одиниці фізичних величин** у С1: одиниці довжини – метр (м); маси – кілограм (кг); часу – секунда (с); сили електричного струму – ампер (А); термодинамічної температури – Кельвін (К); сили світла – кандела (кд); кількості речовини – моль (моль).

Додаткові одиниці СІ – радіан (рад) та стерадіан (ср) – застосовуються для вимірювання плоского та тілесного кутів у просторі. Для утворення кратних та дольових одиниць повинні використовуватись спеціальні префікси (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Префікси й множники десятичних кратних і дольових одиниць міжнародної системи одиниць (СІ)

Пефікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення	Множник
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	мілі	м	10^{-3}
гіга	Г	10^{9}	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^{3}	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

У спортивних вимірюваннях також використовуються інші одиниці: сили – ньютон (Н), температури – градуси Цельсія (°С), частоти – герц (Гц), тиску – паскаль (Па), об’єму – літр (л), мілілітр (мл).

Таблиця 1.3

Важливі одиниці системи СІ та деякі позасистемні одиниці, які використовуються у фізичному вихованні й спорті

Показник, що вимірюється	Наймену-вання одиниці СІ	Позна-чення	Зв'язок з основними одиницями	Наймену-вання позасистемної одиниці вимірювання	Позначення одиниці та зв'язок з одиницями системи СІ
Довжина	Метр	м	М	–	–
Маса	Кілограм	кг	кг	–	–
Час	Секунда	с	с	хвилина	хв= 60 с
Сила електричного струму	Ампер	А	А	–	–
Сила	Ньютон	Н	м·кг·с$^{-2}$	кілограм сили	Кг = 9,81 Н
				понд	П = 4,44 Н
Кількість тепла, робота	Джоуль	Дж	м$^{-1}$·кг·с^{2}	кілограм сили метр	кг·м = 9,81 Дж
				калорія	Кал = 4,18 Дж
Потужність	Ват	Вт	м^{2}·кг·с$^{-3}$	кілограм сили за хв.	кГ/хв = 0,164 Вт
				кінська сила	к.с. = 736 Вт
Потенціал електричний	Вольт	В	м^{2}·кг·с$^{-3}$·А$^{-1}$	–	–
Електричний опір	Ом	Ом	м^{2} ·кг·с$^{-3}$·А$^{-2}$	–	–
Тиск	Ньютон на метр квадратний	Н/ м^{2}	м$^{-1}$·кг·с$^{-2}$	міліметр ртутного стовпчика	мм.рт.ст. = 121,1 Н/ м
Темп	Герц	Гц	с$^{-1}$	кількість рухів за хвилину	1/хв. = 60/с

Шляхом розрахунків із цих основних одиниць отримують похідні. Наприклад, робота, здійснювана тілом, що рухається, вимірюється як добуток сили на переміщення (Ньютон·метр – Н×м), потужність – як робота за одиницю часу – у Н×м×с$^{-1}$, швидкість – у м×с$^{-1}$ тощо.

На практиці досить широко застосовуються так звані **позасистемн**і одиниці. Наприклад, потужність вимірюється в кінських силах (к.с.), енергія – у калоріях (кал), тиск – у міліметрах ртутного стовпчика (мм рт. ст.) тощо. Останнім часом від них поступово відмовляються. У деяких підручниках із фізіології та біохімії експериментальний матеріал представлений у позасистемних одиницях. Для переведення їх у С1 можна використовувати такі відношення: 1 Н = 0,102 кг (сили); 1 Н×м = 1 Дж (джоуль) = 0,102 кг×м = = 0,000239 ккал. Один ньютонометр дуже незначний за величиною і тому роботу спортсмена (або енергію, що виділяється при виконанні вправ) частіше вимірюють у кілоджоулях: 1 кДж = 1000 Н×м = 0,239 ккал = 102 кг×м. Інтенсивність (або потужність) рухів вимірюється у ватах: 1 Вт = 1 Дж×с$^{-1}$ = = 1 Нм×с$^{-1}$ = 0,102 кг·м·с$^{-1}$; відповідно 1000 Вт = 102 кг×м×с$^{-1}$. При біомеханічних вимірюваннях значного поширення набув такий показник, як енерговитрати (у ккал) при виконанні рухів за одиницю часу (хв): 1 ккал·хв$^{-1}$ = = 69,767 Вт = 426,85 кг×м×хв$^{-1}$ = 4,186 кДж·хв$^{-1}$.

Оцінюючи інтенсивність того чи іншого руху, фахівці часто відзначають, що він виконується при споживанні певної порції кисню. При цьому відомо, що при споживанні 1 л кисню (O_2) виділяється 5,05 ккал енергії і здійснюється робота, що дорівнює 21,237 кДж. Отже, можна розрахувати, скільки витрачається кисню на виконання кожного руху, що вивчається, і яка при цьому виконується робота.

Окрім цього, у фізичному вихованні та спорті найбільшого поширення отримали основні та позасистемні одиниці системи СІ, що наведені в табл. 1.3.

Усі похідні величини мають свої розмірності. **Розмірністю називається** вираз, який зв'язує похідну величину з основними величинами системи при коефіцієнті пропорційності, який дорівнює одиниці. Наприклад, розмірність довжини – L, розмірність часу – T; звідси розмірність швидкості дорівнює $L/T=L\times T^{-1}$, а розмірність прискорення дорівнює $L\times T^{-2}$.

1.3. Точність вимірювань у фізичному вихованні й спорті

Слід пам'ятати, що ніяке вимірювання не може бути виконано абсолютно точно. Результат вимірювання буде завжди мати похибку, величина якої буде меншою, чим точніше метод вимірювання та засіб вимірювальної техніки. Наприклад, за допомогою звичайної лінійки з міліметровою шкалою неможливо виміряти довжину з точністю до 0,01 мм.

Результати контролю є основою для планування навантаження. Значить, точно виміряли – точно спланували і навпаки. Значення точності вимірювань – обов'язкова умова, і тому в завдання вимірювань входить не тільки знаходження величини, але і оцінка похибок (помилок), які виникли під час вимірювання.

Основна та додаткова похибки

Основна похибка – це похибка методу вимірювання або вимірювального пристрою, яка має місце в нормальних умовах їх використання.

Додаткова похибка – це похибка вимірювального пристрою, викликана відхиленням від нормальних умов, у яких він повинен працювати. Якщо прилад призначений для роботи при нормальній кімнатній температурі, то він буде давати неточні показники, якщо ним користуватися влітку при високій чи взимку при низькій температурі. Похибки вимірювання можуть виникати і в тому випадку, якщо напруга в електричній мережі або батарейного джерела живлення нижче норми або вона не постійна за величиною. До додаткових похибок також відноситься і динамічна похибка, викликана інерційністю приладу і виникає тоді, коли величина, що вимірюється, змінюється дуже швидко. Наприклад, деякі пульсотахометри (прилади для вимірювання частоти серцевих скорочень – ЧСС) розраховані на вимірювання середніх величин ЧСС і не здатні зафіксувати нетривалі відхилення частоти від середнього рівня. Величини основної та додаткової похибок можуть бути подані як в абсолютних, так і у відносних одиницях.

Абсолютні та відносні похибки. Результати будь-якої величини відрізняються від істинного значення. Ця відмінність дорівнює різниці між показниками вимірювального приладу ($X_{вимір}$) і дійсним значенням величини, що підлягає вимірюванню ($X_{дійсн}$) і називається абсолютною похибкою вимірювання (X_A), котра виражається в тих самих одиницях, що й сама вимірювана величина:

$$X_A = X_{дійсн} - X_{вимір} \tag{3.1}$$

При проведенні комплексного контролю, під час якого вимірюються показники різної розмірності, доцільніше користуватися не абсолютною, а **відносною похибкою** ($X_{відн}$).

Відносна похибка вимірювання буває двох видів – дійсною та приведеною. **Дійсною відносною похибкою** ($X_{дійсн}$.в.) називається відношення абсолютної похибки до істинного значення вимірюваної величини:

$$X_{дійсн}\text{.в.} = \frac{X_A \cdot 100\%}{X_{дійсн}} \tag{3.2}$$

Приведена відносна похибка ($X_{дійсн}$. п.) – це відношення абсолютної похибки до максимально можливого значення величини, що вимірюється:

$$X_{прив}\text{.п.} = \frac{X_A \cdot 100\%}{X_{max}} \tag{3.3}$$

У тих випадках, коли оцінюється не похибка вимірювання, а похибка вимірювального приладу, за максимальне значення величини, що підлягає вимірюванню приймають межове значення шкали приладу. У такому розумінні найбільше припустиме значення $X_{прив}$, виражене у відсотках, визначають у нормальних умовах роботи **клас точності вимірювального приладу**, при цьому враховується тільки основна похибка. Наприклад, пульсотахометр класу точності 1,0, розрахований на вимірювання ЧСС у межах до 200 уд./хв., може в нормальних умовах роботи вносити у вимірювання похибку 200 уд./хв. 0,01 = 2 уд./хв.

Відносні похибки вимірюються у відсотках. При цьому знак абсолютної похибки не враховується: абсолютна похибка може бути зі знаком «плюс» або «мінус», а відносна похибка завжди є позитивною.

Наведемо приклад розрахунку абсолютної та відносної похибок вимірювань. Темп бігу спортсмена, який вимірювався візуально, без допомоги вимірювальних приладів, дорівнював 205 кр./хв. Одночасно опорні періоди бігу реєструвались за допомогою радіотелеметричної системи. Такий об’єктивний контроль показав, що дійсно темп бігу складав 200 кр/хв. Необхідно знайти величини абсолютної та відносної похибки, які були допущені при візуальному вимірюванні темпу бігу.

Уведемо позначення:

темп бігу, що вимірювався візуально, $X_{вимір}$ = 205 кр./хв.;

істинний темп бігу, $X_{дійсн}$ = 200 кр./хв.;

абсолютна похибка, $X_A = X_{дійсн} - X_{вимір}$ = 5 кр./хв.

Відносна похибка (дійсна), $X_{дійсн}$.в. = (5кр./хв. × 100%) / 200 кр./хв. = 2,5 %. Таким чином, абсолютна похибка візуального вимірювання темпу бігу дорівнює 5 кр./хв., дійсна відносна похибка дорівнює 2,5 %.

Оскільки межове значення темпу бігу не вказано, приведену відносну похибку визначити не можна.

1.4. Систематична та випадкова похибки вимірювань

Похибки вимірювання поділяються на систематичні та випадкові. **Систематичною похибкою** називають похибку, величина якої не змінюється від одного до іншого вимірювання. У силу цієї особливості систематична похибка може бути відома до вимірювання або в крайньому випадку вилучена по закінченню процесу вимірювання.

Величина систематичних похибок однакова в усіх вимірюваннях, що проводяться за одним і тим же методом за допомогою одних і тих же вимірювальних приладів. Розрізняють чотири групи систематичних похибок:

1) похибки, причина виникнення яких відома і величина яких може бути визначена досить точно. Це найбезпечніші похибки. Вони легко вилучаються шляхом уведення відповідних поправок у результат вимірювання. Наприклад, при визначенні результату стрибка можлива зміна довжини рулетки за рахунок різної температури повітря. Цю зміну можна оцінити і внести поправки в результат вимірювання;

2) похибки, величина виникнення яких відома, а причина невідома. Такі похибки залежать від класу точності вимірювальної апаратури. Наприклад, якщо клас точності динамометра для вимірювання силових якостей спортсмена складає 2.0, то його показання правильні з точністю 2 % у межах шкали приладу. Але якщо проводити декілька вимірювань підряд, то похибка в першому з них може складати 0,3 %, у другому – 2 %, у третьому – 0,7 % і т.д. При цьому точно визначити її значення для кожного з вимірювань не можна;

3) похибки, виникнення та величина яких невідомі. Звичайно, вони проявляються у складних вимірюваннях, коли не вдається врахувати всі джерела можливих похибок;

4) похибки, що пов'язані не стільки з процесом вимірювання, скільки з якостями та властивостями об’єкта вимірювання. Як відомо, об’єктами вимірювань у спортивній практиці є дії та рухи спортсмена, його соціальні, психологічні, біохімічні та інші показники. Вимірювання такого типу характеризуються певною варіативністю, і в її основі може бути безліч причин. Розглянемо наступний приклад. Припустимо, що при вимірюванні часу складної реакції хокеїстів використовується методика, сумарна систематична похибка якої за першими трьома групами не перебільшує 1 %. Але в серії повторних вимірювань конкретного спортсмена отримують такі значення часу реакції (ЧР): 0,653 с; 0,526 с; 0,755 с. та ін. Різниця в результатах вимірювання обумовлена внутрішніми властивостями

спортсменів: один із них є більш стабільним і реагує практично однаково швидко у всіх спробах, інший – не є стабільним. Однак і ця стабільність (або нестабільність) може змінитись залежно від ступеня втоми, емоційного збудження, підвищення рівня підготовленості.

Систематичний контроль за спортсменами дозволяє визначити міру їх стабільності й ураховувати можливі похибки при вимірюваннях.

Для усунення систематичної похибки використовують: а) тарування; б) калібровку; в) метод рандомізації.

Таруванням (від нім. tarieren) називається перевірка показань вимірювальних приладів шляхом порівняння їх із показниками еталонів у всьому діапазоні можливих значень вимірювальної величини.

Калібруванням називається визначення похибок, величини поправок, установлення коефіцієнтів перетворення. При таруванні й калібруванні до входу вимірювальної системи замість спортсмена підключається джерело еталонного сигналу відомої величини. Наприклад, таруючи пристрій для вимірювання зусиль, на тензометричній платформі розміщують почергово вантаж вагою 10, 20, 30 і т. д. кілограмів.

Рандомізацією (від англ. random – випадковий) називається перетворення систематичної похибки у випадкову. Цей прийом спрямований на усунення невідомих систематичних похибок. За методом рандомізації вимірювання величини проводиться декілька разів. При цьому вимірювання організовується таким чином, щоб постійний фактор, який впливає на їх результат, діяв у кожному випадку по-різному. Наприклад, при вимірюванні працездатності можна рекомендувати вимірювати її декілька разів, при цьому кожен раз необхідно по-різному задавати навантаження. По закінченні вимірювань результати обробляються методом математичної статистики і визначається середній показник.

У деяких випадках похибки виникають з причин, передбачити які заздалегідь просто неможливо. Такі похибки називають **випадковими – виникають під дією різноманітних факторів**. Випадкові похибки дуже важко вилучити. Однак, використовуючи методи математичної статистики, можна оцінити величину випадкової похибки і врахувати її при інтерпретації результатів вимірювання. Без статистичної обробки та теорії ймовірності результати вимірювань не можуть вважатись вірогідними.

Перед проведенням будь-яких вимірювань слід визначити джерела систематичних похибок та по змозі усунути їх. Але оскільки повністю це зробити неможливо, то внесення поправок у результат вимірювання дозволяє зменшити його з урахуванням **систематичної похибки.**

1.5. Класифікація даних

Усі результати спортивних вимірів або спостережень можна класифікувати за трьома групами:

1. Кількісні дані. До них належать показники, які отримують за допомогою вимірювального приладу (пряме) або розрахунків (непряме). Вони розділяються на *дискретні* (переривані) і *аналогові* (безперервні). Приклад дискретних даних – число учасників, число підтягувань на

поперечині, віджимань. Аналогові дані – будь-який розмірний показник, вимірюваний у фіксованих одиницях з точними інтервалами шкали вимірів: ріст, вага, результати в бігу. Звичайно дискретні показники виражаються тільки цілими числами, а аналогові – як цілими, так і дробовими залежно від розв'язної здатності вимірювального приладу.

2. Якісні дані – не мають кількісної оцінки й не можуть бути впорядковані при порівнянні один з одним (кольори очей, волосся, спортивні травми, розмаїтість технічних прийомів, спортивних снарядів й ін.). Часто є тільки два класи спостережуваного показника (успішна/неуспішна спроба, стать Ч/Ж). Окремий випадок якісних, називається – альтернативним.

3. Порядкові дані – усілякі спортивні досягнення, оцінювані в балах (очках) у техніко-естетичних видах спорту (художній і спортивній гімнастиці, фігурному катанні, стрибках з трампліна), тобто показники, для яких точна кількісна характеристика або неможлива, або недоцільна. Однак їх можна розташувати в певному порядку.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Єдність вимірювань визначають:

А) похибки вимірювання ;
Б) узаконені одиниці при систематичних величинах похибок;
В) відтворення вимірювань;
Г) узаконені одиниці при відомих величинах похибок.

2. За якою шкалою здійснюється групування об’єктів за певними однаковими ознаками?

А) пропорційною;
Б) номінальною;
В) перцентильною;
Г) інтервальною.

3. Шкала порядку встановлює відношення:

А) на скільки більше чи менше;
Б) у скільки більше чи менше;
В) краще чи гірше;
Г) у цій шкалі відсутні будь-які відношення.

4. Основні одиниці вимірювання – це:

А) похідні одиниці;
Б) розмір яких установлений та є незалежним;
В) фізичні одиниці;
Г) усі відповіді правильні.

5. Міжнародна система одиниць (СІ) була прийнята і затверджена в період з:

А) 1960 – 1961;
Б) 1961 – 1962;
В) 1959 – 1960;
Г) 1962 – 1963.

6. Які шляхи використовують для підвищення точності вимірювань:

А) технічний, законодавчий, правовий;
Б) технічний, науковий, вимірювальний;
В) науковий і законодавчий;
Г) науковий, законодавчий, технічний.

7. Величина, яка не змінюється від одного до іншого вимірювання, це похибка:

А) абсолютна;
Б) основна;
В) відносно-випадкова;
Г) систематична.

8. У яких одиницях можна визначити величину відносної-дійсної та відносної-приведеної похибки:

А) у метрах, см, км;
Б) у кг, гр, тоннах;
В) у відсотках;
Г) усі відповіді правильні.

9. Процес рандомізації – це:

А) перетворення систематичної похибки у випадкову;
Б) визначення похибок величин поправок та коефіцієнтів перетворення;
В) перевірка показань вимірювального приладу;
Г) контроль ЗВТ, на який поширюється (не поширюється) державний метрологічний нагляд.

10. У шкалі інтервалів усі об'єкти вимірювання:

А) упорядковані за рангами;
Б) поділені за інтервалами;
В) мають строго визначене нульове положення;
Г) упорядковані за рангами та поділені за інтервалами.

11. Метрологічне забезпечення вимірювань не використовує:

А) наукові та організаційні основи вимірювань;
Б) засоби вимірювальної техніки;
В) норми та правила, що забезпечують єдність вимірювань;
Г) немає правильної відповіді.

12. Одиниці вимірювання, що визначаються математичною залежністю однієї величини від іншої – це:

А) основні одиниці;
Б) позасистемні одиниці;
В) похідні одиниці;
Г) метричні одиниці.

13. Сила світла вимірюється в:

А) люксах (лк);
Б) вольтах (В);
В) ватах (Вт);
Г) канделах (Кд).

14. Вимірювання, при яких певне значення величини знаходять на основі залежності між даною величиною і величинами, які підлягають вимірюванню, – це:

А) багатократні вимірювання;
Б) одноразові вимірювання;
В) прямі вимірювання;
Г) непрямі вимірювання.

15. Перевірка показань вимірювальних приладів шляхом порівняння їх із показниками еталонів у всьому діапазоні можливих значень вимірювальної величини – це:

А) вимірювання;
Б) тарування;
В) повірка;
Г) калібрування.

РОЗДІЛ 2

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

2.1. Методи математичної статистики та їх значення.
2.2. Метод середніх величин та його практична реалізація.
2.3. Вибірковий метод:
  2.3.1. Основні поняття вибіркового методу.
  2.3.2. Елементи теорії ймовірностей.
  2.3.3. Закон нормального розподілу.
  2.3.4. Організація вибірки.
  2.3.5. Визначення показників генеральної сукупності.
2.4. Поняття про статистичну вірогідність.
2.5. Взаємозв’язок результатів вимірювань. Кореляційний аналіз.
Практичні роботи.
Тестові завдання.

Основні терміни теми:

▪ *Ранжування – операція розташування чисел у порядку збільшення або зменшення.*

▪ *Варіаційний ряд – подвійний стовпчик ранжованих чисел, де ліворуч вказано власне показник – варіанта, а праворуч – його кількість (частота).*

▪ *Мода – це таке значення з множини вимірювань, яке зустрічається найбільш часто.*

▪ *Медіана – значення ознаки, яке ділить упорядковану (ранжовану) множину даних навпіл.*

▪ *Коефіцієнт варіації – показник, що визначає характер розсіювання показників.*

▪ *Генеральна сукупність – це найбільш загальна характеристика сукупності об'єктів, об'єднаних однією ознакою.*

▪ *Вибіркова сукупність (вибірка) – це відібрана частина елементів генеральної сукупності, що представляє всю сукупність із прийнятною точністю.*

2.1. Методи математичної статистики та їх значення

У даній темі будуть розглянуті методи обробки вихідної інформації, отриманої в ході вимірів. Для того, щоб правильно застосовувати ці методи та зробити коректні висновки, необхідно зрозуміти роль статистики й значення наведених методів.

Математична статистика – це розділ математики, присвячений методам збору, аналізу та обробки статистичних даних для наукових та практичних цілей. *Статистичні дані* являють собою дані, які отримані в результаті досліджень великої кількості об’єктів чи явищ.

Предметом математичної статистики є аналіз результатів масових, повторюваних вимірювань. Результати таких вимірювань завжди більш-менш відрізняються один від одного. Навіть якщо виміряється той же самий об'єкт у незмінних умовах, не можна одержати однакових даних. Через численні причини, які не піддаються контролю й які варіюють від одного виміру до іншого, результати вимірів завжди перетерплюють *випадкове розсіювання*. Аналогічне розсіювання буває при однотипних вимірах у групі однорідних об'єктів (наприклад, виміри висоти стрибка у групі школярів одного класу). Хоча результат кожного окремого виміру при випадковому розсіюванні заздалегідь передбачити не можна, це не означає, що ми маємо справу з повним хаосом. Масові виміри однорідних об'єктів, що володіють якісною спільністю, виявляють певні закономірності. Математична статистика створює методи виявлення цих закономірностей.

Статистика є галуззю знань, що досліджує сукупності масових однорідних явищ.

Особливість цих явищ полягає, з одного боку, у тому, що вони однорідні, а з іншого боку – відрізняються одне від одного кількісними показниками. Наприклад, досліджуючи велику групу спортсменів одного віку, статі, спортивної кваліфікації й стажу, необхідно виміряти величину максимального споживання кисню (МСК). У першому випадку ми одержимо масові однорідні показники, а в другому – індивідуальні показники, де кожний показник МСК відповідає конкретному спортсменові й відрізняється один від іншого.

Таким чином, *об'єктом дослідження статистики* будуть масові однорідні явища, які відрізняються одне від одного або, як прийнято говорити в статистиці, варіюють за одиничним показником.

Предметом дослідження статистики є оцінка статистичних сукупностей, де застосовують спеціальні математико-статистичні методи, які мають певну мету під час обробки результатів, а саме: вимір масових статистичних сукупностей замінюється такими показниками, у результаті застосування яких не відбувається або майже не відбувається втрати вихідної інформації. Таким чином, великі сукупності чисел замінюються декількома параметрами, що несуть у собі всю вихідну інформацію.

Зменшення обсягу інформації дозволяє проаналізувати досліджуване явище й дати йому адекватну оцінку, чого неможливо здійснити при розгляді всієї статистичної сукупності. Крім того, виявлення параметрів сукупності в ряді випадків дозволяє встановити природну закономірність в оцінюванні вихідних даних як у частині її конкретного аналізу, так і в порівнянні з іншими сукупностями.

Усі ці міркування мають місце в практиці спортивних досліджень. За рідкісним винятком, дослідження у фізичній культурі й спорті засновані на спостереженнях, експерименті й тестуванні. Значна частина наукових методів ґрунтується на результатах вимірів великих груп спортсменів. Так, споконвічно практика ФКіС має у своєму розпорядженні вихідні дані у вигляді статистичної сукупності, де її одиничні показники відбивають досягнення конкретного спортсмена, а їхнє варіювання свідчить про індивідуальні відмінності спортсменів за показником, що вимірюється.

Отже, *спортивна статистика* – це наука про масові однорідні явища в практиці ФКіС.

Виділяють три основних *етапи статистичних досліджень:*

1. *Статистичне спостереження*, що являє собою планомірний, науково обґрунтований збір даних, які характеризують досліджуваний об'єкт. Цей етап повинен задовольняти наступним вимогам:

а) об'єкти спостереження (в окремому випадку випробувані) повинні бути однаковими (однорідними) з погляду їх властивостей (кваліфікація, спеціалізація, вік, стать, стаж занять й ін.);

б) число об'єктів спостереження повинно бути достатнім, щоб можна було виявити закономірності й узагальнити їх властивості.

II. *Статистичні зведення й групування*. Вони є важливою підготовчою частиною до статистичного аналізу даних. Цей етап передбачає:

а) систематизацію (групування) даних;

б) оформлення певних статистичних таблиць.

III. *Аналіз статистичного матеріалу*. Це завершальний етап статистичного підходу. Його проводять із використанням відповідних математико-статистичних методів.

2.2. Метод середніх величин та його практична реалізація

Утворення варіаційних рядів. Найбільш популярним методом статистики в практиці фізичної культури й спорту є *метод середніх величин,* що складається з трьох основних етапів: 1) утворення варіаційних рядів на базі вихідної статистичної сукупності; 2) визначення параметрів варіаційних рядів, що характеризують сукупність без втрат інформації; 3) практична реалізація знайдених параметрів.

Приклад. У 43-х легкоатлетів при виконанні старту з наступним бігом на 6 м вимірювалась величина стартової реакції (с):

1,25	1,36	1,38	1,32	1,32	1,36	1,40	1,30
1,38	1,30	1,40	1,36	1,42	1,45	1,38	1,36
1,42	1,38	1,32	1,25	1,38	1,36	1,30	1,40
1,32	1,36	1,45	1,38	1,42	1,40	1,36	1,42
1,38	1,40	1,36	1,30	1,32	1,36	1,38	1,42
1,32	1,25	1,30					

Статистичні сукупності допускають більші масиви чисел: чим більше вихідних даних, тим точніший кінцевий результат. Відтак практичні сукупності мають обсяг від 30 до 200 од. Однак у практиці спорту є свої особливості.

По-перше, на практиці з певного виду спорту чемпіонів буває обмежена кількість (8–10 чоловік). У цьому випадку використовують статистичні методи на малих сукупностях, справедливо вважаючи, що краще встановити закономірність на малій сукупності, ніж взагалі її не мати.

По-друге, у практиці спорту не тільки спортсмени, але й самі явища бувають унікальними, тому сукупності можуть бути малими. Отже, принцип дії методу середніх величин залишається однаковим і для великих, і для малих сукупностей.

Попередній приклад ілюструє серію однотипних вимірів. Отримана на практиці й представлена вище група безсистемних чисел повинна бути перетворена в систему, тобто сукупність пов'язаних між собою показників, характеристики якої дадуть інформацію про всю систему, а через неї – і про групу вихідних даних.

З метою одержання такої системи виконаємо операцію ранжування**.**

Ранжування – це операція розташування чисел у порядку збільшення або зменшення.

Для наведеного прикладу операція ранжування зі збільшення чисел така:

1,25	1,25	1,25						
1,30	1,30	1,30	1,30	1,30				
1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32			
1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36
1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	
1,40	1,40	1,40	1,40	1,40				
1,42	1,42	1,42	1,42					
1,45	1,45	1,45						

Тепер нескладно побачити, що більша сукупність не піддається аналізу й тому на практиці марна.

Максимально спростимо ранжований матеріал, підрахуємо кількість кожного показника й вибудуємо їх у стовпчику:

x_i	n_i
1,25	3
1,30	5
1,32	6
1,36	9
1,38	8
1,40	5
1,42	4
1,45	3

Отримана група чисел називається варіаційним рядом.

Варіаційний ряд – це подвійний стовпчик ранжованих чисел, де ліворуч стоїть власне показник – *варіанта,* а праворуч – його кількість – *частота.* Сума частот називається *об'ємом сукупності,* тобто загальним числом вихідних даних.

Тепер звернемося до символів варіаційного ряду. Показник прийнято позначати певною літерою (найчастіше буквою латинського алфавіту), а індекс, що знаходиться при ній, вказує на число показників даної групи. Так, варіант 1,25 у варіаційному ряді стоїть на першому місці й тому може бути позначений як X_1, варіант 1,30 – X_2, варіант 1,32 – X_3 і т.д., останній варіант у ряді – 1,45, що відповідає X_8, також може бути позначений як X_n, тобто як варіант, що стоїть на останньому місці. Таким чином, у стовпці X_i перебувають числа, кожне з яких має певний порядковий номер ***i***. У цьому стовпчику перебувають показники, що відрізняються порядковими номерами – $\mathbf{X}_i$.

Якщо розглядати варіаційний ряд з іншим змістовним значенням, відмінним від вищенаведеного, варто позначити його, наприклад, буквою y_i. У новому варіаційному ряді також будуть порядкові номери варіантів. Таким чином, стовпчики варіант різних рядів можуть бути представлені як X_i, Y_i, Z_i і т.д.

Стовпчик варіаційного ряду, що містить частоти, позначається як n_i, і відбиває наявність частот, що стоять відповідно до ранжування: на першому місці $n_i = 3$, на другому – $n_2 = 5$ і т.д. до $n_8 = 3$, що може бути представлений як n_n, тобто як показник, що стоїть у даному ряді на останньому місці.

Обсяг сукупності наведеного ряду $n = 43$ позначається без індексу однією буквою, тому що для ряду характерне єдине число обсягу сукупності, що не має ніякого перерахування.

Для знайденого варіаційного ряду характерним є те, що на відміну від групи спочатку вимірюваних показників ряд являє собою математичну систему, тобто групу чисел, пов'язаних між собою.

Найчастіше цей зв'язок простежується через обсяг сукупності, що являє собою суму частот. Інакше кажучи, частоти, що стоять у ряді, не довільні й сумарно показують обсяг сукупності. Якщо представлений ряд є математичною системою, то цю систему можна охарактеризувати наступними показниками:

- середня арифметична $\overline{\chi}$;
- дисперсія σ^2;
- середнє квадратичне відхилення σ;
- коефіцієнт варіації *V;*
- мода M_o;
- медіана M_e.

Існують й інші характеристики ряду, але вони не розглядаються тут, тому що не знайшли свого практичного застосування в дослідженнях ФКіС.

Перейдемо до визначення показників $\overline{\chi}$, σ^2 і *V*.

Середня арифметична величина ($\overline{\chi}$) – показник середнього рівня, самого типового й характерного для всього ряду – визначається за формулою

$$\overline{\chi} = \frac{\sum_{1}^{n} \chi_i n_i}{n}, \tag{2.1}$$

де x_i – варіант ряду; n_i– – частота ряду; n – об’єм сукупності.

Сумою $\sum$ прийнято позначати підсумовування тих даних, що стоять праворуч. Нижні й верхні показники $\sum$ вказують, з якого числа варто почати додавання і якими показниками його слід закінчити. Так, $\sum_{1}^{7} \chi_i$ позначає, що необхідно скласти всі X, що мають порядкові номери від 1 до 7. Знак $\sum_{1}^{n} \chi_i$ показує підсумок усіх X від першого до останнього показника.

Таким чином, обчислення за формулою (2.1.) припускає наступний порядок дій.

1. Множать кожний варіант x_i, на відповідну частоту n_i.

2. Підсумують всі отримані добутки, тобто $\sum_{1}^{n} \chi_i n_i$.

3. Знайдену суму $\sum_{1}^{n} \chi_i n_i$ ділять на обсяг сукупності *n*.

Для зручності й наочності роботи з показниками дії необхідно скласти таблицю, тому що додаванню підлягають $\boldsymbol{x_i n_i}$, що перебираються від першого до останнього числа.

Використовуючи дані прикладу, складемо табл. 2.1. Середня арифметична визначається за формулою (2.1):

Таблиця 2.1

Визначення середньої арифметичної

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$
1	1,25	3	3,75
2	1,30	5	6,50
3	1,32	6	7,92
4	1,36	9	12,14
5	1,38	8	11,04
6	1,40	5	7,00
7	1,42	4	5,68
8	1,45	3	4,35
Усього	—	43	58,48

$$\bar{\chi} = \frac{\sum_{1}^{n} \chi_i}{n} = \frac{58,48}{43} = 1,36.$$

Звернемо увагу на те, що *точність обчислень і точність вимірів повинні збігатися:* якщо вимірювані величини мають точність до сотих, то й проміжні обчислення й кінцевий результат повинні бути представлені з точністю до сотих. Таким чином, отримані показники, представлені варіаційним рядом, мають типову характерну для всього ряду величину $\bar{\chi}$ = 1,36 с.

Наступними статистичними показниками, які характеризують центральну тенденцію вибірки є мода та медіана.

Мода (фр. mode) – це таке значення з множини вимірювань, яке трапляється найчастіше. Інтервал групування показників з найбільшою частотою називається модальним. Модальний інтервал ознаки відповідає найбільшому підйому (вершині) графіка розподілу частот. Якщо графік частот має одну вершину, то такий розподіл називають *унімодальним*.

Модою для попереднього прикладу є: $M_o = 1{,}36$, тому, що воно зустрічається 9 разів.

Медіана (від лат. mediana – середня) – це таке значення ознаки, яке ділить упорядковану (ранжовану) множину даних навпіл. Одна половина всіх значень є меншою за медіану, а інша – більшою. Тому першим кроком у визначенні медіани є впорядкування (ранжування) всіх значень із тенденцією збільшення або зменшення.

Модою для попереднього прикладу є: $M_e = (1{,}36 + 1{,}38) / 2 = 1{,}37$ *с.*

До показників варіації належать дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації та стандартна помилка середнього арифметичного.

Дисперсія (σ^2) вказує на варіювання, тобто розсіювання вихідних даних щодо середньої арифметичної величини (у квадраті).

Дисперсія визначається за формулою 2.2:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (\chi_i - \overline{\chi})^2 n_i}{n}. \tag{2.2}$$

Для обчислення σ^2 треба виконати такі дії.

1. Визначити середню арифметичну $\overline{\chi}$.
2. З кожного варіанта відняти середню арифметичну: $\chi_ш - \overline{\chi}$.
3. Знайдену різницю піднести до квадрату: $\left(\chi_i - \overline{\chi}\right)^2$.
4. Отримані квадрати різниць помножити на відповідні частоти: $\left(\chi_i - \overline{\chi}\right)^2 n_i$.
5. Визначити суму всіх добутків $\sum_1^n \left(\chi_i - \overline{\chi}\right)^2 n_i$.
6. Знайдену суму поділити на об’єм сукупності *n*.

Маючи вихідні дані, складемо табл. 4.2.

При визначенні дисперсії велике значення має стовпчик 5, у якому від кожного варіанта віднімається значення середньої арифметичної. Таким чином, показники стовпчика 5 указують на те, як кожний конкретний варіант співвідноситься з середнім значенням. Якщо середня величина визначена правильно, то сума негативних величин (у прикладі це – 0,21) за модулем повинна дорівнювати сумі позитивних величин, тобто 0,21.

$$\overline{\chi} = \frac{58{,}48}{43} = 1{,}36; \quad \sigma^2 = \frac{0{,}1138}{43} = 0{,}0026.$$

Таблиця 2.2

Визначення дисперсії

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \overline{\chi}$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2 n_1$
1	2	3	4	5	6	7
1	1,25	3	3,75	–0,11	0,0121	0,0363
2	1,30	5	6,50	–0,06	0,0036	0,0180
3	1,32	6	7,92	–0,04	0,0016	0,0096
4	1.36	9	12,14	0,00	0,0000	0,0000
5	1,38	8	11,04	0,02	0,0004	0,0032
6	1,40	5	7,00	0,04	0,0016	0,0080
7	1,42	4	5,68	0,06	0,0036	0,0144
8	1,45	3	4,35	0,09	0,0081	0.0243
Усього	–	43	58,48	–	–	0,1138

У цілому дані стовпчика 5 свідчать, як всі варіанти розсіюються щодо середньої величини.

Обчислюючи середню арифметичну, групу вихідних даних замінили однією величиною, найтиповішою і найхарактернішою. Тепер необхідно замінити всі показники розсіювання одним показником – середньої арифметичної усіх показників розсіювання. Однак при правильному розрахунку середня сума негативних показників повинна дорівнювати сумі позитивних показників, тобто при обчисленні середньої арифметичної сума повинна дорівнювати нулю. Тому пропонується звести всі знакові показники у квадрат, а потім знайти середню арифметичну всіх квадратів. Саме з цією метою в стовпчику 6 знаходять квадрати різниць $(\chi_i - \overline{\chi})^2$, а в стовпчику 7 – їхній добуток на частоти з метою визначення середньої арифметичної серед них.

Таким чином, дисперсія є середньою арифметичною величиною всіх $(\chi_i - \overline{\chi})^2$. Ця величина вказує на розсіювання вихідних даних щодо середньої арифметичної (у квадраті).

Звернемо увагу на те, що середня арифметична ряду отримана в тих же одиницях (у прикладі – у секундах (с)), що й вихідні виміри, у той час як дисперсія обчислена у квадраті цих величин. Ця обставина ускладнює порівняння знайдених показників.

Щоб здійснити порівняння, перейдемо до визначення наступного параметра варіаційного ряду – **середнього квадратичного відхилення** (σ). З цією метою варто визначити корінь квадратний з дисперсії й урахувати тільки позитивний корінь:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \tag{2.3}$$

Так, для вищенаведеного ряду середнє квадратичне відхилення становить

$$\sigma = \sqrt{0,0026} = 0,05 \ c.$$

Звернемо увагу також на те, що в наведеному прикладі обчислення дисперсії здійснюється з більшою точністю (до сотих), ніж вимір. Це пояснюється тим, що округлення цих даних до сотих, як і у вимірах, позбавило б нас значимих чисел і привело б до нуля. Тому середнє квадратичне відхилення варто розраховувати з більшою точністю. Під час знаходження середнього квадратичного відхилення, обчислюючи корінь із дисперсії, знову повертаємося до вихідної точності.

Тепер об'єднаємо два основних параметри варіаційного ряду $-\bar{\chi}$ і σ у вигляді наступного інтервалу: $\bar{\chi} \pm \sigma$.

Наведений інтервал означає, що вихідні дані, об'єднані у варіаційний ряд (див. табл. 2.1), можуть бути представлені величинами:

$$\bar{\chi} \pm \sigma = (1{,}36 \pm 0{,}05) \text{ с.}$$

Розглядаючи даний інтервал, бачимо, що вихідний масив чисел без значимої похибки може бути замінений основним середнім показником 1,36 з, відхилення від якого з недостатністю представляє – 0,05 з, а з надлишком – +0,05 с. Інакше кажучи, вся група чисел може бути представлена інтервалом у межах від 1,36 – 0,05 = 1,31 с до 1,36 + 0,05 = 1,41 с, який можна записати як 1,31...1,41 с.

Інтервал представляє типові, основні для даної сукупності показники. Так, у попередньому прикладі вихідна сукупність представляється як 1,31...1,41 с, а варіанти, що виходять за ці межі, є нетиповими, нехарактерними, недостатньо показовими.

Таким чином, варіанти 1,25; 1,30; 1,32 (див. табл. 2.1) є нехарактерними для даної спортивної групи як переважаючу основну групу (чим менший час забігу, тим вищий спортивний результат), а показники 1,42 і 1,45 – нехарактерними для даної групи як недосяжні для середнього рівня. Оскільки в першій групі 14 спортсменів (3 + 5 + 6), а в другій 7 спортсменів (4 + 3), то сума показників двох груп дорівнює 21 спортсменові (14 + 7), що становить майже половину від кількості всіх спортсменів *(n* = 43). Звідси можна зробити висновок, що дана група досить неоднорідна за вихідними показниками і вимагає визначеної організаційної оцінки.

Для визначення характеру розсіювання використовують параметр варіаційного ряду – **коефіцієнт варіації** *(V)*, який розраховують за формулою:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{\chi}} 100\%. \tag{2.4}$$

За формулою (2.4) знаходимо значення коефіцієнта варіації, що визначає, який відсоток від середньої арифметичної становить показник розсіювання σ. Так, у наведеному прикладі це означає, що розсіювання показників щодо середньої арифметичної становить 3,68 %.

$$v = \frac{0,05}{1,36}100\% = 3,68\%.$$

Коефіцієнт варіації *V* уперше на практиці був використаний у біології. З точки зору біології група є однорідною, якщо коефіцієнт варіації не перевершує 10–15 %.

У практиці фізичної культури й спорту не існує такого критерію, однак сам коефіцієнт варіації часто вживається й відбиває розсіювання групи досить характерно. Так, наприклад, коефіцієнт варіації може вказати на кваліфікацію випробуваного. Відомо, що висококваліфіковані спортсмени показують дуже близькі результати, тобто розсіювання їх даних незначне й коефіцієнт варіації повинен бути невисоким, у той час як показники спортсменів невисокої кваліфікації сильно відрізняються, тому їхні коефіцієнти варіації повинні бути вищими.

Наступний приклад. Розглянемо результати забігу (с) 10-ти юнаків на 200 м, наведені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Обробка результатів забігу юнаків

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \overline{\chi}$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2 n_1$
1	28,0	1	28,0	0,5	0,25	0,25
2	28,5	1	28,5	1,0	1,00	1,00
3	27,8	3	83,4	0,3	0,09	0,27
4	27.4	2	54,8	–0,1	0,01	0,02
5	27,0	2	54,0	–0,5	0,25	0,50
6	26,8	1	26,8	–0,7	0,49	0,49
Усього	–	10	275,5	–	–	2,53

Визначимо середню арифметичну, дисперсію, середнє квадратичне відхилення й коефіцієнт варіації:

$$\overline{\chi} = \frac{275,5}{10} = 27,55 \approx 27,5 \text{ с}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{2,53}{10} = 0,253\,\text{с}^2;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{0,253} = 0,5 \text{ с}; \qquad v_\chi = \frac{0.5}{27,5}100\% = 1,8\%.$$

Тепер розглянемо результати спортсменів високого класу (табл. 2.4). Визначимо середню арифметичну, дисперсію, середнє квадратичне відхилення й коефіцієнт варіації:

$$\overline{y} = \frac{213,4}{10} = 21,34 \approx 21,3\,\text{с}; \qquad \sigma_y^2 = \frac{0,38}{10} = 0,038\,\text{з};$$

$$\sigma_y = \sqrt{0,038} = 0,19 \approx 0,2 \text{ с}; \qquad \nu_y = \frac{0,2}{21,3}100\% = 0,94 \approx 1\%.$$

Отже, проаналізувавши результати спортсменів за допомогою коефіцієнта варіації, дисперсії й середнього квадратичного відхилення, можна зробити висновок, що розсіювання вихідних даних у них значно менше, а отже, виходить, і кваліфікація спортсменів вища.

Таблиця 2.4

Обробка результатів забігу спортсменів високого класу

№ п/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	21,0	1	21,0	–0,3	0,09	0,09
2	21,2	2	42,4	–0,1	0,01	0,02
3	21,3	3	63,9	0,0	0,00	0,00
4	21,4	2	42,8	0,1	0,01	0,02
5	21,6	1	21,6	0,3	0,09	0,09
6	21,7	1	21,7	0,4	0,16	0,16
Усього	—	10	213,4	—	—	0,38

Коефіцієнт варіації виражається відносним числом у відсотках. Це створює можливість порівняння показників з різними найменуваннями.

Для простого впорядкованого ряду, де n_i – 1, обчислення параметрів $\bar{\chi}$ і σ спрощується й здійснюється за наступними формулами:

$$\bar{\chi} = \frac{\sum_{1}^{n} \chi_i}{n}; \qquad (2.5)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{1}^{n} (\chi_i - \bar{\chi})^2}{n}. \qquad (2.6)$$

Слід зазначити, що в статистиці середню арифметичну прийнято відносити до мір центральної тенденції, а дисперсію, середнє квадратичне відхилення й коефіцієнт варіації – до мір варіабельності.

Розв’язання типових завдань методом середніх величин. Метод середніх величин є первинним методом обробки вихідних даних. Як було зазначено вище, його основна властивість – стиснення вихідного матеріалу. Зокрема, вихідні числа можуть бути замінені показниками $\bar{\chi}$, σ^2, σ і V без істотної втрати інформації.

Так, у прикладі розглянута ситуація, де 43 спортсмени, що показали величину стартової реакції від 1,25 до 1,45 с, можуть бути охарактеризовані параметрами $\bar{\chi} \pm \sigma$, V, тобто (1,36 ± 0,06) с; V = 4,4 %.

Розгляд вихідного матеріалу в такому вигляді дозволяє розв’язати ряд практичних завдань, корисних для тренерської роботи: наприклад, можна порівняти дві групи спортсменів. Подібні завдання в спорті зустрічаються часто, наприклад, порівнюються контрольна й експериментальна групи спортсменів для виявлення принципових відмінностей однієї групи від іншої; показники груп спортсменів різних за віком і статтю; групи спортсменів, які займаються за різними програмами, методиками; групи спортсменів, які займаються в різних умовах, режимах, з різноманітним об’ємом й інтенсивністю тренувальних навантажень, з використанням різних комбінацій тимчасових, просторових і силових показників. Нарешті, порівнянню підлягають результати не тільки групи випробуваних, але й одного індивіда, результати якого багаторазово вимірювані за тією самою ознакою. У цьому випадку можна простежити динаміку індивідуальних спортивних можливостей, що дозволить удосконалити методику його тренування.

Так, наприклад, порівнюючи результати контрольної (χ_i) (табл. 2.5) і експериментальної *(y_i)* (табл. 4.6) груп спортсменів за швидкістю бігу (м/с).

Таблиця 2.5

Обробка результатів контрольної групи спортсменів

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 n_1$
1	2,8	5	14,0	–0,3	0,09	0,45
2	3,0	7	21,0	–0,1	0,01	0,07
3	3,1	9	27,9	0,0	0,00	0,00
4	3,2	8	25,6	0,1	0,01	0,08
5	3,3	6	19,8	0,2	0,04	0,24
6	3,4	5	17,0	0,3	0,09	0,45
Усього	–	40	125,3	–	–	1,29

$$\bar{\chi} = \frac{125{,}3}{40} = 3{,}13 \approx 3{,}1 \text{ м/с}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{1{,}29}{40} \approx 0{,}03 \text{ (м/с)};$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{0{,}03} \approx 0{,}18 \approx 0{,}2 \text{ м/с}; \qquad \upsilon_\chi = \frac{0{,}2}{3{,}1} 100\% \approx 6{,}5\%$$

Характеристика контрольної групи спортсменів:

$$\bar{\chi} \pm \sigma_\chi = (3{,}1 \pm 0{,}2) \text{ м/с}; \qquad \upsilon_\chi = 6{,}5\%$$

Таблиця 2.6

Обробка результатів експериментальної групи спортсменів

№ з/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	3,1	7	21,7	–0,2	0,04	0,28
2	3,2	12	38,4	–0,1	0,01	0,12
3	3,3	11	36,3	0,0	0,00	0,00
4	3,4	10	34,0	0,1	0,01	0,10
Усього	–	40	130,4	–	–	0,50

$$\bar{y} = \frac{130}{40} = 3{,}26 \approx 3{,}3 \text{ м/с}; \qquad \sigma_y^2 = \frac{0{,}50}{40} \approx 0{,}01 \text{ (м/с)}^2;$$

$$\sigma_y = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1 \text{ м/с}; \qquad \upsilon_y = \frac{0{,}1}{3{,}3} 100\% \approx 3{,}0\%.$$

Характеристика експериментальної групи спортсменів:

$$\bar{y} \pm \sigma_y = (3{,}3 \pm 0{,}1) \text{ м/с}; \quad V_y = 3{,}0\%.$$

Результати по контрольній і експериментальній групах спортсменів дають змогу порівняти параметри двох рядів і зробити висновки. Експериментальна група спортсменів показала більш високий результат ($\bar{y}$ = 3,3 м/с > $\bar{\chi}$ = 3,1 м/с), при цьому розсіювання вихідних даних у цій групі менше (σ = 0,1 м/с, V = 3,0%) порівняно з контрольною групою (σ = 0,2 м/с, V = 6,5 %). Це свідчить про успішний експеримент, відповідно до якого спортсмени показали більш високу швидкість бігу при більшій стабільності показників.

Визначимо, якими можуть бути результати порівняння подібних груп спортсменів (табл. 2.6.1).

Таблиця 2.6.1

Результати порівняння
контрольної й експериментальної груп спортсменів

№ з/п	$\bar{\chi}$	$\bar{y}$	σ_x	σ_y
1	3,2	3,1	0,3	0,2
2	3,2	3,1	0,2	0,2
3	3,2	3,1	0,1	0,2
4	3,1	3,1	0,3	0,2
5	3,1	3,1	0,2	0,2
6	3,1	3,1	0,1	0,2
7	3,0	3,1	0.3	0,2
8	3,0	3,1	0,2	0,2
9	3,0	3.1	0.1	0,2

Розглянемо принцип побудови такої таблиці. Контрольна група спортсменів представляє ті самі результати: $x \pm \sigma_x = 3{,}1 \pm 0{,}2$, а експериментальна – різні: середні арифметичні показники більші (3,2); рівні (3,1) і менші (3,0) результати контрольної групи. Середні квадратичні відхилення змінюються за таким же принципом для кожної пари середніх. Цей підхід дозволяє оцінити всі можливі комбінації $\bar{\chi} \pm \sigma_x$ і $\bar{y} \pm \sigma_y$.

1. $\bar{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}2 \pm 0{,}3$; $\bar{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

У цьому випадку контроль $\bar{\chi}$ показав більш високий результат при більшому розсіюванні даних, тобто при меншій стабільності показань.

2. $\bar{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}2 \pm 0{,}2$; $\bar{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

Контроль показав більш високий результат при рівній з експериментальний групою стабільності.

3. $\bar{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}2 \pm 0{,}1$; $\bar{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

Контроль дав більш високий результат при більшій стабільності результатів.

4. $\bar{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}1 \pm 0{,}3$; $\bar{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

Експериментальна і контрольна групи показують рівні результати, однак стабільність експериментальної групи вища, ніж контрольної.

5. $\bar{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}1 \pm 0{,}2$; $\bar{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

Експеримент не виявив ніяких розходжень у порівнянні з контрольною групою.

6. $\overline{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}1 \pm 0{,}1$; $\overline{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

При рівних показниках у результатах контроль вказує на більшу стабільність.

7. $\overline{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}0 \pm 0{,}3$; $\overline{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

Контрольна група показала гірший результат порівняно з експериментальною, при цьому стабільність її результатів нижча, ніж в експериментальній групі.

8. $\overline{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}0 \pm 0{,}2$; $\overline{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

При рівній стабільності результатів контроль дав гірший показник.

9. $\overline{\chi} \pm \sigma_x = 3{,}0 \pm 0{,}1$; $\overline{y} \pm \sigma_y = 3{,}1 \pm 0{,}2$.

Контрольна група спортсменів показала результат гірший, ніж експериментальна.

Отже, попарне порівняння результатів двох груп спортсменів здійснюється за показниками: 1) середньої арифметичної, що характеризує загальну зміну результату; 2) середнього квадратичного відхилення (або коефіцієнта варіації), що вказує на розсіювання даних, тобто на стабільність.

Порівняємо вікові групи спортсменів і визначимо динаміку основних показників випробуваних.

Наприклад, у двох групах випробуваних у віці 14 років (x_i) (табл. 2.7) і 15 років (y_i) (табл. 2.8.), вимірюється висота стрибка з місця зі змахом рук (см). Необхідно проаналізувати зміну висоти стрибка залежно від віку.

Таблиця 2.7

Обробка результатів висоти стрибка школярів у віці 14 років

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \overline{\chi}$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2 n_1$
1	30,2	5	151,0	–5,9	34,8	174,0
2	32,4	7	226,8	–3,7	13,7	95,9
3	35,0	9	315,0	–1,1	1,2	10,8
4	38,0	8	304,0	1,9	1,9	15,2
5	40,0	4	160,0	3,9	15,2	60,8
б	41,2	7	288,4	5,1	26,0	182,0
Усього	–	40	1445,2	–		538,7

$$\overline{\chi} = \frac{1415{,}2}{40} = 36{,}13 \approx 36{,}1 \text{ см}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{538{,}7}{40} \approx 0{,}03 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{13{,}47} \approx 3{,}7 \text{ см}; \qquad \upsilon_\chi = \frac{3{,}7}{36{,}1} 100\% \approx 10{,}2\% \text{ см}^2;$$

$$\overline{\chi} \pm \sigma_\chi = (36{,}1 \pm 3{,}7) \text{ см}.$$

Таблиця 2.8

Обробка результатів висоти стрибка школярів у віці 15 років

№ з/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	34,0	4	136,0	–2,2	4,84	19,36
2	35,2	9	316,8	–1,0	1,00	9,00
3	36,0	10	360,0	–0,2	0,04	0,40
4	36,4	8	291,2	0,2	0,04	0,32
5	38,0	7	266,0	1,8	3,24	22,68
6	39,5	2	79,0	3,3	9,00	18,00
Усього		40	1449,0	–	–	69,76

$$\bar{y} = \frac{1449{,}0}{40} = 36{,}22 \approx 36{,}2 \text{ см}; \qquad \sigma_y^2 = \frac{69{,}76}{40} \approx 1{,}74 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_y = \sqrt{1{,}74} \approx 1{,}34 \text{ см} \quad ; \qquad \upsilon_y = \frac{1{,}3}{36{,}2} 100\% \approx 3{,}6\%$$

$$\bar{y} \pm \sigma_y = (36{,}2 \pm 3{,}6) \text{ см.}$$

Порівняння даних, наведених у табл. 2.7 і 2.8, свідчить, що результати чотирнадцятилітніх стрибунів через рік дещо покращилися, стали більш стабільними.

Особливо важливим буває порівняння, що виявляють зміну стану спортсмена (наприклад, до й після тренування). Розглянемо це на конкретному прикладі. У групі випробуваних вимірюване ЧСС (уд./хв.) до (x_i) (табл. 2.9) і після *(y_i)* (табл. 2.10) тренування. Необхідно оцінити характер тренування.

Таблиця 2.9

Обробка вимірів ЧСС у спортсменів до тренування

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 n_1$
1	106	6	636	–5,5	30,25	181,5
2	109	9	981	–2,5	6,25	56.25
3	110	11	1210	–1,5	2,25	24,75
4	113	12	1356	1,5	2,25	27,10
5	115	7	805	3,5	12,25	8,75
6	117	5	585	5,5	30,25	151,25
Усього	–	50	5573	–	–	449,5

$$\bar{\chi} = \frac{5573}{50} \approx 111{,}5 \text{ уд./хв.}; \quad \sigma_\chi^2 = \frac{449{,}5}{50} \approx 8{,}99 \text{ уд./хв.}^2;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{8{,}99} \approx 3{,}0 \text{ уд./хв.}; \quad \upsilon_\chi = \frac{0{,}3}{111{,}5} 100\% \approx 2{,}7\%;$$

$$\bar{\chi} \pm \sigma_\chi = (111{,}5 \pm 0{,}3) \text{ уд./хв.}$$

Таблиця 2.10

Обробка вимірів ЧСС у спортсменів після тренування

№ з/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	165	5	825,0	–11,8	139,24	696,20
2	172	9	1548,0	–4,8	23,04	207,36
3	175	14	2450,0	–1,8	3,24	45,36
4	180	10	1800,0	3,2	10,24	102,40
5	184	8	1472,0	7,2	51,84	414,72
6	186	4	744,0	9,2	84,64	338,56
Усього	–	50	8839,0	–	–	1804,6

$$\bar{y} = \frac{8839{,}0}{50} = 176{,}78 \approx 176{,}8 \text{ уд./хв.}; \qquad \sigma_y^2 = \frac{1804{,}6}{50} \approx 36{,}09 \text{ уд./хв.}^2;$$

$$\sigma_y = \sqrt{36{,}09} \approx 6 \text{ уд./хв.}; \qquad \upsilon_y = \frac{6{,}0}{176{,}8} 100\% \approx 3{,}4\%;$$

$$\bar{y} \pm \sigma_y = (176{,}8 \pm 6{,}0) \text{ уд./хв.}$$

Дані експерименту свідчать про те, що ЧСС істотно зросла від 111,5 до 176,8 уд./хв. При цьому стабільність результатів майже не змінилася: 3,4 – 2,7 = 0,7 %. Це свідчить про те, що тренування було інтенсивним, а спортсмени – приблизно однієї кваліфікації.

Порівняти можна не тільки дві групи випробуваних, і двох спортсменів, якщо кожного з них багаторазово вимірювали за тим самим показником.

Наприклад. Під час гри в хокей два воротарі протягом 30 днів відбивали по 100 кидків шайби кожний. Число відбитих кидків першого воротаря *(*x_i*)* наведене в табл. 4.11, другого воротаря (y_i) – у табл. 2.12. необхідно порівняти кваліфікацію випробуваних воротарів.

Таблиця 2.11

Обробка результатів першого воротаря

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 n_1$
1	65	5	325	–6,5	42,25	211,25
2	68	4	272	–3,5	12,25	49,00
3	72	7	504	–0,5	0,25	1,75
4	73	8	584	1,5	2,25	18,00
5	75	3	225	3,5	12,25	36,75
6	78	3	234	6,5	45,25	126,75
Усього	–	30	2144	–	–	443,50

$$\bar{\chi} = \frac{2144}{30} \approx 71{,}5; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{443{,}5}{30} \approx 14{,}78;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{14{,}78} \approx 3{,}8; \quad \upsilon_\chi = \frac{0{,}3}{111{,}5} 100\% \approx 5{,}3\%;$$

$$\bar{\chi} \pm \sigma_\chi = 71{,}5 \pm 3{,}8.$$

Таблиця 2.12

Обробка результатів другого воротаря

№ з/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	64	6	384	–6,2	37,20	223,2
2	69	7	483	–1,2	1,44	10,08
3	70	8	560	–0,2	0,04	0,32
4	72	4	300	1,8	3,24	12,96
5	75	2	150	4,8	23,04	46,08
6	76	3	228	5,8	33,64	100,92
Усього	–	30	2105	–	–	393,56

$$\bar{y} = \frac{2105}{30} \approx 70{,}2; \qquad \sigma_y^2 = \frac{396{,}56}{30} \approx 13{,}12;$$

$$\sigma_y = \sqrt{13{,}12} \approx 3{,}6; \quad \upsilon_y = \frac{3{,}6}{70{,}2}100\% \approx 5{,}1\%;$$

$$\bar{y} \pm \sigma_y = 70{,}2 \pm 3{,}6.$$

Порівнявши дані, наведені в табл. 2.11 і 2.12, можна зробити висновок, що обидва воротарі майже однакової кваліфікації, тому що число відбитих шайб фактично збігається: 71,5 ± 3,8 і 70,2 ± 3,6. При цьому стабільність їхніх результатів також практично однакова: 5,3 і 5,1 %.

Отже, за допомогою коефіцієнта варіації або середнього квадратичного відхилення можна оцінити стабільність результатів, що має велике значення для тренерської роботи.

Приклад. Зрівняйте стабільність у швидкості плавання (м/с) першого (x_i) і другого *(y_i)* плавця (табл. 2.13 і 2.14).

Таблиця 2.13

Обробка результатів першого плавця

№з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 n_1$
1	1,00	2	2,00	–0,10	0,0100	0,0200
2	1,05	3	3,15	–0,05	0,0025	0,0075
3	1,08	5	5,40	–0,02	0,0004	0,0020
4	1,10	4	4,40	0,00	0,0000	0,0000
5	1,15	3	3,45	0,05	0,0025	0,0075
6	1,20	3	3,60	0.10	0,0100	0,0300
Усього	–	20	21,95	–	–	0,0670

$$\bar{\chi} = \frac{22{,}00}{20} = 1{,}1 \text{ м/с}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{0{,}0670}{20} = 0{,}00335 \ (\text{м/с})^2;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{0{,}00335} \approx 0{,}06 \text{ м/с}; \qquad \upsilon_\chi = \frac{0{,}6}{1{,}1}100\% \approx 5{,}5\%;$$

$$\bar{\chi} \pm \sigma_\chi = (1{,}1 \pm 0{,}06) \text{ м/с}.$$

Таблиця 2.14

Обробка результатів другого плавця

№ з/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	1,00	4	4,00	–0,20	0,0400	0,1600
2	1,12	5	5,60	–0.08	0,0064	0,0320
3	1,20	4	4,80	0,00	0,0000	0,0000
4	1,26	3	3,78	0,06	0.0036	0,0108
5	1,30	2	2,60	0,10	0,0100	0,0200
6	1,32	2	2,64	0,12	0,0120	0,0240
Усього	–	20	23,42	–	–	0,2468

$$\bar{y} = \frac{23,42}{20} = 1,17 \approx 1,12 \text{ м/с}; \qquad \sigma_y^2 = \frac{0,2468}{20} = 0,01234 \text{ (м/с)}^2;$$

$$\sigma_y = \sqrt{0,01234} \approx 0,11 \text{ м/с}; \qquad \upsilon_y = \frac{0,11}{1,2} 100\% \approx 9,2\%;$$

$$\bar{y} \pm \sigma_y = (1,2 \pm 0,11) \text{ м/с}.$$

Порівнюючи дані, наведені в табл. 2.13 і 2.14 можна зробити висновок, що показники обох спортсменів у швидкості плавання досить стабільні й склали для першого 5,5 %, а для другого – 9,2%. Отже, результати першого плавця більш стабільні порівняно з другим.

Методом середніх величин можна здійснити нормування. **Норма** є гранично припустимою межею досліджуваного явища, у рамках якого воно є оптимальним.

У практиці спорту до числа норм можна віднести *розрядні норми* спортсменів. Також прийнято розрізняти норми порівняльні, індивідуальні, належні, вікові. *Порівняльні норми* визначають класифікацію спортсменів в одному виді спорту. *Індивідуальні норми* порівнюють показники того самого спортсмена в різних станах. *Належні норми* визначають, що повинен показати спортсмен для реалізації того чи іншого результату. *Вікові норми* класифікують показники відповідно до віку.

Слід зазначити, що розробка різних норм у фізичній культурі і спорті є досить перспективною. До неї відносять: зміцнення здоров'я, профілактику інфекційних захворювань, розвиток дитячого організму, підготовку юнаків до військової служби та ін.

Метод середніх величин вирішує це завдання в першому наближенні: якщо вихідну групу чисел, що є результатом спостереження в ході експерименту, прийняти за вихідну статистичну сукупність, то обробку її методом середніх величин, що приводить до ядра групи у вигляді $\bar{\chi} \pm \sigma$, можна трактувати як оптимальний показник сукупності, тобто як норму.

Так, наприклад, величина поглинання кисню під час спортивної роботи (л/хв.) позначена через x_i. Слід проаналізувати норму поглинання кисню за показниками спостережень за тридцятьма спортсменами (табл. 2.15).

Таблиця 2.15

Обробка результатів норми поглинання кисню 30 спортсменами

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 n_1$
1	4,0	2	8,0	–0,4	0,16	0,32
2	4,2	6	25,2	–0,2	0,04	0,24
3	4,3	8	34,4	–0,1	0,01	0,08
4	4,5	7	31,5	0,1	0,01	0,07
5	4,6	4	18,4	0,2	0,04	0,16
6	4,8	3	14,4	0,4	0,16	0,48
Усього	–	30	131,9		–	1,35

$$\bar{\chi} = \frac{131{,}9}{30} \approx 4{,}39 \approx 4{,}4 \text{ л/хв.}; \qquad \sigma_{\chi}^2 = \frac{1{,}35}{30} \approx 0{,}045 \text{ (л/хв.)}^2;$$

$$\sigma_{\chi} = \sqrt{0{,}045} \approx 0{,}2 \text{ л/хв.}; \quad \upsilon_{\chi} = \frac{0{,}2}{4{,}4} 100\% \approx 4{,}5\%;$$

$$\bar{\chi} \pm \sigma_{\chi} = (4{,}4 \pm 0{,}2) \text{ л/хв.}$$

На підставі цих показників можна зазначити, що для спортсменів даної кваліфікації під час виконання спортивної роботи нормою поглинання кисню може бути величина $\bar{\chi} \pm \sigma_{\chi} = (4{,}4 \pm 0{,}2)$ л/хв., тобто норма в межах від 4,2 до 4,6 л/хв.

Аналізуючи показники, наведені в табл. 4.15, знаходимо, що в перших двох спортсменів показники споживання кисню під час спортивної роботи склали 4,0 л/хв. (рядок 1), тобто вони поглинають кисню менше за норму, а три спортсмени (рядок 6) поглинають кисень 4,8 л/хв., що вище за норму. Норму можна взяти за основу, тому що результати групи досить однорідні – коефіцієнт варіації V_x = 4,5%.

За допомогою методу середніх величин також можна здійснити первинну класифікацію даних. За основу класифікації варто приймати показники $\bar{\chi} \pm \sigma_x$. У цьому випадку перша класифікаційна група становить елементи, що відповідають нормі $\bar{\chi} \pm \sigma_x$, друга – нижче за норму, а третя – вище за норму.

Якщо потрібно класифікувати вихідні дані більше ніж на три групи, то групи, знайдені наведеним вище способом, розглядаються як вихідний варіаційний ряд, що знову поділяється на три групи: норма, нижче за норму й вище за норму. Таким чином, можна й надалі здійснювати подібне, дробити отримані ряди, утворюючи нові класифікаційні групи, що кратні трьом.

Наприклад, у ході тренувального процесу група з 25 боксерів показала час диференційованої (виборчої) реакції x_i (мс). Проведемо класифікацію спортсменів за швидкістю реакції (табл. 2.16):

Таблиця 2.16

Обробка результатів швидкості реакції боксерів

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \overline{\chi}$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2 n_1$
1	500	1	500	–57	3249	3249
2	520	5	2600	–37	1369	6845
3	550	8	4400	–7	49	392
4	570	7	3990	13	169	1183
5	600	2	1200	43	1849	3698
6	620	9	1240	63	3969	7938
Усього	–	25	13 930	–	–	23 305

$$\overline{\chi} = \frac{13930}{25} = 557{,}2 \approx 557 \text{ мс}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{23305}{25} = 932{,}2 \text{ мс}^2;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{932{,}2} \approx 30{,}53 \text{ мс}; \quad \upsilon_\chi = \frac{31}{557} 100\% \approx 5{,}6\%;$$

$$\overline{\chi} \pm \sigma_\chi = (557 \pm 31) \text{ мс}.$$

Параметри (557 ± 31) мс свідчать про те, що боксери, в яких час реакції перебуває в інтервалі від 526 до 588 мс, становлять групу типових представників диференційованої реакції для спортсменів даної кваліфікації. Орієнтуючись на вихідні дані табл. 2.16, до них можуть бути віднесені 15 боксерів (рядки 3 і 4). Нижче норми виявилися результати 6 боксерів (рядки 1 і 2), а вище норми – результати 4 боксерів (рядки 5 і 6). Зробимо висновок, що чим менший час реакції боксера, тим вища його кваліфікація.

Отже, показники швидкості реакції боксерів можна подати у вигляді 3-х груп: 1) вище за норму (найшвидші) – 4 спортсмени; 2) відповідає нормі – 15 спортсменів; 3) нижче за норму – 6 спортсменів.

Крім того, кожну отриману групу можна класифікувати більш детально, здійснюючи подальший поділ груп, які будуть розглядатися як вихідний варіаційний ряд.

2.3. Вибірковий метод

2.3.1. Основні поняття вибіркового методу

Вибірковий метод – один з головних методів спортивної статистики, що включає такі основні поняття, як генеральна сукупність і вибіркова сукупність.

Генеральна сукупність – це найбільш загальна характеристика сукупності об'єктів, об'єднаних однією ознакою (наприклад, усі спортсмени України; усі футболісти м. Києва; усі школярі, які займаються спортом тощо).

Вибіркова сукупність (вибірка) – це відібрана частина елементів генеральної сукупності, що представляє всю сукупність із прийнятною точністю (наприклад, збірна країни з футболу стосовно всіх висококваліфікованих футбольних команд тощо). Вибірковий метод базується на двох основних умовах.

По-перше, оскільки генеральна сукупність має великий обсяг, то вона не досліджується повністю, а вивчається за допомогою вибірки, тобто результати дослідження переносяться на генеральну сукупність з урахуванням особливостей переносу. У цьому випадку головне завдання полягає в тому, щоб правильно зробити вибірку, що повинна коректно репрезентувати (тобто представляти) генеральну сукупність.

По-друге, дослідницька робота зосереджується на вивченні вибірок, що порівнюються попарно. Головна проблема зводиться до прояснення ситуації: чи є вибірки вибраними з однієї чи з декількох генеральних сукупностей.

Ці умови мають пряме відношення до ФКіС. Для вчених, що займаються проблемами спорту, важливим є дослідження генеральної сукупності, що відображає діяльність великих колективів спортсменів через вибірки. Тренери й учителі фізичної культури зацікавлені в порівнянні вибірок, тому що вони працюють, зазвичай, із групами спортсменів.

З метою викладу суті вибіркового методу розглянемо два розділи статистики: 1) елементи теорії ймовірностей і 2) нормальний закон розподілу.

2.3.2. Елементи теорії ймовірностей

В основі теорії ймовірностей лежить випадкове явище, що за певних обставин може відбутися, а може й не відбутися. Теорія ймовірностей вивчає ці випадкові явища в масовому порядку, що ріднить її зі статистикою, що теж вивчає масові явища. При багаторазовому повторенні випадкових явищ можна виявити й математично виразити закономірність їхнього виникнення.

Наведемо кілька прикладів, які за теорією ймовірностей розглядаються як класичні.

Народження дитини в родині не є несподіванкою, однак стать немовляти до його народження була невідомою (до появи ультразвукового обстеження). Дослідження австрійського вченого Ф.Чубера, проведені з 1866 по 1905 р., визначили, що народження хлопчиків по відношенню до дівчаток становить 51 %, тобто на кожну сотню немовлят народжується 51 хлопчик.

У великих містах масовими стали такі явища, що становлять закономірності: придбання певних товарів, завантаженість телефонних ліній, поява людей на центральних вулицях тощо. До ідеальної моделі випадкового явища також відносяться азартні ігри.

Наприклад, якщо підкинути монету вгору, то її падіння «орлом» відповідно до теорії ймовірностей дорівнює числу падінь монети «решкою».

Під час гри в кості кожна зі сторін має рівні шанси випасти, тому ймовірність появи кожної грані визначається як 1 до 6.

До числа класичних прикладів теорії ймовірностей належать також завдання з кулями. Її зміст полягає в тому, що з непрозорої посудини одна за одною дістають кулі, які мають однакову масу й розмір, але різні за кольором, відгадуючи їхній колір. На цьому прикладі розглянемо основне поняття теорії ймовірностей – *імовірність.*

Приклад. У непрозорій посудині містяться 10 однакових за розміром та масою, але різні за кольором кулі: 5 білих, 3 червоних, 2 синіх.

З посудини вийняли одну з куль. Яка ймовірність того, що ця куля буде червоною?

Проаналізуємо умови прикладу. Усього куль у посудині 10, причому кожна з них має рівні шанси бути вийнятою першою. Наявність рівних шансів визначає ця подія (а саме вийняти кулю певного кольору) як рівноможлива. Таким чином, у цьому прикладі є 10 однакових подій: 5 подій відповідають можливості вийняти білу кулю, тому вони названі подіями, сприятливими появі білої кулі; 3 події є сприятливими для появи червоної кулі, а 2 події супроводжують появу синьої кулі.

Тепер поставимо перед собою мету – визначимо чисельну міру можливої появи кулі певного кольору. Така міра називається ймовірністю й позначається як *P(A), P(B), P(C)* і т.д., де *P* є ймовірність появи події, а букви *A, B,* С і т.д. символічно позначають певну подію.

Число, що виражає міру об'єктивної можливості настання випадкової події, називається **ймовірністю.**

Ймовірність визначається як відношення числа випадкових подій ***m**, які* сприяють даному до загального числа однакових подій ***n:***

$$\boldsymbol{P(A) = m/n,} \tag{2.7}$$

де *P(A)* – імовірність появи події ***A; m*** – число подій, які сприяють появі події ***A; n*** – число однакових подій.

Так, у прикладах з кулями

$$P(A) = m/n = 5/10,$$

т.б. імовірність появи білої кулі *(A)* складе *P(A)* = 0,5.
Імовірність появи червоної кулі *(B)*

$$P(B) = m/n = 3/10 = 0{,}3$$

Ймовірність появи синьої кулі (С)

$$P(З) = m/n = 2/10 = 0{,}2.$$

Варто звернути увагу на те, що ймовірність не може перевищувати 1. Це пояснюється змістом формули (4.7): сприятливих подій не може бути більше, ніж рівноможливих. Крайньою подією є така, коли всі розглянуті кулі є кулями одного кольору, наприклад, у непрозорій посудині знаходиться 10 куль, і всі вони білі. У цьому випадку число подій, які сприяють для вибору білої кулі, буде *m* – 10, а рівноможливих відповідно *n* = 10. Імовірність появи білої кулі

$$P(A) = m/n = 10/10 = 1; \qquad P(A) = 1.$$

Такі події прийнято називати **достовірними.**. Імовірність достовірних подій дорівнює 1.

Розглянемо випадок, коли в посудині взагалі немає кулі даного кольору і сприятлива їй подія *m* = 0. Так, у наведеному вище прикладі немає кулі зеленого кольору *(D),* сприятлива їй подія *m* – 0, тому ймовірність її появи

$$P(D) = m/n = 0/10; P(D) = 0.$$

Такі події прийнято називати **неможливими**. Імовірність неможливих подій дорівнює 0.

Виходячи із двох крайніх положень – достовірної події з імовірністю 1 і неможливої події з імовірністю 0, – можна зазначити, що чисельна величина будь-якої випадкової події перебуває в межах від 0 до 1, тому

$$0 < P(A) < 1,$$

де *P(A)* – імовірність випадкової події.

Поняття про цей інтервал надзвичайно важливе для практичного використання ймовірності. Якщо ймовірність перебуває в межах від 0 до 1, то чим ближче реально одержувана ймовірність до 1, тим вищою є можливість походження досліджуваної події, і навпаки, чим ближча ймовірність до 0, тим менше можливість її появи.

Так, імовірність появи «орла» або «решки» у прикладі з підкиданням монети вгору дорівнює:

Р («орел») = 1/2 = 0,5;

Р («решка») = 1/2 = 0,5.

Виходячи з того, що при одному підкиданні є дві однакові події й по одному сприятливий, імовірність виражається у відсотках. Оскільки відсоток є сотою частиною числа, все число дорівнює 100 %. Уявимо, що 100 % відповідають одній частині, що відбиває максимальну ймовірність появи події. Тоді ймовірність появи події виражається від 0 до 100 %, і подія з появою «орла» або «решки» відповідає 50 % від можливого.

Вираженням імовірностей у відсотках можна підкреслити, що інтервал імовірності від 0 до 1 є весь можливий вияв випадкової події, а його конкретна ймовірність, обумовлена за формулою (2.7), посідає певне місце в цьому полі й тому може бути оцінена. Наприклад, імовірність появи білої кулі в прикладі становить 50 % від можливого, червоної – 30 %, а синьої – 20 %.

Слід зазначити, що точність відбиття дійсної ймовірності формулою (2.7) залежить від багаторазовості повторення випадкової події, тому що теорія ймовірностей, як і статистика, дає точніші результати тоді, коли має більший обсяг випробувань.

Вище було зазначено, що існують різні види ймовірностей:

- *достовірною* називається подія *P(A)* = 1, що в експерименті обов'язково відбудеться;
- *неможливою* є подія *P(A)* = 0, що в експерименті ніколи не відбудеться;
- дві події, одна з яких обов'язково відбудеться, але її настання виключає поява іншої, називаються *протилежними* (наприклад, народження дитини певної статі);
- події *А, В, С, …* називаються *єдино можливими,* якщо одна з них обов'язково відбудеться, коли результат стане відомим (наприклад, при однократному підкиданні монети вгору подія «орел» або «решка» обов'язково відбудеться й виключить появу іншої події);
- дві події називаються *несумісними,* якщо одна подія виключає іншу (наприклад, досягнення або недосягнення певного спортивного результату з однієї спроби – події *А* і *В*. Ці події несумісні, тому що в результаті однієї спроби досягнення або можна здійснити, або не можна);
- якщо в деякому випробуванні події *А, В, С, …* є єдино можливими й несумісними, то вони утворять *повну систему подій* (наприклад, при одному пострілі буде уражене певне коло мішені. Всі кола мішені є повною системою подій, тому що вони єдино можливі й несумісні).

Дві протилежні події також являють собою повну систему подій. Особливістю повної системи подій є те, що сума їхніх ймовірностей дорівнює 1. У цьому змісті знову розглянемо приклад про кулі. Поява куль трьох кольорів становить повну систему подій, тому що ці події є єдино можливими і в той же час несумісними. Отже, сума їхніх імовірностей повинна дорівнювати 1, тому:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1.$$

Ще раз нагадаємо, що всі висновки теорії ймовірностей справедливі за умови масового вивчення випадкових явищ.

2.3.3. Закон нормального розподілу

Розподіл є співвідношенням елементів сукупності з частотою їхньої появи. Співвідношення може бути представлене в таблиці, на графіку або виражене формулою. У найпростішому вигляді розподіл виглядає як полігон.

Наприклад. Розглянемо результати вимірів гнучкості 30-ти спортсменів. Амплітуда нахилів – x_i, (мм) (табл. 2.17).

Таблиця 2.17

Обробка результатів вимірів амплітуди нахилів

№ п/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 n_1$
1	30	1	30	–12	144	144
2	36	2	72	–6	36	72
3	40	9	360	–2	4	36
4	42	7	294	2	4	28
5	45	6	270	3	9	54
6	48	5	240	6	36	180
Усього	–	30	1266	–	–	514

$$\bar{\chi} = \frac{1266}{30} \approx 42{,}2 \approx 42 \text{ мм}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{574}{30} = 17{,}133 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{17{,}133} \approx 4{,}14 \approx 4 \text{ мм}; \qquad \bar{\chi} \pm \sigma_\chi = (42 \pm 4) \text{ мм}.$$

На підставі даних, наведених у табл. 4.17 побудуємо полігон (рис. 2.1).

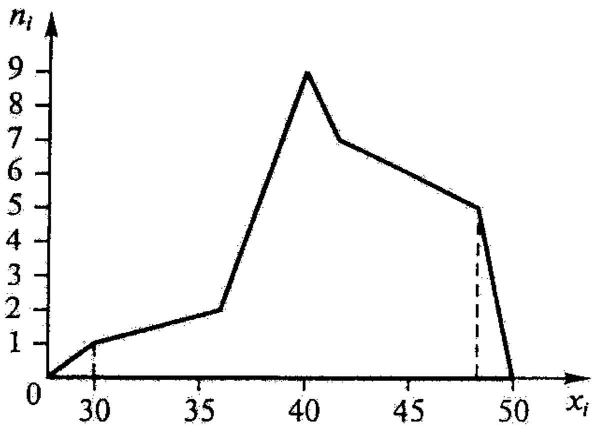

Рис. 2.1. Полігон розподілу (див. табл. 2.17)

Полігон виражає співвідношення між показниками амплітуди нахилу **x**ᵢ і частотою їх появи n_i. Таке співвідношення називається *практичним розподілом.* Воно отримане в результаті експериментальних спостережень.

Почнемо перетворення полігона (див. рис. 2.1). Насамперед відзначимо, що частота появи події n_i може розглядатися як число, яке сприяє появі події x_i, а рівноможливим можна представити обсяг сукупності, у цьому випадку $n = 30$. Таким чином, шкала ординат може бути виражена ймовірностями появи x_i, тобто:

$$P(x_i) = n_i/n \tag{2.8}$$

Від такого подання полігон не зміниться, іншим буде тільки масштаб шкали n_i..

Потім представимо, що спортсменів, яких досліджують на гнучкість, було дуже багато, і кожне з представлених на шкалі x_i мало б свою частоту. У цьому випадку крапки на графіку дуже тісно прилягали б одна до одної, утворюючи суцільну плавну криву. Ця крива в принципі відбила б факт співвідношення величин x_i і n_i – для випадку, коли всі можливі x_i прийняті до уваги. Такий розподіл називається *теоретичним розподілом.* Він являє собою закономірність співвідношення між показниками x_i і n_i.

Математична статистика надає в розпорядження дослідника теоретичні розподіли, виражені мовою математики, властивості якої можуть бути використані на практиці.

Для практичних досліджень такі розподіли потрібні при вирішенні двох завдань.

По-перше, установивши, що емпіричний розподіл відповідає певному теоретичному, представляється можливим використовувати відомі й апробовані властивості теорії на практиці. У цьому випадку проблема полягає в тому, щоб установити й довести схожість емпіричного й теоретичного розподілів. По-друге, за допомогою точного теоретичного розподілу можливо встановити ймовірнісне положення конкретної одиниці сукупності стосовно усіх інших одиниць. У силу цих двох завдань теоретичні розподіли мають істотне значення для практичних досліджень.

Відомо близько двадцяти теоретичних розподілів. Одні з них відбивають співвідношення рідких і маловивчених явищ, інші – рівномірність виникнення одиниць сукупності й т.д.

Найпоширенішим, добре вивченим і практично корисним розподілом прийнято вважати нормальний розподіл, що відображає *крива Гауса,* відома як *нормальний закон.*

Зміст цього розподілу полягає в тому, що він відбиває масові однотипні явища – саме такі, які розглядає статистика. Основою цього розподілу є *закон великих чисел,* доведений теоремою А.А. Ляпунова.

Інакше кажучи, розглядаються випадкові величини, на які впливає безліч незалежних факторів. Фактори впливають на величину по-різному, але якщо їх досить багато, то окремі впливи взаємно погашаються й середня випадкових величин практично не відхиляється від постійного значення.

Зміст теореми А.А. Ляпунова полягає в тому, що на випадкові величини одночасно впливає безліч незалежних факторів, дія яких окремо значно менше їхньої сумарної дії, вони розподіляються відповідно до нормального закону. Таким чином, якщо на якусь випадкову величину діє безліч чинників, що не мають очевидних переваг за ступенем впливу на цю величину, варто очікувати нормального закону розподілу.

Розглянемо сам розподіл. Ідея нормального розподілу полягає в тому, що безліч одиниць сукупності розподіляється таким чином, щоб біля середньої арифметичної була сконцентрована найбільша кількість одиниць, біля великих або малих значень – мінімальна кількість одиниць, а всі інші одиниці повинні відповідати кривій Гауса (рис. 2.2).

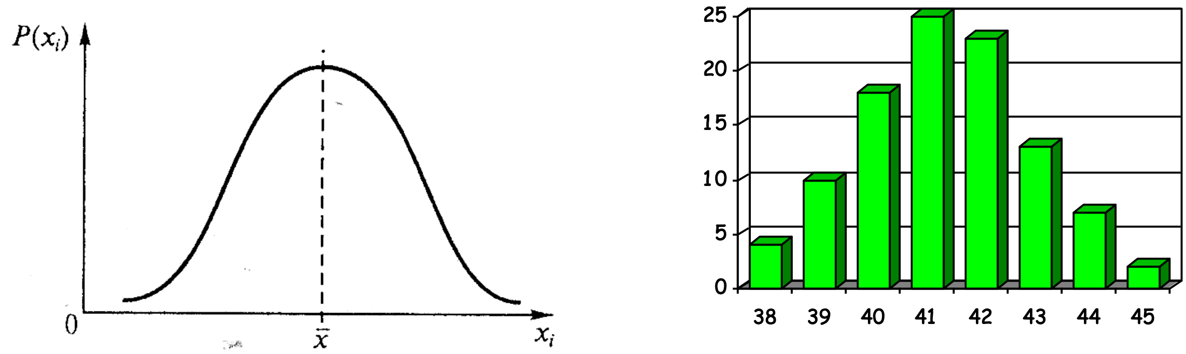

Рис. 2.2. Крива Гауса та графік нормального розподілу

Нормальний закон розподілу являє собою окремий випадок розподілу, коли $\bar{\chi}$ = 0, а σ = 1. У цьому випадку $\bar{\chi}$ = 0 і вісь ординат проходить через $\bar{\chi}$.

Розглянемо властивість нормального закону розподілу.

1. Від величини $\bar{\chi}$ залежить положення кривої: зі збільшенням (зменшенням) $\bar{\chi}$ крива буде зрушуватися вправо (уліво) уздовж осі абсцис, при цьому її форма відповідно не змінюється.

2. Від величини середнього квадратичного відхилення **σ** залежить форма кривої: чим середнє квадратичне відхилення **σ** більше, тим нижча й ширша крива; чим середнє квадратичне відхилення **σ** менше, тим вища й тонша крива (рис. 2.3).

3. Формула нормальної кривої така:

$$P(\chi_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(\chi_i - \bar{\chi})}{2\sigma^2}}, \qquad (2.9)$$

де $P(\bar{\chi}_i)$ – ординати кривої; x_i – – абсциси кривої; $\bar{\chi}$ – середня арифметична величина; σ – середнє квадратичне відхилення; е – основа натуральних логарифмів.

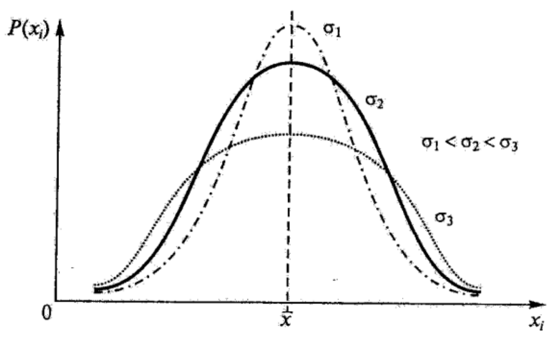

Рис. 2.3. Крива Гауса при різних величинах дисперсії

Параметри $\overline{\chi} = 0$ і $\sigma = 1$ показують нормовану криву, тому її формула має вигляд

$$P(\chi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi_i^2}{2}} \tag{2.10}$$

При побудові кривої за емпіричним даними формула буде такою:

$$P(\chi_i) = \frac{kn}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \tag{2.11}$$

де k – величина інтервалу у варіаційному ряді; n – обсяг сукупності; t – нормоване відхилення.

Нормоване відхилення знаходимо за формулою:

$$t = \frac{\chi_i - \overline{\chi}}{\sigma}. \tag{2.12}$$

У деяких завданнях нормальний розподіл подається у вигляді так званих z–оцінок. У цьому випадку на осі ординат відкладаються величини нормованих відхилень (рис. 2.4).

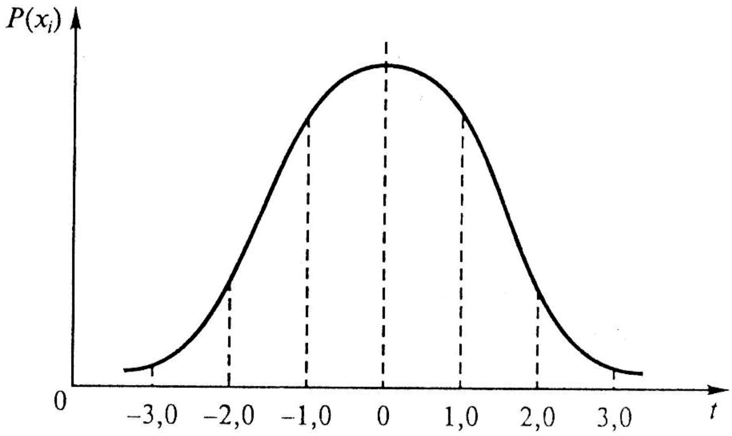

Рис. 2.4. Нормальний розподіл (z-оцінки)

2.3.4. Організація вибірки

Як зазначалося вище, вибірковий метод допускає дослідження не всієї генеральної сукупності, що надзвичайно важко, а іноді й неможливо, а деякої її репрезентативної (представницької) частини,що називається вибіркою. Перше завдання вибіркового методу зводиться до того, щоб організувати вибірку.

Тут домінує принцип, відповідно до якого необхідно забезпечити всім об'єктам генеральної сукупності рівною мірою бути вибраним у вибірку. Установлено, що при такому підході до організації вибірки й при досить великому обсязі вибірки параметри останньої прагнуть до параметрів генеральної сукупності.

Теоретичною основою вибіркового методу є *теорема П. Л. Чебишева,* відповідно до якої з імовірністю як завгодно близької до одиниці (вірогідності) можна стверджувати, що при досить великому обсязі вибірки різниця між вибірковою середньою $\bar{\chi}$ й генеральною середньою $\bar{\chi}_{ген}$ буде як завгодно мала.

Організацію вибірки можна здійснити за допомогою чотирьох відборів.

1. *Власне-випадковий відбір.* З генеральної сукупності відбираються одиниці вибірки випадково (відповідно до жеребкування або за таблицею випадкових чисел).

Таблиця випадкових чисел являє собою послідовність чисел, кожне з яких має рівні шанси бути обраним. Випадковість розташування чисел полягає у відсутності закону, що визначає їхнє розташування, і водночас у приблизно рівній частоті кожного числа.

Принцип відбору одиниць вибірки за таблицею випадкових чисел полягає в наступному:

– всі одиниці генеральної сукупності нумеруються;

– з таблиці випадкових чисел виписуються підряд (вертикально або горизонтально) числа, кількість яких необхідна для організації вибірки. Виписані числа є номери одиниць генеральної сукупності, які входять у вибірку.

2. *Механічний відбір.* Генеральна сукупність поділяється на стільки груп, скільки одиниць повинно ввійти у вибірку. З кожної групи довільно вибирається одна одиниця, що і входить у вибірку. Таблиця випадкових чисел за М.В. Смирновим і І.В. Дуніним–Барковським (1965) наведена у додатку 1.

3. *Типовий відбір.* Генеральна сукупність поділяється на довільну кількість рівноцінних груп. Потім з кожної групи відбирається одна (або декілька) одиниць за принципом власне-випадкового відбору (див. відбір 1). Наприклад, обстежуючи генеральну сукупність, що складається з баскетболістів м. Києва розглядаємо всі баскетбольні команди однієї кваліфікації, а потім для поглибленого дослідження можливостей гравців з кожної команди відбираємо по одному спортсмену. Таким чином, вибірка за чисельністю буде дорівнювати кількості баскетбольних команд.

4. *Серійний (гніздовий) відбір.* У цьому випадку відібраними в генеральну сукупність одиницями є групи. Генеральна сукупність ділиться на велику кількість груп, які розглядаються як одиниці. Групи відбираються за принципом власне випадкового відбору (див. відбір 1) або за допомогою механічного відбору (див. відбір 2). Так, у наведеному прикладі (див. відбір 3) обраною може бути одна або кілька баскетбольних команд м. Києва. Точність показників у цьому випадку буде залежати від того, наскільки близько середні показники груп будуть підходити до середніх показників генеральної сукупності.

2.3.5. Визначення показників генеральної сукупності

У визначенні завдання на визначення показників генеральної сукупності передбачається, що генеральна сукупність відповідає нормальному закону розподілу, тому може бути повністю відображена показниками середньої арифметичної ($\bar{\chi}$ ген) і середнього квадратичного відхилення (σ ген).

Середнє арифметичне генеральної сукупності визначається на основі показників вибірки й відображається таким чином:

$$\bar{\chi}_{виб} - mt \le \bar{\chi}_{ген} \le \bar{\chi}_{виб} + mt,$$

де $\bar{\chi}$ ген – середня арифметична генеральної сукупності; $\bar{\chi}$ виб – середня арифметична вибірки; m – помилка репрезентативності (стандартна помилка); t – критерій вірогідності (критерій надійності). Показник надійності t визначається за таблицею додатка 2, за числом ступенів волі k, що дорівнює числу елементів вибірки мінус одиниця, тобто $k = n - 1$. Для визначення довірчих границь $\bar{\chi}$ ген необхідно провести розрахунки відповідно до формул (2.13.)... (2.16.).

Величини $\bar{\chi}$ виб – mt і $\bar{\chi}$ виб + mt називаються *нижніми* і *верхніми довірчими границями.*

Величини m и t варто пояснити, виходячи з основної ідеї вибіркового методу: якщо коректно скласти вибірку, то її показники правильно представляють генеральну сукупність. Так, зокрема, з однієї генеральної сукупності може бути вибрана безліч вибірок. Установлено, що середні показники цих вибірок відрізняються між собою практично на ту саму величину. Крім того, середні показники генеральної сукупності відрізняються від вибіркових на цю ж величину m.

Помилка репрезентативності (m) вказує на розходження між генеральною й вибірковою середньою сукупністю. *Критерій* (t) – це показник імовірності (надійності), відповідно до якого можна стверджувати, що розходження між середніми показниками генеральної й вибіркової сукупності не перевищує величину помилки m.

Відзначимо, що в практиці спортивних досліджень діють таким чином: знаходять заздалегідь певну надійність, за якої дослідник задоволений точністю розрахунку. Як правило, це надійність $P = 0{,}95$.

Оскільки ймовірність не може бути більше $P = 1{,}0$, прийнято використовувати не тільки поняття надійності P, але й величину $\alpha = 1 - P$, що показує рівень значущості.

Таким чином, практика спортивних розрахунків ґрунтується на надійності $P \ge 0{,}95$ при рівні значущості $\alpha \le 0{,}05$. Це означає, що спортивні розрахунки, як правило, задовольняються точністю, за якої на кожні 100 випробувань 5 можуть бути неточними.

Помилка репрезентативності (m) знаходиться за поданими нижче формулами 2.13-2.16.

$$m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n}}. \qquad (2.13)$$

Формула (2.13.) застосовується у випадку, коли число елементів генеральної сукупності невідоме ($N = \infty$), а число елементів вибірки $n \ge 20$:

$$m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n-1}}. \qquad (2.14)$$

Формула 2.14 застосовується, коли число елементів генеральної сукупності невідоме ($N = \infty$), а число елементів вибірки $n < 20$:

$$m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}}. \tag{2.15}$$

Формула 2.15 використовується, якщо вибірка велика, тобто $n \geq 20$, а число елементів N генеральної сукупності відоме:

$$m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{N-n}{N-n}}. \tag{2.16}$$

Формула 2.16 використовується, якщо вибірка мала, тобто $n < 20$, а число елементів генеральної сукупності відоме як N.

Для визначення довірчих границь середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності ($\sigma_{ген}$) використовують метод порівняння

$$\sigma_{виб}(1 - q) \leq \sigma_{ген} \leq \sigma_{виб}(1 + q),$$

де $\sigma_{виб}$ – середнє квадратичне відхилення вибірки; q – величина, що визначається за таблицею додатка 3.

При $q < 0$ порівняння перетвориться в такий спосіб:

$$0 \leq \sigma_{ген} \leq \sigma_{виб}(1 + q).$$

Розглянемо конкретний приклад. Група спортсменів у кількості 30 осіб *(n)* досліджувалась на величину поглинання кисню під час тривалої роботи x_i (л/хв). Випробувані відібрані з 300 спортсменів N тієї ж кваліфікації.

Необхідно оцінити середні показники 300 спортсменів. Вихідні дані наведені в табл. 2.18.

Таблиця 2.18

Обробка показників поглинання кисню 30 спортсменами

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \overline{\chi}$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2 n_1$
1	4,0	5	20,0	–0,3	0,09	0,45
2	4,2	6	25,2	–ОД	0,01	0,06
3	4,3	8	34,4	0,0	0,00	0,00
4	4,5	4	18,0	0,2	0,04	0,16
5	4,6	4	18,4	0,3	0,09	0,36
6	4,7	3	14,1	0,4	0,16	0,48
Усього	–	30	130,1	–	–	1,51

$$\overline{\chi}_{виб} = \frac{130{,}1}{30} \approx 4{,}33 \approx 4{,}3 \text{ л/хв.}; \qquad \sigma^2_{виб} = \frac{1{,}51}{30} \approx 0{,}05\,(\text{л/хв.})^2;$$

$$\sigma_{виб} = \sqrt{0{,}05} \approx 0{,}22 \text{ л/хв.}$$

Характеристика вибірки з 30 спортсменів представляє $\overline{\chi}_{виб} \pm \sigma_{виб}$ = = (4,3 ± 0,2) л/хв.

Для оцінки генеральних показників визначимо величину помилки репрезентативності *m.* Оскільки в прикладі обсяг генеральної сукупності N = 300, а вибірка складається з n=30, тобто $n > 20$, для визначення помилки репрезентативності використовуємо формулу 2.16:

$$m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}} = \frac{0,2}{\sqrt{30}}\sqrt{1-\frac{30}{300}} \approx 0,03 \text{ л/хв.}$$

Показник t визначаємо за таблицею додатку 2. При надійності P = 0,95 (рівень значущості α = 0,05) і при числі ступенів волі $k = n - 1 = 30 - 1 = 29$, t = 2,05.

Для оцінки середнього квадратичного відхилення визначаємо q за таблицею додатка 3, де P = 0,95 (α = 0,05); n = 30; q = 0,28.

Оцінка генеральних показників наступна:

$$\bar{\chi}_{виб} - mt \le \bar{\chi}_{ген}\ \bar{\chi}_{виб} + mt;$$

$$4,3 - 0,03 \times 2,05 \le x_{ген} \le 4,3 + 0,03 \times 2,05;$$

$$4,3 - 0,06 \le \bar{\chi}_{ген} \le 4,3 + 0,06;$$

$$4,24 \le \bar{\chi}_{ген} \le 4,36;$$

$$\sigma_{виб}(1 - q) \le \sigma_{ген} \le \sigma_{виб}(1 + q);$$

$$0,2\ (1 - 0,28) \le \bar{\chi}_{ген} \le 0,2\ (1 + 0,28);$$

$$0,2 \times 0,72 \le \sigma_{ген} \le 0,2 \times 1,28$$

$$0,14 \le \sigma_{ген} \le 0,26.$$

Таким чином, група випробуваних з 30 спортсменів, що характеризується як $\bar{\chi}_{виб} \pm \sigma_{виб}$ = (4,3 ± 0,2) л/хв, дозволяє оцінити генеральну сукупність N з 300 спортсменів як

$$4,24 \le \bar{\chi}_{ген} \le 4,36;$$

$$0,14 \le \sigma_{ген} \le 0,26.$$

Довірчі границі можна визначити у випадку, якщо оцінку середніх показників генеральної сукупності потрібно виразити одним числом, тобто

$$\bar{\chi}_{ген} = \frac{4,24 + 4,36}{2} = 4,3 \text{ л/хв.};$$

$$\sigma_{ген} = \frac{0,14 + 0,26}{2} = 0,2 \text{ л/хв.}$$

У цьому випадку показники вибірки й генеральної сукупності збіглися, що свідчить про коректний підбір вибірки.

У цілому при характеристиці генеральної сукупності звичайно вказують на величини $\bar{\chi}_{ген}$; m, тобто $\bar{\chi}_{ген}$ = 4,3 л/хв, m = 0,03 л/хв.

Помилка репрезентативності показує, наскільки $\bar{\chi}_{ген}$ може відрізнятися від $\bar{\chi}_{виб}$ при надійності P = 0,95 (α = 0,05).

Інакше кажучи, аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок, що 30 випробуваних мають середню величину поглинання кисню під час тривалої роботи, що дорівнює 4,3 л/хв. Спортсмени в кількості 300 чоловік, із яких вибрані 30 випробуваних, також покажуть середню величину поглинання кисню під час тривалої роботи, що дорівнює 4,3 л/хв. Однак, стверджуючи це, ми помиляємося на 0,03 л/хв із імовірністю 0,95.

2.4. Поняття про статистичну вірогідність

Статистична вірогідність має істотне значення в розрахунковій практиці ФВіС. Раніше було зазначено, що з однієї й тієї ж генеральної сукупності може бути зроблено багато вибірок:

➢ якщо вони підібрані коректно, то й їх середній показник генеральної сукупності незначно відрізняються величиною помилки репрезентативності з урахуванням прийнятої надійності;

➢ якщо вони обираються з різних генеральних сукупностей, розходження між ними виявляється істотним. У статистиці розглядається порівняння вибірок;

➢ якщо вони відрізняються несуттєво, непринципово, незначно, тобто фактично належать до тієї самої генеральної сукупності, розходження між ними називається *статистично недостовірним.*

Статистично достовірним розходженням вибірок називається вибірка, що різниться значимо й принципово, тобто належить різним генеральним сукупностям.

У ФВіС оцінка статистичної вірогідності розходжень вибірок означає виконання низки практичних завдань. Наприклад, уведення нових методик навчання, програм, комплексів вправ, тестів, контрольних вправ, пов'язаних з їхньою експериментальною перевіркою, яка повинна показати, що випробувана група принципово відмінна від контрольної. Тому застосовують спеціальні статистичні методи, які називаються *критеріями статистичної вірогідності, що* дозволяють виявити наявність або відсутність статистично достовірного розходження між вибірками.

Усі критерії поділяються на дві групи: параметричні й непараметричні. *Параметричні критерії* передбачають обов'язкову наявність нормального закону розподілу, тобто береться до уваги обов'язкове визначення основних показників нормального закону – середньої арифметичної величини ***x*** і середнього квадратичного відхилення σ. Параметричні критерії є найбільш точними й коректними. *Непараметричні критерії* засновані на рангових (порядкових) відмінностях між елементами вибірок.

Наведемо основні критерії статистичної вірогідності, які використовуються в практиці ФВіС: критерій Стьюдента, критерій Фішера, критерій Вілкоксона, критерій Уайта, критерій Ван-дер-Вардена (критерій знаків).

Критерій Стьюдента названий на честь англійського вченого К. Госета (Стьюдент – псевдонім), що відкрив цей метод. Критерій Стьюдента є *параметричним,* використовується для порівняння абсолютних показників вибірок. Вибірки можуть бути різними за обсягом.

Критерій Стьюдента визначається так:

1. Знаходимо критерій Стьюдента ***t*** за формулою:

$$t = \frac{|\overline{\chi}_1 - \chi_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}, \tag{2.17}$$

де $\overline{\chi}_1$, $\overline{\chi}_2$ – середні арифметичні порівнюваних вибірок; m_1 m_2 – помилки репрезентативності, виявлені на підставі показників порівнюваних вибірок.

2. Практика у ФВіС показала, що для спортивної роботи досить прийняти надійність рахунку P = 0,95.

Для надійності рахунку: P= 0,95 (α = 0,05), при числі ступенів волі $k = (n_1 + n_2) - 2$ за таблицею додатка 2 знаходимо величину граничного значення критерію ($t_{гр}$).

3. На підставі властивостей нормального закону розподілу в критерії Стьюдента здійснюється порівняння t і $t_{гр.}$.

4. Робимо висновки:

– якщо $t \geq t_{гр.}$, то розходження між порівнюваними вибірками статистично вірогідне;

– якщо $t < t_{гр}$, то розходження статистично не вірогідно.

Для дослідників у галузі ФВіС оцінка статистичної вірогідності є першим кроком у вирішенні конкретного завдання: принципово або не принципово різняться між собою порівнювані вибірки. Наступний крок полягає в оцінці цього розходження з педагогічної точки зору, що визначається умовою завдання.

Розглянемо застосування критерію Стьюдента на конкретному прикладі.

У групі випробуваних у кількості 18 осіб оцінено ЧСС (уд./хв.) до x_i, і після y_i, розминки.

Оцінити ефективність розминки за показником ЧСС. Вихідні дані й розрахунки представлені в табл. 2.19 і 2.20.

Таблиця 2.19

Обробка показників ЧСС до розминки

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \overline{\chi}$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2 n_1$
1	150	1	150	–7	49	49
2	154	3	462	–3	3	9
3	156	5	780	–1	1	5
4	158	4	632	1	1	4
5	160	3	480	3	9	27
6	164	2	328	7	49	98
Усього	–	18	2832	–	–	192

$$\overline{\chi} = \frac{2832}{18} \approx 157{,}3 \approx 157 \text{ уд./хв.}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{192}{18} \approx 10{,}66 \text{ (уд./хв.)}^2;$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{10{,}66} \approx 3{,}26 \approx 3{,}0 \text{ уд./хв.}$$

Таким чином, до розминки показники групи склали:

$\overline{\chi} \pm \sigma_\chi = (157 \pm 3)$ уд./хв.

Таблиця 2.20

Обробка показників ЧСС після розминки

№ з/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	164	2	328	–5	25	50
2	166	3	498	–3	9	27
3	169	6	1014	0	0	0
4	170	3	510	1	1	3
5	172	2	344	3	9	18
6	174	2	348	5	25	50
Усього	–	18	3042	–	–	148

$$\bar{y} = \frac{3042}{18} = 169 \text{ уд./хв.}; \quad \sigma_y^2 = \frac{148}{18} \approx 8{,}22 \text{ уд./хв.}^2;$$

$$\sigma_y = \sqrt{8{,}22} \approx 2{,}87 \approx 3{,}0 \text{ уд./хв.};$$

Таким чином, після розминки показники групи склали $\bar{y} - \sigma_y = (169 \pm 3)$ уд./хв.

Тепер визначимо обидві помилки репрезентативності. Виявляється розходження між середніми показниками і якоюсь величезною генеральною сукупністю $N = \infty$, яка нам фактично невідома і з якої вибрана перша $x_{i,}$, а потім друга y_i вибірки.

Для визначення помилки використовуємо формулу (2.14), тому що число членів генеральної сукупності невідоме ($N = \infty$) і обсяг вибірки не великий (менш 20 елементів). Таким чином,

$$m_x = \frac{\sigma_\chi}{\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{18-1}} = \frac{3}{4{,}12} = 0{,}73 \text{ уд./хв.};$$

$$m_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{18-1}} = 0{,}73 \text{ уд./хв.}$$

Помилки в обох групах збіглися, тому що обсяги вибірок однакові (досліджується та сама група у різних умовах), а середні квадратичні відхилення склали $\sigma_x = \sigma_y = 3$ уд/хв.

Переходимо до визначення критерію Стьюдента:

$$t = \frac{|\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \frac{|\bar{\chi} - \bar{y}|}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} = \frac{|157 - 169|}{\sqrt{0{,}75^2 + 0{,}73^2}} = 11{,}62.$$

Задаємо надійність рахунку: $P = 0{,}95$.

Число ступенів волі $k = (n_1 + n_2) - 2 = 18 + 18 - 2 = 34$. За таблицею додатка 2 знаходимо $t_{гр} = 2{,}02$.

Статистичний висновок. Оскільки $t = 11{,}62$, а граничне $t_{гр}$ = = 2,02, то 11,62 > 2,02, тобто $t > /t_{гр}$, тому розходження між вибірками статистично вірогідне.

Педагогічний висновок. Установлено, що за показником ЧСС розходження між станом групи до й після розминки є статистично достовірним, тобто значущим, принциповим. Отже, за показником ЧСС можна зробити висновок, що розминка ефективна.

Критерій Фішера *є параметричним.* Він застосовується в порівнянні показників розсіювання вибірок. Це, як правило, означає порівняння за показниками стабільності спортивної роботи або стабільності функціональних і технічних показників у практиці фізичної культури й спорту. Вибірки можуть бути різновеликими.

Критерій Фішера визначається в такій послідовності:

1. Знаходимо критерій Фішера F за формулою:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \qquad (2.18)$$

де σ_1^2, σ_2^2 – дисперсії порівнюваних вибірок.

Умовами критерію Фішера передбачено, що в чисельнику формули (2.18.) перебуває більша дисперсія, тобто число F завжди більше одиниці.

2. Задаємо надійність рахунку: P = 0,95 – і визначаємо числа ступенів свободи для обох вибірок: $k_1 = n_1 - 1$; $k_2 = n_2 - 1$.

3. За таблицею додатка 2 знаходимо граничне значення критерію $F_{гр}$.

4. Порівняння критеріїв F *і* $F_{гр}$ дозволяє сформулювати висновки:

– якщо $F \geq F_{гр}$, то розходження між вибірками статистично вірогідне;

– якщо $F \leq F_{гр}$, то розходження між вибірками статистично недостовірне.

Наведемо конкретний приклад. Проаналізуємо дві групи гандболістів: x_i (n_1 = 16 чоловік) і y_i – (n_2 – 18 чоловік). Ці групи спортсменів досліджені на час відштовхування (с) при кидку м'яча у ворота. Чи однотипні показники відштовхування?

Вихідні дані й основні розрахунки представлені в табл. 2.21 і 2.22.

Таблиця 2.21

Обробка показників відштовхування
першої групи гандболістів

№ з/п	x_i	n_i	$x_i n_i$	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 n_1$
1	0,18	3	0,54	0,02	0,0004	0,0012
2	0,17	3	0,51	0,01	0,0001	0,0003
3	0,16	4	0,64	0,00	0,0000	0,0000
4	0,15	3	0,45	–0,01	0,0001	0,0003
5	0,14	2	0,28	–0,02	0,0004	0,0008
6	0,13	1	0,13	–0,03	0,0009	0,0009
Усього	–	16	2,55	–	–	0,0035

$$\bar{\chi} = \frac{2{,}55}{16} \approx 0{,}16 \text{ з}; \qquad \sigma_\chi^2 = \frac{0{,}0035}{16} \approx 0{,}0002 \text{ с}.$$

$$\bar{y} = \frac{2{,}74}{18} \approx 0{,}14 \text{ с}; \qquad \sigma_y^2 = \frac{0{,}0095}{18} \approx 0{,}0005 \text{ з}^2.$$

Визначимо критерій Фішера:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{0{,}0005}{0{,}0002} = 2{,}5.$$

Таблиця 2.22

Обробка показників відштовхування
другої групи гандболістів

№ з/п	y_i	n_i	$y_i n_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2 n_1$
1	0,18	3	0,54	0,05	0,0025	0,0075
2	0,14	5	0,70	0,01	0,0001	0,0005
3	0,13	б	0,78	0,00	0,0000	0,0000
4	0,12	2	0,24	–0,01	0,0001	0,0002
5	0,11	1	0,11	–0,02	0,0004	0,0004
6	0,10	1	0,10	–0,03	0,0009	0,0009
Усього	—	18	2,47	—	—	0,0095

Чисельник критерію $\sigma_y^2 = 0{,}0005$ с^2 > $\sigma_x^2 = 0{,}0002$ з^2. Задамо надійність P – 0,95 (α = 0,05) і визначимо числа ступенів свободи для кожної групи:

$$k_x = n_i - 1 = 16 - 1 = 15;$$
$$k_v = n_2 - 1 = 18 - 1 = 17.$$

За даними, представленими в таблиці додатка 7, знаходимо $F_{гр}$: $F_{гр} = 2{,}4$.

Звернемо увагу на те, що в таблиці додатка 7 перерахування чисел ступенів свободи як більшої, так і меншої дисперсії при наближенні до великих чисел стає грубішим. Так, числа ступенів свободи більшої дисперсії слідують у такому порядку: 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 20, 24 і т.д., а меншої – 28, 29, 30, 40, 50 і т.д.

Це пояснюється тим, що за умови збільшення обсягу вибірок, розходження F–*критерію* зменшуються й можна використовувати табличні значення, наближені до вихідних даних. Так, у прикладі k_v = 17 відсутня і можна прийняти найближче до нього значення k = 16, звідки й одержуємо $F_{гр}$ = 2,4.

Статистичний висновок. Оскільки критерій Фішера F = 2,5 > F = 2,4, вибірки різні і статистично вірогідні.

Педагогічний висновок. Значення часу відштовхування (с) під час кидка м'яча у ворота в гандболістів обох груп істотно різняться. Ці групи варто розглядати як різні.

Подальші дослідження повинні показати, у чому причина такого розходження.

Критерій Вілкоксона є *непараметричним.* Він застосовується для вибірок однакового обсягу при попарному порівнянні їхніх елементів.

Критерій Вілкоксона визначається так.

1. Задаємо надійність рахунку й визначаємо число ступенів свободи як $k = n - 1$, де n – кількість пар елементів обох груп. За таблицею додатка 4 знаходимо граничне значення $W_{гр}$.

2. Порівняння критеріїв W і $W_{гр}$ дозволяє зробити висновки:

– якщо $W \geq W_{гр}$, розходження між вибірками статистично недостовірні;

– якщо $W < W_{гр}$, розходження між вибірками статистично достовірно.

Для знаходження критерію Вілкоксона W використовують порядковий номер (ранг) різниці кожної пари елементів вибірок.

Наведемо конкретний приклад. Група ковзанярів показала час (с) бігу на 30 м: x_i – на початку й y_i – наприкінці серії тренувань. Чи ефективна серія тренувань?

Вихідні дані прикладу й основних розрахунків представлені в табл. 2.23.

Для знаходження W за таблицею додатка 4 зробимо наступні дії:

1. Визначимо різницю кожної пари вихідних значень із точною вказівкою її знака, тобто $x_i – y_i$.

Таблиця 2.23

Визначення ефективності тренування ковзанярів

№ з/п	x_i	y_i	$x_i – y_i$	W	$W(+)$	$W(–)$
1	4,15	4,12	0,03	3,5	3,5	—
2	4,17	4,20	–0,03	3,5	—	3,5
3	4,20	4,15	0,05	6,0	6,0	—
4	4,22	4,25	–0,03	3,5	—	3,5
5	4,24	4,26	–0,02	1,0	—	1,0
6	4,25	4,22	0,03	3,5	3,5	—
Усього	–	–	–	–	13,0	8,0

2. Усім різницям привласнимо ранги, тобто призначимо номери в порядку їхнього зростання. При цьому знак різниці не враховується.

У цьому прикладі найменше значення має різниця 0,02, тому що її ранг дорівнює одиниці. Потім за абсолютним значенням знайдемо ранг 0,03. Значень, що відповідають x_i, чотири (4,15; 4,17; 4,22 і 4,25) і вони одержують однаковий ранг, нарівно розділивши між собою місця один за одним 2, 3, 4 і 5, які належали б їм, якби вони були різними. Оскільки вони однакові, їхній ранг дорівнює (2 + 3 + 4 + 5)/4 = 3,5.

Таким чином, перші чотири ранги вже визначені.

Величина 0,05 за абсолютним значенням іде після 2, 3, 4 і 5, тому вона повинна мати ранг, рівний 6. Таким чином, у графі W (табл. 2.23) перебувають ранги всіх різниць без обліку їхнього знака.

Тепер урахуємо знаки. Із цією метою випишемо ранги позитивних різниць у графі $W(+)$, а негативних – у графі $W(–)$. Виписані ранги сумуємо – менша із цих сум є критерієм Вілкоксона. У цьому випадку W= 8,0.

Тепер задамо надійність рахунку: P= 0,95 (α = 0,05), якщо кількість порівнюваних пар дорівнює 6, – і за таблицею додатка 4 знайдемо граничне значення $W_{гр}$ = 1.

Статистичний висновок. Порівнювані вибірки статистично недостовірні, тому що $W = 8,0 > W_{гр} – 1,0$.

Педагогічний висновок. Порівнювані вибірки несуттєво різні, і тому можна зазначити, що група випробуваних провела неефективну серію тренувань.

Критерій Уайта *є непараметричним.* За допомогою цього критерію порівнюють дві різні за обсягом, але невеликі вибірки. Групи, що містять велику кількість пар, приводять до громіздких обчислень.

Критерій Уайта визначається в такий спосіб.

1. Задаємо надійність рахунку при двох обсягах вибірки n_1, і n_2..

2. За таблицею Уайта (див. додаток 5) знаходимо величину граничного критерію Уайта $T_{гр}$.

3. Порівняння критеріїв T і $T_{гр}$ дозволяє зробити висновки:

– якщо $T \geq T_{гр}$,, то розходження між порівнюваними групами статистично недостовірно;

– якщо $T < T_{гр}$, то розходження статистично вірогідно.

Розглянемо приклад, використовуючи критерій Уайта. Дві групи спортсменів (x_i) і (y_i) досліджувалися на гнучкість. У спортсменів вимірюється амплітуда нахилу (см). Порівняйте гнучкість спортсменів першої й другої груп.

Вихідні дані наведені в табл. 2.24.

Таблиця 2.24

Показники амплітуди нахилу
першої і другої груп спортсменів

№з/п	x_i	n_i		№з/п	y_i	n_i
1	32	2		1	30	1
2	33	1		2	31	2
3	35	2		3	32	3
4	37	2		4	35	1
5	38	1		5	36	1
6	40	1		6	38	2
Усього	–	9		Усього	–	10

Для визначення критерію Уайта перетворимо форму запису вихідних даних. Із цією метою випишемо в рядок показники групи x_i і групи y_i в порядку зростання. При цьому вводиться єдине ранжування, тобто розміщення всіх вихідних даних за порядком:

Ранги	**6**	**6**	**9**	**11**	**11**	**14,5**	**14,5**	**17**	**19**
x_i	32	32	33	35	35	37	37	38	40

Ранги	**1**	**2,5**	**2,5**	**6**	**6**	**6**	**11**	**13**	**17**	**17**
y_i	30	31	31	32	32	32	35	36	38	38

Для впевненості в правильному перетворенні варто підрахувати обсяг сукупності. Так у групі x_i – він дорівнює n_i = 9, а в групі y_i його значення відповідає n_2 = 10.

Тепер кожному значенню (як x_i, так і y_i) привласнюється ранг, тобто порядковий номер по зростанню. При цьому однакові числа одержують однакові ранги (тобто їхні місця підсумовуються й діляться навпіл).

Після того, як всі ранги призначені, треба їх скласти по $\mathbf{x}_i$ і y_i – тобто

$$T_x = 6 + 6 + 9 + 11 + 11 + 14{,}5 + 14{,}5 + 17 + 19 = 95;$$
$$Ty = 1 + 2{,}5 + 2{,}5 + 6 + 6 + 6 + 11 + 13 + 17 + 17 = 82.$$

Менша із цих сум є критерієм Уайта. У цьому прикладі критерієм Уайта буде T = 82. За таблицею визначення критерію Уайта (див. додаток 5) знайдемо граничне значення критерію $T_{гр}$ для надійності P = 0,95 більшого обсягу $n_г$ = 10 і меншого обсягу n_1 = 9. Воно відповідає критерію $T_{гр}$ = 65.

Статистичний висновок. Оскільки T = 82 > $T_{гр}$ = 65, розходження вибірок є статистично недостовірним.

Педагогічний висновок. Статистична невірогідність розходження представлених вибірок указує на те, що спортсмени обох груп (x_i і y_i) мають практично однакову гнучкість.

Критерій Ван-дер-Вардена (критерій знаків) є *непараметричним.* Він призначений для проведення попарного альтернативного порівняння й доцільний при вибірках великого обсягу.

Розглянемо послідовність застосування критерію Ван-Дер-Вардена.

1. Порівняємо попарно елементи вибірок, призначимо кожній парі відповідний знак: «+» у випадку поліпшення ознаки, «–» – погіршення, «0» – без змін.

2. Задаємо надійність P = 0,95 при кількості порівнюваних пар, наведених в умові завдання (без обліку нульових пар); за таблицею Ван-Дер-Вардена (див. додаток 6) визначимо граничне значення критерію $Z_{гр}$, що представляє собою якийсь інтервал, обмежений нижнім числом a й верхнім числом b, так що $Z_{гр}$ = |a...b|.

3. Зробимо висновки:

– якщо позитивний (+) або негативний (–) знак (залежно від умови завдання) входить в інтервал, розходження між вибірками статистично недостовірне;

– якщо вони виходять за межі інтервалу, розходження вірогідно.

Розглянемо приклад, використовуючи критерій Ван-Дер-Вардена. Для порівняння спортивних показників взято дві групи школярів по десять осіб у віці 10 років (x_i) та віці 11 років (y_i). Було проведено вимірювання й оброблено їхні показники часу з бігу на дистанцію 30 м. Чи істотно відрізняються результати в школярів у віці 10 і 11 років? Вихідні дані наведені в табл. 2.25.

Звернемо увагу на те, що поліпшення результату в цьому прикладі пов'язане зі зменшенням абсолютного значення числа: чим менший час забігу, тим кращий результат, якому й призначається знак «+». Згідно з даними, наведеними у табл. 2.25., $z(+)$ = 5; $z(–)$ = 3; $z(0) = 2$.

За таблицею додатка 6 при надійності P = 0,95 (α = 0,05) і числі пар 10 без двох нульових значень, тобто $n_i = n - 2 = 10 - 2 = 8$, визначимо граничне значення критерію $Z_{гр}$ = |1……7|. Цей інтервал указує на те, що кількість плюсів (або мінусів), що становить число від 1 до 7, указує на статистичну невірогідність.

У цьому прикладі кількість $z(+)$ = 5 поліпшених результатів уходить в інтервал від 1 до 7. Отже, розходження між поліпшенням і погіршенням результатів є статистично недостовірним.

Таблиця 2.25

Обробка показників часу забігу 30 м
у двох групах школярів

№ з/п	x_i	y_i	z
1	6,1	5,3	+
2	6,3	6,3	0
3	6,3	5,4	+
4	6,4	6,3	+
5	6,4	6,4	0
6	6,4	6,5	–
7	6,5	6,4	+
8	6,5	6,6	–
9	6,6	6,5	+
10	6,7	6,8	–

Статистичний висновок. Представлені вибірки різняться статистичною невірогідністю.

Педагогічний висновок. З віком результати школярів з бігу на дистанцію 30 м істотно не змінилися.

Отже, у визначенні статистичної вірогідності результати статистичних досліджень тим точніші, чим більша вибірка, від якої залежить закономірність досліджуваних явищ і яка коректно представляє генеральну сукупність.

2.5. Взаємозв'язок результатів вимірювань. Кореляційний аналіз

Функціональний і статистичний взаємозв'язки. Всілякі біологічні показники перебувають у певній залежності один від одного й умов навколишнього середовища. Ще Гіппократ відзначав, що між будовою тіла й схильністю до певних захворювань, між статурою й темпераментами людей існує помітний зв'язок.

У фізичній культурі й спорті, у спортивній команді та в організмі спортсмена теж існує багато взаємозв'язків між різними показниками. Наприклад, із збільшенням кількості людей, які займаються в будь-якому виді спорту підвищуються результати в цьому виді; ускладнення у взаєминах між гравцями однієї команди погіршує її результативність; з підвищенням інтенсивності навантаження у спортсмена підвищується пульс, збільшується швидкість кровотоку в працюючих м'язах, зменшуються в них енергетичні ресурси; регулярність тренувань, оптимально підібрані навантаження за їх видом, об'ємом й інтенсивністю поліпшують результати спортсмена тощо.

Вплив одних показників на інші може бути позитивним і негативним. Фахівець повинен добре розбиратися в таких взаємозв'язках у своїй галузі, усувати або зменшувати негативний вплив і вміти вчасно та в достатній мірі використовувати корисні взаємозв'язки.

Деякі методи математичної статистики можуть допомогти будь-якому фахівцеві виявити взаємозв'язки, розкрити їх особливості. Одним з таких методів є метод *кореляційного аналізу*. Він спрямований на те, щоб на основі статистичного матеріалу виявити факт впливу однієї ознаки на іншу, установити користь або шкоду цього впливу й оцінити впевненість в отриманих висновках.

У спортивних дослідженнях між досліджуваними показниками також часто виявляється взаємозв'язок (залежність), він буває двох видів: функціональний і статистичний.

Функціональний взаємозв'язок – це така залежність між показниками **X** й **Y**, при якій кожному значенню одного показника **X** відповідає строго певне значення іншого **Y**.

Наприклад, залежність між прискоренням твердого тіла й прикладеною до нього силою $a = F/m$ або між пройденим шляхом і швидкістю $S = V \cdot t$, між радіусом (R) і довжиною кола (L).

Функціональний зв'язок відбиває чітку однозначну залежність, при якій зміна будь-якого одного фактору неминуче призводить до однозначної зміни іншого. Подібні зв'язки характерні для "точних" наук.

Більш реальним є встановлення так званих *статистичних зв'язків*, або *кореляції*.

Статистичний взаємозв'язок – залежність, при якій одному значенню одного показника відповідає кілька значень іншого, тобто зміна однієї з величин тягне за собою зміну розподілу іншої. Кореляція. (від лат. співвідношення, зв'язок, відповідність).

Приклади статистичних зв'язків у ФВ і спорті, залежність між:

– вагою й ростом у навчальній групі студентів;

– спортивним результатом і силою ведучих груп м'язів;

– результатами спортсмена й кількістю тренувань;

– результатами тесту й спортивними результатами.

Основні задачі кореляційного аналізу:

1. *Установити форму кореляційного зв'язку* – тобто вид функції регресії (лінійна, квадратична, показова тощо).

Графік лінійної функції – пряма лінія. Якщо графік відмінний від прямої лінії, то такий взаємозв'язок називається нелінійним (або криволінійним).

2. *Оцінити тісноту й спрямованість кореляційного зв'язку*. Вона визначається знаходженням у найпростішому випадку коефіцієнта кореляції (парного або рангового).

Кореляція буває пряма (позитивна) і зворотна (негативна).

▪Якщо зі збільшенням (зменшенням) однієї ознаки в основному збільшуються (зменшуються) значення іншої, то такий кореляційний зв'язок називається *прямий* або *позитивний*.

▪Якщо зі збільшенням (зменшенням) однієї ознаки в основному зменшуються (збільшуються) значення іншої, то такий кореляційний зв'язок називається *зворотний* або *негативний*.

Кореляційне поле (діаграма розсіювання) – графічне представлення залежності між результатами (рис. 2.5).

За кореляційним полем можна судити про тісноту кореляційного зв'язку, якщо цей зв'язок існує. Чим менше точки розкидані біля уявлюваної усередненої лінії, тим тісніше кореляційний зв'язок між розглянутими ознаками. Візуальний аналіз кореляційних полів допомагає розібратися в сутності кореляційного взаємозв'язку, дозволяє висловити припущення про наявність, спрямованість і тісноту зв'язку.

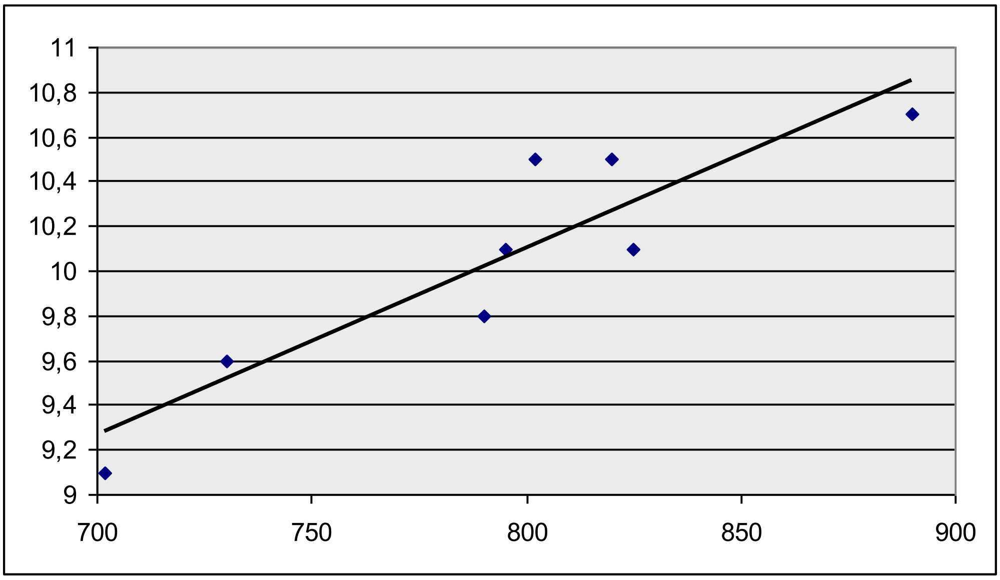

Рис. 2.5. Графік кореляції (кореляційне поле)

Будемо називати кореляційним полем зону розкиду отриманих точок на графіку. Візуально аналізуючи кореляційне поле на малюнку 2.5, можна помітити, що воно наче витягнуто вздовж уявної прямої лінії. Така картина характерна для так званого лінійного кореляційного взаємозв'язку між показниками. При цьому можна припустити, що зі збільшенням кінцевої швидкості розбігу збільшується й довжина стрибка, і навпаки. Тобто. між розглянутими показниками спостерігається прямий (позитивний) взаємозв'язок.

Крім цього, за кореляційним полем можна приблизно судити про тісноту (щільність) кореляційного зв'язку, якщо цей зв'язок існує. Тут говорять: чим менше крапки розкидані біля уявлюваної усередненої лінії, тим тісніше кореляційний зв'язок між розглянутими ознаками.

Візуальний аналіз кореляційних полів допомагає розібратися в сутності кореляційного взаємозв'язку, дозволяє висловити припущення про наявність, спрямованість і тісноту зв'язку. Але точно сказати: є зв'язок між ознаками чи ні, лінійний зв'язок або криволінійний, тісний зв'язок (достовірний) або слабкий (недостовірний) – за допомогою цього методу не можна. Найбільш точним методом виявлення й оцінки лінійного взаємозв'язку між показниками є метод визначення різних кореляційних показників за статистичним даними

Оцінка тісноти взаємозв’язку

Кореляція – це залежність між двома випадковими величинами *Y* і *X*. Для вимірювання взаємозв'язку між ними використовується коефіцієнт кореляції, який тим вищий, чим сильніше пов'язані між собою *Y* і *X*.

Параметричний парний лінійний коефіцієнт кореляції дозволяє оцінити тісноту (силу) взаємозв'язку між досліджуваними показниками.

Визначається за формулою:

$$r = \frac{\Sigma\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{n\sigma_x\sigma_y} \qquad (2.19)$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. На підставі коефіцієнтів кореляції можна судити тільки про прямолінійний кореляційний взаємозв'язок між ознаками.

2. Значення коефіцієнтів кореляції є безрозмірна величина, що не може бути менше –1 і більше +1.

3. Якщо значення коефіцієнтів кореляції дорівнюють нулю, то зв'язок між ознаками X та Y *відсутній.*

4. Якщо значення коефіцієнтів кореляції негативні, то зв'язок між ознаками X и Y *зворотний*.

5. Якщо значення коефіцієнтів кореляції позитивні, то зв'язок між ознаками X и Y *прямий* (позитивний).

6. Якщо коефіцієнти кореляції приймають значення +1 або –1, то зв'язок між ознаками X и Y *функціональний*.

Методи обчислення коефіцієнтів взаємозв’язку

Найпоширеніший “лінійний” коефіцієнт кореляції можна обчислювати лише при виконанні певних, досить суворих вимог до експериментального матеріалу. Необхідно, щоб досліджувана вибірка була результатом випадкового відбору й обидві обмірювані величини підкорялися закону нормального розподілу. У практиці спортивних вимірів ці вимоги не завжди можуть бути виконані, і в цих випадках замість параметричного парного коефіцієнта кореляції Браве-Пірсона застосовується ранговий коефіцієнт Спірмена або застосовується метод регресійного аналізу.

$$\mathrm{R}_{x,y} = 1 - \frac{6 \cdot \sum\left(\mathrm{X}_z - \mathrm{Y}_z\right)^2}{\mathrm{n} \cdot \left(\mathrm{n}^2 - 1\right)} \qquad (2.20)$$

Вирахування кореляційного відношення

Для оцінки ступеня взаємозв’язку при нелінійній формі залежності і вимірах у шкалах інтервалів та відносин використовують кореляційне відношення (η – ета). При лінійній залежності значення кореляційного відношення за абсолютною величиною співпадає з коефіцієнтом кореляції.

$$\eta_{x/y} = \sqrt{1 - \frac{\sum (x' - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}; \qquad (2.21) \qquad \eta_{y/x} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y' - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}; \qquad (2.22)$$

де $\eta_{y/x}$, $\eta_{x/y}$ – кореляційні відношення;

x та y – варіанти показників x та y;

x та y – середні арифметичні значення показників;

x' та y' – приватні середні показників.

Вирахування приватного коефіцієнта кореляції

На взаємозв'язок двох показників впливають різні фактори. Тому на практиці часто виникає необхідність оцінити взаємозв'язок показників x та y при незмінності всіх інших показників (z, q та інші).

У таких випадках вираховують приватний (або парціальний) коефіцієнт кореляції: $\mathbf{r}_{\mathbf{xy \cdot z}}$. Коефіцієнт $\mathbf{r}_{\mathbf{xy \cdot z}}$ дозволяє оцінити взаємозв'язок x та y при виключенні впливу на нього показника z. Приватний коефіцієнт кореляції змінюється в межах від –1 до +1 (так як і звичайний парний лінійний коефіцієнт кореляції).

Вираховується за формулою 2.23:

$$r_{xy \cdot z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^{\,2})(1 - r_{yz}^{\,2})}} \qquad (2.23)$$

де r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} – парні лінійні коефіцієнти кореляції.

Вирахування множинного коефіцієнта кореляції

Для дослідження щільності взаємозв'язку між показником x і деяким набором інших показників використовують множинний коефіцієнт кореляції, який позначається $R_{\mathbf{xyz}}$.

При оцінці взаємовпливу показників y і z на показник x значення множинного коефіцієнта кореляції вираховують за формулою 2.24:

$$R_{xyz} = \sqrt{\frac{r^2_{xy} + r^2_{xz} - 2 \cdot r^2_{xy} \cdot r^2_{xz} \cdot r^2_{yz}}{1 - r^2_{yz}}} \qquad (2.24)$$

Звернемо увагу, що множинний коефіцієнт кореляції змінюється в межах від 0 до +1 (негативних значень не має).

ПРАКТИЧНА РОБОТА №1

МЕТОД СЕРЕДНІХ ВЕЛИЧИН

Мета: навчитись будувати ранжируваний та варіаційний ряди, вираховувати основні статистичні характеристики:

Мо – моду;

Ме – медіану;

$\bar{x}$ – середнє арифметичне значення;

σ^2 – дисперсію;

σ – середнє квадратичне відхилення;

V – коефіцієнт варіації;

$S\bar{x}$ – помилку середнього арифметичного.

Алгоритм роботи

1. Заносимо показники вимірювань (наприклад, значення вагових показників певної групи досліджуваних):

$x_1 = 70$;	$x_{11} = 72$;	$x_{21} = 84$;
$x_2 = 74$;	$x_{12} = 61$;	$x_{22} = 77$;
$x_3 = 87$;	$x_{13} = 77$;	$x_{23} = 74$;
$x_4 = 77$;	$x_{14} = 90$;	$x_{24} = 66$;
$x_5 = 82$;	$x_{15} = 69$;	$x_{25} = 82$;
$x_6 = 84$;	$x_{16} = 80$;	$x_{26} = 78$;
$x_7 = 63$;	$x_{17} = 78$;	$x_{27} = 82$;
$x_8 = 78$;	$x_{18} = 72$;	$x_{28} = 77$;
$x_9 = 77$;	$x_{19} = 70$;	$x_{29} = 70$;
$x_{10} = 69$;	$x_{20} = 68$;	$x_{30} = 75$.

2. Виконуємо ранжирування.

3. Знаходимо моду (M_o) і медіану (Me).

Мода – результат вибірки чи сукупності, який найбільш часто зустрічається в цій вибірці.

Медіана – результат вимірювання, який знаходиться в середині ранжируваного ряду.

4. Будуємо таблицю 1.

Таблиця 1

№ з/п	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
1 2 3 4 5 … $\sum$			

5. Вираховуємо основні статистичні показники:

$\bar{x}$ – середнє арифметичне:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n};$$

σ^2 – дисперсію (вказує на розсіювання варіантів біля середнього арифметичного):

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n};$$

σ – середнє квадратичне відхилення (вказує на розсіювання варіантів біля середнього арифметичного у квадраті). Для σ≤30, n–1.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}};$$

V – коефіцієнт варіації (показує, яку частину складає середнє квадратичне відхилення – фактор розсіювання – від середнього арифметичного); у спортивній практиці коливання результатів вимірювань у залежності від величини коефіцієнта варіації вважають невеликою (0–10 %), середньою (11–20 %) та великою (V>20%):

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%;$$

$S\bar{x}$ – помилка середнього арифметичного:

$$S\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

6. Будуємо таблицю 2.

Таблиця 2

№ інтервалу	Межі інтервалу	Частота	Накопичена частота	Частість, %	Накопичена частість
1 2 3 4 5					

7. Будуємо графік розподілу значень показника.

Робимо висновки за графіком про однорідність вибірки за завданим показником, ураховуючи наступні моменти:

– якщо гістограма за своїм виглядом наближується до графіка нормального розподілу величин, то група, можливо, однорідна;

– якщо графіки низькі та розтягнуті, то група, можливо, однорідна, але не компактна;

– якщо графіки мають 2 та більше вершин, то група неоднорідна за даною ознакою, її необхідно поділити на підгрупи, щоб з кожною з підгруп проводити заняття за індивідуальним планом.

8. Висновок.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №2

ВИЗНАЧЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОГО ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ МІЖ ДОСЛІДЖУВАНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Мета: навчитись визначати наявність, форму та ступінь взаємозв'язку між показниками при лінійній залежності.

Алгоритм роботи

1. Виявити залежність результату стрибка в довжину з розбігу (показник X) від величини кінцевої швидкості розбігу (показник Y). Для відповіді на це питання паралельно з реєстрацією результату X кожного стрибка спортсмена або групи спортсменів реєструють і величину кінцевої швидкості розбігу Y. Припустимо, вони такі:

Таблиця 1

Показники кінцевої швидкості розбігу
та довжини стрибка спортсменів

Показник	1	2	3	4	5	6	7	8
x (см)	890	820	825	790	795	802	702	730
y (м/с)	10,7	10,5	10,1	9,8	10,1	10,5	9,1	9,6

2. Представимо таблицю 1 у вигляді графіка в прямокутній системі координат, де на горизонтальній осі будемо відкладати довжину стрибка (X), а на вертикальній – величину кінцевої швидкості розбігу в цьому стрибку (Y)

3. Вираховуємо суму та середнє арифметичне значення показників x та y.

4. Вираховуємо $(x-\bar{x})$, $(y-\bar{y})$.

5. Здійснюємо розрахунки $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ та знаходимо суму 6 ст.

6. Підносимо до квадрату $(x-\bar{x})^2$ і $(y-\bar{y})^2$ та підраховуємо Σ ст. 7, 8.

Таблиця 2

№ з/п	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
1 2 3 … Σ Сер.							

7. Вираховуємо середнє квадратичне відхилення (σ).

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n}}$$

8. Вирахувати коефіцієнт кореляції Пірсона (r_{xy}):

$$r_{xy} = \frac{\Sigma \left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{n\sigma_x \sigma_y}$$

9. Висновок.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №3

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ФІЗИЧНОМУ ВИХОВАННІ І СПОРТІ

Мета: узагальнити вміння аналітичної обробки результатів вимірювання, застосовуючи методи математичної статистики.

Теоретичне обґрунтування

Статистична вірогідність указує на істотне розходження між порівнюваними вибірками. Якщо групи спортсменів представити як вибірки, то можливо встановити наявність або відсутність принципового розходження між ними. Це означає, що можна виявити характер розходжень між контрольною й експериментальною групами, чоловічими й жіночими функціональними можливостями в спорті, ювенільними й дефінітивними групами, а також групами, що працюють за різними програми, планами, тестами, за різних обставин та умов тощо. Розглянемо це на конкретних прикладах.

Завдання: необхідно порівняти результати швидкості бігу (м/с) спортсменів контрольної x_i і експериментальної y_i груп. Чи ефективний експеримент?

Показники контрольної групи у бігу: 3,9; 4,2, 3,6; 3,7; 3,8; 3,8; 3,9; 3,8; 3,9; 3,8; 3,9; 3,9; 3,7; 3,9; 4,0; 3,7; 4,0; 3,8; 4,0; 3,7; 4,0; 3,6; 4,0; 4,2; 4,0; 4,2; 3,9; 4,2; 3,9; 4,2.

Показники експериментальної групи у бігу: 4,0; 3,7; 4,0; 4,3; 3,7; 3,9; 4,0; 3,9; 4,2; 3,9; 4,0; 4,1; 4,0; 4,1; 4,0; 4,1; 4,0; 4,1; 4,1; 4,1; 4,0; 4,1; 4,2; 3,9; 4,2; 4,1; 3,7; 4,2; 4,0; 4,3.

Алгоритм роботи

1. Накреслити розрахункову таблицю (див. теоретичний матеріал).
2. Провести ранжування показників контрольної та експериментальної груп (див. завдання).
3. Визначити статистичні показники контрольної ($\bar{\chi}$, σ_x^2, σ_x, V_x, $m_{x,}$, M_o, M_e) та експериментальної груп ($\bar{y}$, σ_y^2, σ_y, V_y, $m_{y,}$, M_o, M_e).
4. За критерієм Стьюдента визначити статистичну вірогідність.
5. Зробити висновки.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Скільки етапів виділяють у роботі за методом середніх величин?
А) 3;
Б) 3-4;
В) 4;
Г) 5.

2. Розміщення показників у порядку збільшення (зменшення) – це:
А) нормування;
Б) анкетування;
В) ранжування;
Г) метод парного порівняння.

3. Які критерії вірогідності є параметричними?
А) Стьюдента та Вілкоксона;
Б) Фішера та Уайта;
В) Стьюдента та Фішера;
Г) Критерій знаків, Ван-дер-Вардена, Фішера.

4. Мода – це значення:
А) що знаходиться всередині варіаційного ряду;
Б) що найбільш часто зустрічається серед всіх показників;
В) що визначається добутком усіх показників, поділених на їх кількість;
Г) що показує відхилення від середнього.

5. Медіана – це величина:
А) що визначається добутком усіх показників, поділених на їх кількість;
Б) що найбільш часто трапляється серед всіх показників;
В) що знаходиться всередині варіаційного ряду;
Г) що показує відхилення від середнього.

6. Коефіцієнт варіації дає можливість визначити:
А) однорідність показників, що досліджуються;
Б) всі мінімальні показники;
В) статистичну вірогідність;
Г) статистичну ймовірність.

7. Варіаційний ряд визначається:
А) частотою показників та їх значеннями;
Б) амплітудою та частотою показників;
В) середньою арифметичною величиною вимірювання;
Г) усі відповіді правильні.

8. Середнє арифметичне – це величина:
А) що знаходиться всередині варіаційного ряду;
Б) що визначається $\sum$ всіх показників на їх кількість;
В) що показує відхилення від середнього квадратичного;
Г) що показує однорідність числового масиву.

9. Відібрана частина елементів генеральної сукупності, що представляє всю сукупність із прийнятною точністю – це:

А) генеральна сукупність;
Б) вибіркова сукупність;
В) теорія ймовірності;
Г) усі відповіді правильні.

10. Число, що виражає міру об'єктивної можливості настання випадкової події, – це:

А) відхилення;
Б) варіація;
В) імовірність;
Г) вірогідність.

11. Які відбори можна застосовувати для організації вибірки:

А) власне-випадковий;
Б) механічний;
В) типовий;
Г) усі відповіді правильні.

12. Параметричні критерії передбачають наявність наступних показників::

А) χ_i та $\bar{\chi}$;
Б) $\bar{\chi}$ та σ;
В) $\bar{\chi}$ та V;
Г) σ та V.

13. Критерій, що використовується у великих вибірках шляхом попарного порівняння – це:

А) критерій Фішера;
Б) критерій Стьюдента;
В) критерій Уайта;
Г) критерій Ван–дер–Вардена.

14. Показники, що спираються на рангові відмінності між елементами вибірки – це критерій:

А) параметричний;
Б) непараметричний;
В) вірогідний;
Г) невірогідний.

15. Критерій, що використовується для перевірки 2-х різних за об'ємом (невеликі) вибірки – це:

А) критерій знаків;
Б) критерій Уайта;
В) критерій Вілкоксона;
Г) критерій Фішера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Азгальдов Г.Г., Райхман Э.П. О квалиметрии. – М.: Издательство стандартов, 1973. – 182 с.
2. Біомеханічні основи техніки фізичних вправ / А.М. Лапутін, М.О. Носко, В.О. Кашуба. – К.: Наук. світ, 2001. – 201 с.
3. Благуш П.К. К теории тестирования двигательных способностей / П.К. Благуш – М.: ФиС, 1987. – 198 с.
4. Бріжатий О.В. Методи контролю у фізичному вихованні та спорті : [навчально-методичний посібник] / О.В. Бріжатий, В.І. Підлісний. – Суми: СДПІ, 1997. – 120 с.
5. Бубе Х. Тесты в спортивной практике / Х. Бубе. – М.: ФиС, 1968. – 136 с.
6. Годик М.А. Спортивная метрология: [учебник для ин-тов физ. культуры] / М.А. Годик. – М. : ФиС, 1988.- 192 с.
7. Губа В.П. Измерения и вычисления в спортивно-педагогической практике: [учебное пособие для вузов физической культуры] / В.П. Губа, М.П. Шестаков, Н.Б. Бубнов, М.П. Борисенков. – М.: СпортАкадемПресс, 2002. – 211с.
8. Закон України «Про метрологію та метрологічну діяльність». – К., 11 лютого 1998 року N 113/98-ВР. Режим доступу: http://zakon.rada. gov.ua/cgi-bin/laws/main.cgi?nreg=113%2F98-%E2%F0
9. Зациорский В.М. Спортивная метрология / В.М. Зациорский. – М.: ФиС, 1982. – 256 с.
10. Основы математической статистики / Под ред. В.С. Иванова – М.: Физкультура и спорт, 1990. – 176 с.
11. Иванов В.В. Комплексный контроль в подготовке спортсменов / В.В. Иванов. – М.: ФиС, 1987. – 256 с.
12. Карел Берка. Измерения: понятия, теории, проблемы / Карел Берка. – М.: Прогресс, 1987. – 320 с.
13. Карпман В.Л. Тестирование в спортивной медицине / В.Л. Карпман. – М.: ФиС, 1988. – 208 с.
14. Круцевич Т.Ю. Методи дослідження індивідуального здоров'я дітей та підлітків у процесі фізичного виховання: Навч. посібник. – К.: Олімпійська література, 1999. – 232 с.
15. Лакин Г.Ф. Биометрия. – М.: Высшая школа, 1973. – 343 с.
16. Лапутин А.Н. Технические средства обучения: [пособие для ин-тов физ. культ.] / А.Н. Лапутин., В.Л. Уткин. – М.: ФиС, 1990. – 80 с.
17. Лапутін А.М. Біомеханіка спорту: [навч. посібник для студ. вищ. навч. закл. з фіз. виховання і спорту] / А.М. Лапутін, В.В. Гамалій, О.А. Архипов, В.О. Кашуба та ін.; за заг. ред. А.М. Лапутіна. – К. : Олімпійська література, 2005. – 319 с.
18. Матвеев Л.П. Основы общей теории спорта и системы подготовки спортсменов / Л.П.Матвеев. – К.: Олимпийская литература, 1999. – 317 с.
19. Метрологія фізичного виховання та спорту. Лабораторний практикум / Носко М.О., Гаркуша С.В. – Чернігів: ЧДПУ, 2007. – 32 с
20. Метрологія фізичного виховання та спорту Навчальна програма / Носко М.О., Гаркуша С.В., Жула Л.В., Куртова Г.Ю. – Чернігів: ЧДПУ, 2006. – 14 с.

21. Начинская С.В. Основы спортивной статистики / С.В. Начинская. – К.: Вища школа, 1987. – 189 с.
22. Начинская С.В. Спортивная метрология: [учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений] / С.В. Начинская. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 240 с.
23. Носко Н.А. Педагогические основы обучения молодежи и взрослых движениям со сложной биомеханической структурой. – К.: Науковий світ, 2000. – 336 с.
24. Основы математической статистики / Под ред. В.С. Иванова – М.: Физкультура и спорт, 1990. – 176 с.
25. Орлов А.И. Прикладная статистика: Учеб. для вузов / А.И. Орлов. – М.: Экзамен, 2004. – 656 с.
26. Платонов В.Н. Общая теория подготовки спортсменов в олимпийском спорте / В.Н. Платонов. – К.: Олимпийская литература, 1997. – 583 с.
27. Платонов В.Н. Система подготовки спортсменов в олимпийском спорте. Общая теория и ее практические приложения / В.Н. Платонов. – К.: Олимпийская литература. 2004. – 808 с.
28. Платонов В.Н. Подготовка квалифицированных спортсменов / В.Н. Платонов. – М.: ФиС, 1986. – 286 с.
29. Платонов В.Н. Теория и методика спортивной тренировки / В.Н. Платонов. – К. : Вища шк., 1984. – 352 с.
30. Практическая биомеханика / [А.Н.Лапутин, В.А.Кашуба и др.]; Под общей ред. А.Н. Лапутина. – К. : Науковий світ, 2000. – 298 с.
31. Райцин Л.М. Влияние положения тела на проявление и тренировку силовых качеств: Автореф. дисс. канд.пед.наук. – М., 1973. – 27 с.
32. Романенко В.А. Диагностика двигательных способностей. Учеб. пособ. / В.А. Романенко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2005. – 290 с.
33. Сергієнко Л.П. Спортивна метрологія: теорія і практичні аспекти: Підручник / Л.П. Сергієнко. – К.: КНТ, 2010. – 776 с.
34. Сергієнко Л.П. Тестування рухових здібностей школярів / Л.П. Сергієнко. – К.: Олімпійська література, 2001. – 430 с.
35. Старченко С.О. Метрологічні основи контролю за фізичним станом спортсменів: [Методичні рекомендації для студентів факультету фізичної культури педагогічних університетів] / С.О. Старченко. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2004. – 68 с.
36. Тарабаева Ю.В. Основные термины в области метрологии. Словарь-справочник / Ю.В.Тарабаева. – М.: Изд-во стандартов, 1989.
37. Тюрин Н.И. Введение в метрологию / Н.И. Тюрин. – М.: Издательство стандартов, 1973 – 279 с.
38. Уткин В. Л. Биомеханика физических упражнений: [учеб. пособ. для студ. фак. физ. восп. пед. инст.] / В.Л. Уткин. – М.: Просвещение, 1989. – 210 с.
39. Физиологическое тестирование спортсмена высокого класса / Дж. Дункан Мак-Дугалл, Говард Г. Уэнгер, Говард Дж. Грин. – К.: Олимпийская литература, 1997. – 432 с
40. Цюцюра С.В. Метрологія, основи вимірювань, стандартизація та сертифікація: Навч. посіб. – 3-тє вид., стер. / С.В. Цюцюра, В.Д. Цюцюра. – К. : Знання, 2006. – 242 с.

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.

Підписано до друку 02.04.2019 р. Формат 60 х 90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 4,19. Обл.-вид. 3,3.
Наклад 100 прим. Зам. № 874.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т.Г. Шевченка.
14013, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
Тел. 65-17-99, nuchk.tipograf@gmail.com