

Кафедра фізико-математичної освіти та інформатики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

Тема: Методика навчання тіл обертання у розділі «Стереометрія» в 11 класі
з використанням програм з 3D-моделювання

Виконала:

Кухарчук Ольга Романівна

Спеціальність:

014 Середня освіта,

Предметна спеціальність

014.04 Середня освіта

(Математика)

Освітня програма: «Середня освіта

(Математика)»

Науковий керівник:

канд.пед.наук, доцент

Заїка О.В.

Допущено до захисту

"__"_____ 2023 р.

Завідувач кафедри

Р.П. Кухарчук

Дата захисту: «__» _____ 2023 р.

Оцінка

Підписи членів ЕК:

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ.....	5
1.1 Методичні особливості навчання стереометрії.....	5
1.2 Логіко-математичний аналіз тіл обертання в курсі стереометрії.....	13
1.3 Аналіз навчальної програми та підручників.....	18
1.4 Порівняльний аналіз програм та електронних додатків для створення 3D-моделей тіл обертання.....	27
Висновки до розділу 1	33
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ДОДАТКІВ ДЛЯ СТВОРЕННЯ 3D МОДЕЛЮВАННЯ В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ	35
2.1 Основні типи задач для тіл обертання з курсу стереометрії.....	35
2.2 Застосування 3D-моделей для розв'язання задач з стереометрії	40
2.3 Застосування 3D-моделей для пояснення нового матеріалу з тем.....	57
2.4 Методичні рекомендації	61
Висновки до розділу 2	65
ВИСНОВКИ.....	67
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	69

ВСТУП

Актуальність дослідження. З початку XXI ст. комп'ютер є важливим складником освітнього процесу. Спочатку він використовувався як носій для інтерактивних навчальних матеріалів, спеціального програмного забезпечення, динамічного бачення тощо. Але в наш час технології є необхідним компонентом навчання та використовуються в освітньому процесі. Зокрема, це стосується й предметів, що потребують уявлення просторових форм, якими оперує стереометрія. В 11 класі учні вивчають розділ «Стереометрія», що є складним для уявлення фігур без відповідних засобів візуалізації. Тому освітній процес можна значно поліпшити за допомогою використання програм з 3D-моделювання.

Традиційні методи навчання, такі як малювання в зошиті або на дошці, не завжди допомагають школярам вирішувати завдання та розуміти матеріал належним чином. Тому важливо використовувати 3D-моделювання в навчанні, оскільки воно дозволяє учням побачити та зрозуміти властивості тіл у тривимірному просторі. Учні можуть створювати власні 3D-моделі тіл обертання та досліджувати їхні властивості, що забезпечує розуміння математичних концепцій та підвищує мотивацію до навчання. У наш час все більше шкіл та вчителів застосовують сучасні технології візуалізації на своїх уроках, що є свідченням актуальності використання 3D-моделювання в навчальному процесі.

Тому була вибрана тема дослідження: «Методика навчання тіл обертання у розділі «Стереометрія» в 11 класі з використанням програм з 3D-моделювання».

Об'єктом дослідження є вивчення тем «Циліндр», «Конус» та «Куля» у розділі «Стереометрія» в шкільному курсі геометрії 11 класу.

Предметом дослідження є методика навчання тіл обертання у розділі «Стереометрія» в 11 класі з використанням програм з 3D-моделювання.

Мета дослідження полягає у вдосконаленні методики навчання тіл обертання у розділі «Стереометрія» в 11 класі з використанням програм з 3D-моделювання.

Завдання дослідження:

- 1) опрацювати наукову та навчально-методичну літературу з обраної теми дослідження;
- 2) здійснити логіко-математичний аналіз тем «Циліндр», «Конус» та «Куля» у розділі «Стереометрія» для 11 класу;
- 3) проаналізувати навчальні програми та підручники;
- 4) порівняти наявні програми для створення 3D-моделей тіл обертання;
- 5) розглянути основні типи задач для тіл обертання з курсу стереометрії;
- 6) дослідити та розробити методику навчання тіл обертання з використанням комп'ютерних 3D-моделей.

Практичне значення магістерської роботи полягає у використанні 3D-моделей для вивчення тіл обертання з метою покращення якості навчання, кращого розуміння геометричних форм та їхню взаємодію в просторі. Учні зможуть створювати власні моделі, досліджувати їхні властивості, що сприяє розвитку креативного мислення та комп'ютерної грамотності.

Структура роботи. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідницької роботи висвітлювались у доповіді на V Всеукраїнській студентській науково-практичній інтернет-конференції «Студентський науковий вимір проблем природничо-математичної освіти в контексті інтеграції України до єдиного європейського і світового освітнього простору» 18-19 травня 2023 року, опубліковано тези [30].

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

1.1 Методичні особливості навчання стереометрії

Ефективність та якість навчання залежить від правильного вибору форми, методів та засобів навчання для конкретної дисципліни.

Методика навчання математики (скорочено її називають методикою математики) – це наука про математику як навчальний предмет і закономірності процесу навчання математики учнів різних вікових груп [39].

Крім цього, методика навчання не обмежується простим набором правил щодо подачі матеріалу. Вона є структурованою системою, що складається з взаємопов'язаних компонентів. На рисунку 1.1 наведено схему складників методики навчання. Коротко опишемо кожен компонент.



Рисунок 1.1. Складові методики навчання

Розглянемо перший складник, а саме – **принципи навчання**, які є важливим компонентом методики навчання і визначають дидактичні вимоги до освітнього процесу, що забезпечують його ефективність.

Виділяють такі основні дидактичні принципи навчання:

1. Принцип науковості. Має відповідати принципам, які вимагають науково-обґрунтованих фактів, варто уникати догматичних тверджень. Для учнів необхідним є чітке визначення поняття з однозначним тлумаченням. Реалізація цього принципу передбачає використання наукових методів у навчанні.

2. Принцип систематичності та послідовності навчання. Вимагає систематичності як у роботі вчителя (самовдосконалення, послідовне та логічне подання нового матеріалу), так і в роботі учнів, а саме – відвідування занять, вивчення та повторення матеріалу, уважність та зосередженість на уроках, виконання завдань.

3. Принцип доступності освіти. Навчальний матеріал має бути доступним і зрозумілим для учнів, враховуючи їх індивідуальні особливості та рівень знань. Важливо не перенавантажувати учнів навчальним матеріалом, дотримуватися принципу поступовості, починати з легших завдань та, не поспішаючи, переходити до більш складних.

4. Принцип зв'язку навчання з життям. Зв'язок навчального матеріалу з реальними ситуаціями та задачами, щоб учні розуміли для чого ці знання та могли застосувати їх на практиці в повсякденному житті.

5. Принцип активності та самостійності. Передбачає осмислений і творчий підхід до засвоєння знань. Залучення учнів до активної пізнавальної діяльності сприяє кращому засвоєнню матеріалу і розвитку їх здібностей (інтерес та позитивне ставлення до навчання, єдність учнів, взаєморозуміння, використання засвоєних знань на практиці, виконання цікавих вправ, розвиток інтелектуальних умінь, використання сучасних інформаційних засобів для кращого розуміння дисциплін).

6. Принцип наочності в навчанні. Використання наочності значно полегшує процес засвоєння матеріалу, стимулює інтерес до навчання та сприяє розвитку мотивації учнів. Але необхідно уникати перевантаження процесу навчання наочністю, що може знизити самостійність і активність учнів у

розумінні навчального матеріалу. Представлення зайвих елементів та великої кількості наочних засобів може спричинити неуважність та відсутність концентрації на певному матеріалі.

7. Принцип міцності засвоєння знань, умінь і навичок. Систематичне повторення та закріплення матеріалу; використання вже вивченого матеріалу під час запам'ятовування нового; залучення учнів до активності на уроці шляхом використання запитань, обговорень, порівнянь, аналізу під час повторення; акцентувати увагу на основних ідеях; використовувати мультимедійні засоби.

8. Принцип індивідуального підходу до учнів. Урахування індивідуальних особливостей учнів і адаптація навчального процесу до їх потреб, інтересів і можливостей. Готовність до надання додаткової підтримки та допомоги (індивідуальні консультації, додаткові завдання) учням, які мають особливі потреби або затримки в розвитку.

9. Принцип емоційності навчання. Учителі мають створювати стимулювальну та позитивну атмосферу, щоб підтримати мотивацію та зацікавленість учнів. Це використання різних методів мотивації, нагород та похвали, жваве надання нового матеріалу, наведення цікавих прикладів, використання наочності, врахування інтересів учнів під час вибору теми або завдань, заохочення до самостійності [36].

Вищезазначені принципи є основними та актуальними, тому рекомендується дотримуватися їх у процесі навчання.

Другий складник методики навчання – це **методи**. Метод навчання – це спосіб взаємодії між учнем та вчителем, який спрямований на забезпечення засвоєння змісту навчання та досягнення освітніх цілей. Їх класифікують за певними ознаками та встановлення між ними зв'язків.

Найпоширеніші класифікації методів навчання:

- **за джерелом передачі та сприймання навчального матеріалу:**

Словесні методи: використання мовлення, розповідей, пояснень вчителя для передачі знань.

Наочні методи: використання наочних засобів, таких як зображення, малюнки, схеми, діаграми, моделі.

Практичні методи: активна участь учнів у виконанні практичних завдань, формування умінь та навичок шляхом практичної діяльності.

- за характером пізнавальної діяльності учнів:

Пояснювально-ілюстративний метод: пояснення нового матеріалу вчителем з використанням ілюстрацій та прикладів.

Репродуктивний метод: передача готової інформації учням для повторення і відтворення.

Частково-пошуковий метод: активна участь учнів у пошуку інформації та розв'язанні задач з допомогою вчителя.

Дослідницький метод: стимулювання учнів до проведення досліджень, експериментів та самостійного опрацювання нового матеріалу.

Проблемне викладання: ставлення перед учнями завдань і проблем, розв'язання яких вимагає активної діяльності та критичного мислення.

- за основною дидактичною метою і завданнями:

Методи оволодіння новими знаннями: спрямовані на передачу нової інформації і знань учням.

Методи формування вмінь і навичок: спрямовані на розвиток і формування практичних навичок та умінь учнів.

Методи перевірки та оцінювання знань, умінь і навичок: використовуються для оцінювання рівня розвитку учнів і засвоєння навчального матеріалу.

- за методами усного викладу знань:

Методи закріплення навчального матеріалу, методи самостійної роботи учнів, методи роботи з застосування знань на практиці.

- з точки зору цілісного підходу до діяльності у процесі навчання:

Методи організації та здійснення навчально-пізнавальної діяльності: спрямовані на створення оптимальних умов для навчання і засвоєння знань.

Методи стимулювання й мотивації учіння: використання різних способів стимуляції і мотивації учнів для активної участі у навчальному процесі.

Методи контролю, самоконтролю, взаємоконтролю і корекції: застосування методів контролю та оцінювання знань і навичок, а також сприяння самоконтролю та взаємного контролю між учнями для покращення навчального процесу [32].

- **за залученістю учня до процесу навчання** (С. Бондар):

Пасивні методи: учень виступає лише як отримувач інформації.

Активні методи: учень активно бере участь у процесі засвоєння нових знань.

Інтерактивні методи: учень співпрацює з вчителем як рівноправний партнер у процесі вивчення нового матеріалу [10].

Ці класифікації є інструментом для розуміння великого вибору серед методів навчання та допомагають педагогам визначитись з більш ефективними методами відповідно до навчальних цілей і потреб учнів.

Ще одним складником методики навчання є **зміст**, що охоплює основні поняття, теми та концепції, які вчитель передає учневі під час навчання.

Зміст методики навчання передбачає:

1. Визначення пізнавальної цінності обраної навчальної дисципліни та її місця в системі освіти.
2. Формування завдань та змісту обраної навчальної дисципліни.
3. Розробка та використання відповідних методів, засобів та організаційних форм для ефективного опанування змістом навчального предмета.

Зміст методики вивчення математики є основою для організації навчального процесу та побудови ефективного навчального середовища для учнів [4].

Наступним складником методики навчання є **форми навчання**. Форми навчання становлять різноманітні методи та прийоми організації навчання,

скоординовані в певному порядку. Вони охоплюють різні способи організації учнів, їх взаємодії з учителем, а також використання різних матеріалів і ресурсів для досягнення навчальних цілей. Наприклад, декілька загальновідомих форм навчання:

- Лекція: вчитель розповідає та пояснює матеріал учням в усній формі.
- Практичне заняття: учні виконують завдання, активно застосовують отримані знання та навички на практиці.
- Групова робота: спільна діяльність учнів у малих групах з метою вирішення завдань або розв'язання проблем.
- Дискусія: обговорення питань та обмін думками, підкріпленими аргументами, між учнями з метою розвитку критичного мислення та аналітичних навичок.
- Індивідуальна робота: самостійна робота учнів з метою засвоєння індивідуальних навчальних завдань [24].

Це лише кілька прикладів форм навчання, які вчителі можуть комбінувати або застосовувати інші методи, залежно від конкретної ситуації та контексту.

Останній складник – **засоби навчання**, що містять матеріали, ресурси або інструменти, що використовуються в освітньому процесі.

Засоби навчання можна поділити на дві групи: традиційні та засоби нових інформаційно-комунікаційних технологій.

Приклади засобів навчання: природне і соціальне оточення, лабораторне обладнання, підручники та навчальні посібники, книги, комп'ютери з відповідним програмним забезпеченням, візуальні засоби, електронні ресурси (вебсайти, комп'ютерні програми, відеоуроки, інтерактивні завдання та інші цифрові матеріали), енциклопедії, інтерактивні засоби тощо.

Ці засоби можуть використовуватися окремо або комбінуватися для забезпечення різноманітності, цікавості та ефективності навчання. Вибір конкретних засобів залежить від предмету, цілей навчання та потреб учнів [39].

Отже, важливо знати методичні особливості навчання для розділу стереометрії, оскільки вони впливатимуть на краще розуміння матеріалу та підвищення успішності учня.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) дозволяє зробити процес навчання захопливим та ефективним, а навчальний матеріал – доступним і зрозумілим для учнів, що сприяє розвитку їх уяви, творчого та логічного мислення, комп'ютерної грамотності.

Ефективним є використання ДКМ (демонстраційна комп'ютерна модель) під час уроків із стереометрії, що надає можливість:

- наочно показати побудову стереометричних фігур, що допоможе учням правильно уявляти їх форму та розвинути просторове уявлення;
- заохочувати учнів до самостійного створення моделей, шляхом подолання труднощів у побудові вони краще сприйматимуть об'ємні фігури (просторові тіла);
- ефективно використовувати час, який можна виділити на розв'язання більш складних задач;
- урізноманітнити освітній процес, зробити навчання більш захопливим та підсилити інтерес в учнів.

Завдяки розробленому навчально-методичному комплексу (НМК) (рис. 1.2) стає можливим упроваджувати методику навчання побудови стереометричних фігур з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. Основним елементом комплексу є дидактичні комп'ютерні моделі, які послідовно демонструють кроки побудови геометричних фігур. Використання цих моделей допомагає створити навчальне середовище, яке ефективно розвиває уявлення про об'єкти та сприяє цілісному сприйняттю просторових фігур. Крім того, воно сприяє формуванню навичок та вмінь учнів щодо побудови зображень стереометричних фігур [20].

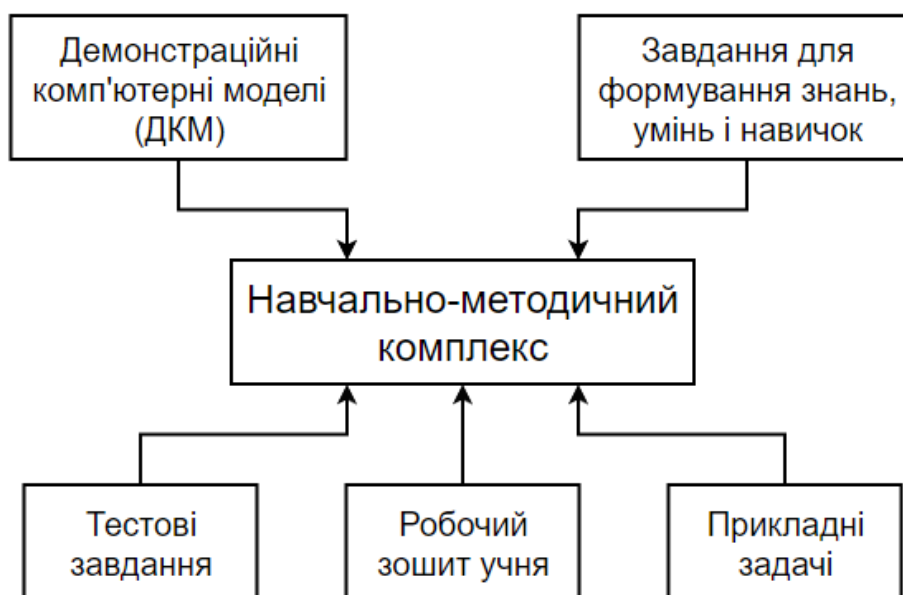


Рисунок 1.2. Схема структури НМК

Стереометрія – це розділ елементарної геометрії, що вивчає властивості просторових фігур [40].

Вивчення геометрії має сприяти розвитку просторового уявлення фігур учнями. Це є основним принципом, яким повинен керуватися вчитель під час планування навчальної діяльності, де стереометрія є важливим складником. Для досягнення цієї мети використовуються різні методичні прийоми і підходи, зокрема широке використання наочності. Одним з ключових методів є математичне моделювання, яке передбачає чітке розрізнення між реальними фізичними об'єктами та геометричними, ідеальними об'єктами та їхніми відношеннями. Для досягнення цієї мети використовуються методика формування стереометричних понять, що є одним із найважливіших складників методики навчання стереометрії, яка базується на системному вивченні понять, тверджень та їх послідовності.

Навчання стереометрії в шкільному курсі геометрії 11 класу має свої методичні особливості:

1. Використання певної послідовності вивчення тем зі стереометрії, щоб забезпечити логічність і системність навчання. Наприклад, почати з вивчення геометричних тіл та їх елементів, а потім перейти до формул для обчислення об'ємів і площ поверхонь тіл.
2. Застосування візуальних засобів навчання, таких як макети, моделі, ілюстрації та відеоматеріали. Це допомагає учням краще сприймати просторово геометричні тіла, їхнє взаємне розташування та залежності між параметрами.
3. Використання практичних завдань та задач для закріплення знань та вмінь. Практичні завдання можуть передбачати побудову геометричних тіл за допомогою 3D-моделювання, вимірювання їхніх параметрів та обчислення їхнього об'єму та площі поверхонь.

Важливо забезпечити індивідуальний підхід до кожного учня та враховувати їх індивідуальні особливості, такі як рівень підготовки, стиль навчання та інші фактори. Для цього можна використовувати різні методи та технології навчання, які допоможуть краще зрозуміти та запам'ятати матеріал.

1.2 Логіко-математичний аналіз тіл обертання в курсі стереометрії

У шкільному курсі геометрії в 11 класі (стандартний рівень) вивчення тіл обертання охоплює такі теми: «Циліндр», «Конус», «Куля і сфера», «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл».

Для розв'язування задач в курсі стереометрії учням потрібно запам'ятати значний обсяг матеріалу та креслити дуже багато стереометричних фігур. Для більш раціонального використання часу та для пришвидшення розуміння фігур доцільно використовувати спеціальні програми для 3D-моделювання. У такий спосіб можна буде правильно розподілити час, що надасть змогу приділяти більше уваги проблемним питанням із теми «Тіла обертання». Використання

сучасних технологій підвищить в учнів інтерес до навчання, а також їх дослідницьку діяльність, що позитивно впливатиме на освітній процес.

Поняття, які мають засвоїти та зрозуміти учні, наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1.

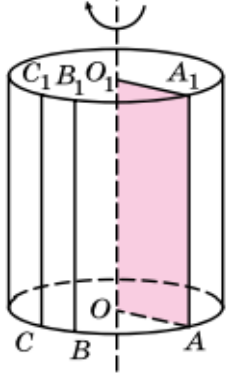
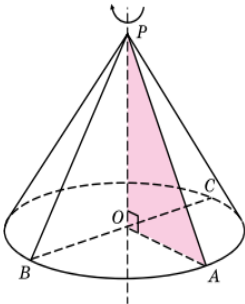
Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

	Поняття	Теореми	Вміння
Базові	Тіло, прямокутник, прямокутний трикутник, радіус, діаметр, коло, круг, дотична площина		Задавати вісь та фігуру обертання.
Нові	Тіло обертання, циліндр, основи циліндра, радіус циліндра, бічна поверхня циліндра, твірна циліндра, висота циліндра, конус, радіус конуса, бічна поверхня конуса, твірна конуса, висота конуса, зрізаний конус, куля, діаметр кулі, радіус кулі, сфера, комбінація тіл, вписані і описані тіла.	Теорема про дотичну до кулі площину	Розпізнавати види тіл обертання та їх елементи; будувати зображення тіл обертання, їх елементів, перерізів; обчислювати основні елементи тіл обертання; обґрунтовувати властивості тіл обертання, застосовувати їх до розв'язування задач; розпізнавати многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях; розв'язувати задачі на комбінацію просторових фігур.

Таблиця 1.2.

Логіко-математичний аналіз формулювання означень нових понять теми

Поняття	Означення	Вид означення, характеристичні властивості
Тіло обертання	<i>Тілом обертання</i> називають геометричне тіло, утворене обертанням деякої плоскої фігури навколо фіксованої прямої, яку називають віссю обертання.	Рід і видова відмінність

Тема «Циліндр»		
Циліндр	<i>Циліндром</i> називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутника навколо осі, яка містить одну з його сторін.	Через найближчий рід й істотні властивості
Бічна поверхня циліндра	Поверхню, утворену обертанням сторони AA_1 , яка паралельна осі циліндра, називають <i>бічною поверхнею циліндра</i> .	Через найближчий рід й істотні властивості
Висота та твірна циліндра	 <p>Кожний відрізок бічної поверхні (а також його довжину), що паралельний і дорівнює відрізку AA_1, називають <i>твірною циліндра</i>.</p> <p>AA_1, BB_1, CC_1 – твірні циліндра.</p> <p>Відстань від площинами основ, яка дорівнює довжині твірної циліндра, називають <i>висотою циліндра</i>.</p>	Рід і видова відмінність
Тема «Конус»		
Конус	<i>Конусом</i> називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо осі, що містить один з його катетів.	Через найближчий рід й істотні властивості
Бічна поверхня конуса, Основа конуса, Радіус основи конуса	 <p>Поверхню, утворену обертанням гіпотенузи PA трикутника POA, називають <i>бічною поверхнею конуса</i>.</p> <p>Катет OA цього трикутника описує круг, який називають <i>основою конуса</i>. Радіус цього круга, називають <i>радіусом основи конуса</i>.</p>	Рід і видова відмінність
Твірна конуса	Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи, називають <i>твірною конуса</i> .	Рід і видова відмінність

Зрізаний конус	<i>Зрізаним конусом</i> називають тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції навколо меншої її бічної сторони.	Через найближчий рід й істотні властивості
Тема «Куля і сфера»		
Куля	<i>Кулею</i> називається тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра.	Через найближчий рід й істотні властивості
Сфера	<i>Сферою</i> називається фігура, утворена обертанням кола навколо його діаметра.	Через найближчий рід й істотні властивості
Діаметр кулі	Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі та проходить через центр, називається <i>діаметром кулі</i> .	Рід і видова відмінність
Діаметральна площина	Площина, яка проходить через центр кулі, називається <i>діаметральною площиною</i> .	Рід і видова відмінність
Великий круг та велике коло	Переріз кулі діаметральною площиною називають <i>великим кругом</i> , а переріз сфери – <i>великим колом</i> .	Рід і видова відмінність
Радіус кулі	Будь-який відрізок, що сполучає центр кулі з будь-якою точкою його поверхні, називають <i>радіусом кулі</i> .	Рід і видова відмінність
Кульовий сегмент	Частина кулі, яку відтинає площина, називається <i>кульовим сегментом</i> .	Через найближчий рід й істотні властивості
Кульовий шар	Частина кулі, яка міститься між двома паралельними січними площинами, називається <i>кульовим шаром</i> .	Через найближчий рід й істотні властивості
Куля, вписана у многогранник	<i>Куля називається вписаною у многогранник</i> , якщо вона дотикається до кожної грані многогранника.	Через найближчий рід й істотні властивості
Многогранник, вписаний у сферу	<i>Многогранник називається вписаним у сферу</i> , якщо всі його вершини лежать на сфері.	Через найближчий рід й істотні властивості

Призма, вписана у циліндр	Призма називається вписаною у циліндр, якщо основи призми вписано в кола основ циліндра.	Через найближчий рід й істотні властивості
Піраміда, вписана в конус	Піраміда називається вписаною в конус, якщо їх вершини збігаються, а основу піраміди вписано в коло основи конуса.	Через найближчий рід й істотні властивості

Основні формули та визначення площ та об'ємів тіл обертання наведені в рис. 1.3.

<p>Площа бічної поверхні циліндра</p> <p>За площу S_6 бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні.</p> <p>$S_6 = 2\pi rh$, де S_6 — площа бічної поверхні циліндра, r — радіус основи циліндра, h — довжина висоти циліндра.</p> <p>Площа повної поверхні циліндра</p> <p>$S_n = S_6 + 2S_{\text{осн}}$, де S_n — площа повної поверхні циліндра, $S_{\text{осн}}$ — площа основи циліндра.</p> <p>$S_n = 2\pi rh + 2\pi r^2$</p> <p>Площа бічної поверхні конуса</p> <p>За площу S_6 бічної поверхні конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні.</p> <p>$S_6 = \pi rl$, де r — радіус основи конуса, l — довжина твірної конуса.</p> <p>Площа повної поверхні конуса</p> <p>$S_n = S_6 + S_{\text{осн}}$, де S_n — площа повної поверхні конуса, $S_{\text{осн}}$ — площа основи конуса.</p> <p>$S_n = \pi rl + \pi r^2$</p> <p>Взаємне розміщення сфери та площини</p> <p>Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то перерізом сфери площиною є коло.</p> <p>Площину, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають дотичною площиною до сфери. Цю спільну точку називають точкою дотику. У цьому випадку відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери.</p> <p>Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.</p>

Рисунок 1.3. Основні формули площ тіл обертання

Об'єм циліндра

$V = \pi r^2 h$, де V — об'єм циліндра, r — радіус основи циліндра, h — довжина висоти циліндра.

Об'єм конуса

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, де V – об'єм конуса, r – радіус основи конуса,

h – довжина висоти конуса.

Об'єм кулі

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де V – об'єм кулі, R – радіус кулі.

Площа сфери

$S = 4\pi R^2$, де S – площа сфери, R – радіус сфери.

1.3 Аналіз навчальної програми та підручників

На вебсайті Міністерства освіти і науки України представлено навчальні програми для 10-11 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік) [33]. Для математики розроблені 3 рівні: стандарту, профільний та поглиблений. Загалом на геометрію для 11 класу відведено 51 годину, з яких I семестр – 32 год, 2 год на тиждень, а II семестр – 19 год, 1 год на тиждень, з резервом – 14 годин.

У процесі вивчення розділу «Тіла обертання» в учнів сформується такі навички та знання:

- **Учень розуміє та формулює:** означення тіла обертання та осьового перерізу; поняття циліндр, конус, куля, їх основні елементи та властивості; взаємне розміщення сфери та площини.
- **Учень будує:** тіла обертання, їх елементи та перерізи (осьові та площинами).
- **Учень обчислює:** основні елементи тіл обертання; площі повної та бічної поверхні, площі основи циліндру та конусу; об'єми тіл обертання.
- **Учень розв'язує задачі та виконує вправи, пов'язані з тілами обертання, що передбачає застосування:** формул площ бічної, основи та

повної поверхні тіл обертання, об'єму тіл обертання.

На тему «**Тіла обертання**» відведено 12 годин. Зміст навчального матеріалу: Циліндр, конус, їх елементи. Перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі. Куля і сфера. Переріз кулі площиною.

Як результат, учень/учениця на рівні стандарту:

- **обчислює** величини основних елементів тіл обертання;
- **застосовує** властивості тіл обертання до розв'язування задач;
- **розпізнає** види тіл обертання, їхні елементи; многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях в об'єктах навколишнього світу.

Тема «**Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл**» охоплює 11 годин. З цієї теми ми будемо розглядати параграфи, які стосуються тіл обертання. Зміст навчального матеріалу: Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єми циліндра, конуса, кулі. Площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса. Площа сфери.

Після вивчення цієї теми учень/учениця:

- **записує** формули для обчислення об'ємів циліндра, конуса, кулі, площ бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, площі сфери;
- **має уявлення** про об'єм тіла та його основні властивості;
- **розв'язує** задачі на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл обертання.

Аналізуючи підручники з математики, важливо враховувати кілька критеріїв, які допоможуть оцінити їх ефективність та корисність. Вони повинні відповідати високим стандартам якості, бути зрозумілими та доступними для учнів. Порівняємо підручники за такими критеріями:

1) Зміст, логічність та відповідність підручника до навчальної програми.

Важлива структура, зручність та послідовність подання матеріалу,

підручник охоплює всі необхідні теми та поняття, передбачені навчальною програмою та рівнем складності.

- 2) **Зрозумілість та доступність пояснень матеріалу.** Автор подає інформацію простою та доступною мовою, уникає складних термінів, чітко формулює пояснення, щоб учні краще сприймали та розуміли математичні концепції.
- 3) **Наявність демонстративних зображень.** Використання графіків, схем, малюнків, діаграм, для полегшення сприйняття абстрактних понять та розвитку візуального мислення. Також наявність ілюстрацій робить вивчення математики більш цікавим та захопливим.
- 4) **Додаткова цікава інформація, для мотивації та заохочення учнів до навчання.** Може містити факти, цікаві історії з життя видатних математиків, приклади застосування математики в реальному житті, загадки та головоломки.
- 5) **Приклади та завдання.** Приклади розв'язування задач, усні та письмові вправи для класних та домашніх робіт, тести, наявність рівнів складності для завдань, перевірка знань, самостійні роботи.
- 6) **Узагальнення до кінця розділу або тести після вивчення теми.** Мають важливе значення, оскільки сприяють закріпленню знань учнів та перевірці їх знань з теми чи параграфа. Допомагають учням оцінити свої досягнення та визначити, де є проблеми, та самовдосконалюватися.

Розглянемо підручники з математики для вивчення розділу стереометрія (рівень стандарт) та оберемо для порівняльного аналізу такі підручники:

- 1) О. Істер «Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія» 11 клас (рівень стандарту) (2019) [28];
- 2) Г. Бевз «Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія» 11 клас (рівень стандарту) (2019) [5];

- 3) А. Мерзляк «Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія» 11 клас (рівень стандарту) (2019) [29];
- 4) Є. Нелін «Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія» 11 клас (рівень стандарту) (2019) [35].



Рисунок 1.4. Обрані підручники з математики

Нас цікавить тільки частини підручника з геометрією.

ПІДРУЧНИК №1

Зміст, логічність та відповідність підручника до навчальної програми.

Зміст підручника повністю відповідає вимогам навчальної програми. Частина «Геометрія» поділяється на 3 розділи: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл». Матеріал підручника гарно структурований за допомогою розділів, параграфів, рубрик. У кінці підручника є відповіді та вказівки до задач і вправ, а також предметний покажчик.

Зрозумілість та доступність пояснень матеріалу. Автор підручника виклав теоретичний матеріал зрозумілою та доступною мовою. У підручнику багато умовних позначень, що виділяє основну інформацію.

Наявність демонстративних зображень. Теоретичний матеріал урізноманітнений великою кількістю зображень та прикладів, що демонструють застосування математики у повсякденному житті. Малюнки з тілами обертання, осьовими перерізами тіл, перерізами площинами.

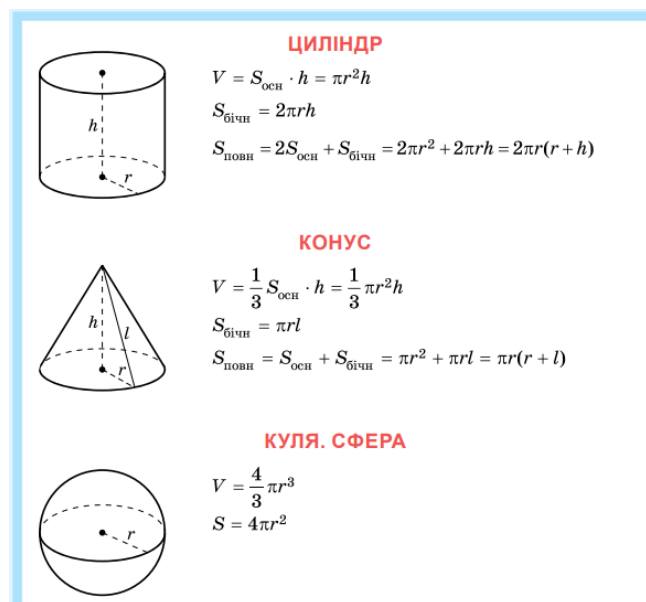


Рисунок 1.5. Форзац підручника з основними формулами

Додаткова цікава інформація для мотивації та заохочення учнів до навчання. У кінці параграфа є рубрики з цікавою інформацією «А ще раніше...», у якій можна ознайомитися з історичними фактами розвитку математичної науки та її понять, інформацією про українських учених.

Приклади та завдання. Зручно поділені завдання та вправи за рівнем складності (1 - початковий, 2 - середній, 3 - достатній та 4 - високий). До кожної підтеми є приклади розв'язання задач з відповідними малюнками. Після кожного параграфа є запитання до теоретичного матеріалу, рубрики «Розв'яжіть задачі та виконайте вправи», «Життєва математика» - завдання наближені до реального життя, «Перевірте свою компетентність!».

Узагальнення до кінця розділу або тести після вивчення теми. У кінці

розділу маємо домашню самостійну роботу та завдання для перевірки знань до визначених параграфів.

ПІДРУЧНИК №2

Зміст, логічність та відповідність підручника до навчальної програми.

Підручник має чітку структуру та найважливіші теми з геометрії. Підручник поділяється на 5 розділів, серед яких 2 присвячені вивченню геометрії, а саме «Многогранники», «Тіла обертання. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл». У кінці підручника є додатки з додатковими завданнями (геометричні тіла, задачі для кмітливих, теми для завдань творчого характеру тощо), жінки-математики, довідковий матеріал, відповіді та вказівки до задач і вправ, предметний покажчик.

Зрозумілість та доступність пояснень матеріалу. Теоретичний матеріал гарно структурований, окремо виділені основні поняття. Назви розділів та параграфів продубльовані англійською мовою.

Наявність демонстративних зображень. Підручник наповнений великою кількістю малюнків, зображень тіл обертання з перерізами та їх елементами.

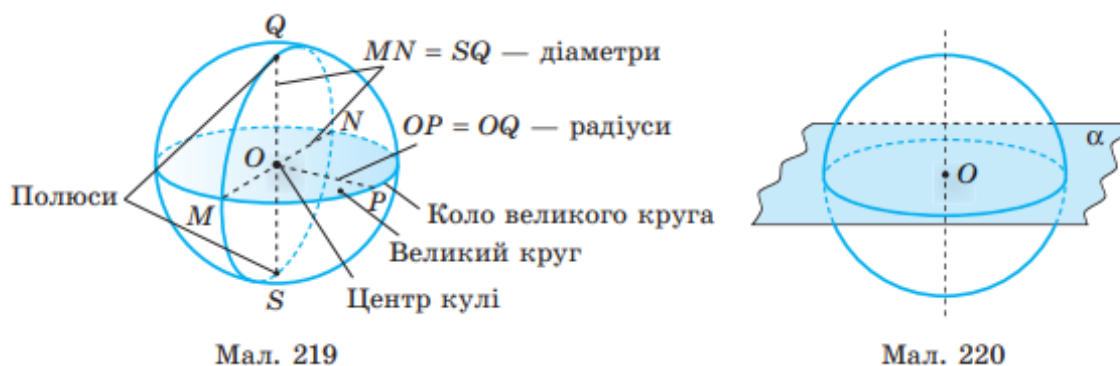


Рисунок 1.6. Рисунки з зображенням кулі та її елементами

Додаткова цікава інформація для мотивації та заохочення учнів до навчання. У рубриці «Історичні відомості» міститься цікава інформація.

Приклади та завдання. Рубрика «Перевірте себе» складається з низки запитань, за допомогою яких учні можуть перевірити, як вони засвоїли новий матеріал, та краще його закріпити. У рубриці «Виконаємо разом» подаються приклади задач із розв'язаннями. У підручнику задачі і вправи поділено на категорії: «Виконайте усно», група А, група Б і «Вправи для повторення».

Задачі, які в різні роки були в ЗНО, позначені відповідним знаком та є особливістю цього підручника. Задачі, запропоновані в підручнику, базуються на реальних даних, на тему збереження та примноження природних ресурсів, безпеки й охорони здоров'я громадян тощо. Такі задачі виділені спеціальними умовними позначеннями.

Узагальнення до кінця розділу або тести після вивчення теми. Для кращого засвоєння матеріалу, перевірки знань та готовності перейти до іншого розділу, у підручнику вміщено такі рубрики: «Самостійна робота», «Скарбничка досягнень і набутих компетентностей», «Тематичні тести».

ПІДРУЧНИК №3

Зміст, логічність та відповідність підручника до навчальної програми. Підручник складається з 2 розділів: «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія». Розділ «Геометрія» має 4 параграфи, кожен складається з пунктів, розташованих в логічному порядку.

Зрозумілість та доступність пояснень матеріалу. Теоретична частина надрукована текстом з різним стилем (жирним шрифтом, жирним курсивом, курсивом), таким чином у книзі виділені основні поняття, правила, твердження. Формули в підручнику виділені блакитним прямокутником. Матеріал поданий зрозуміло та доступно.

Наявність демонстративних зображень. Підручник має багато малюнків з тілами обертання та їх елементами, розгортки тіл обертання, переріз площиною.

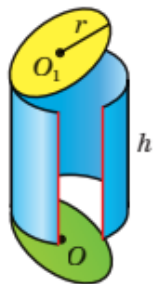


Рис. 19.5

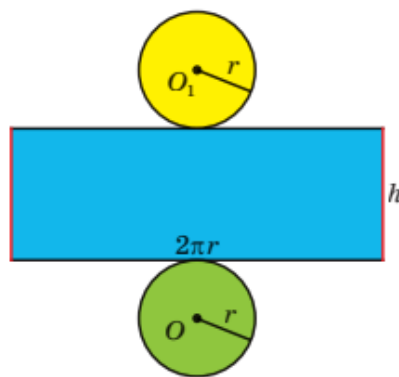


Рис. 19.6

Рисунок 1.7. Розгортка циліндра

Додаткова цікава інформація для мотивації та заохочення учнів до навчання. Крім навчального матеріалу, у підручнику можна знайти розповіді з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

Приклади та завдання. Після теоретичного матеріалу в параграфі є запитання для самоперевірки, вправи з різною складністю, які мають особливі позначення та, що дуже корисно, – вправи для повторення.

Узагальнення до кінця розділу або тести після вивчення теми. Учень може перевірити свої знання, виконавши завдання «Перевірте себе» у тестовій формі. Також в кінці кожного параграфа зібрані головні твердження та формули, що дуже зручно для повторення.

ПІДРУЧНИК №4

Зміст, логічність та відповідність підручника до навчальної програми. Підручник складається з розділів «Алгебра» та «Геометрія». «Геометрія» має 3 розділи. Матеріал має логічну послідовність та відповідає навчальному плану.

Зрозумілість та доступність пояснень матеріалу. Матеріал представлений в доступному вигляді. Параграф починається з представлення довідкової таблиці, які містять основні означення, ознаки та властивості понять

певної теми. Потім є розділ з поясненнями та обґрунтуваннями.

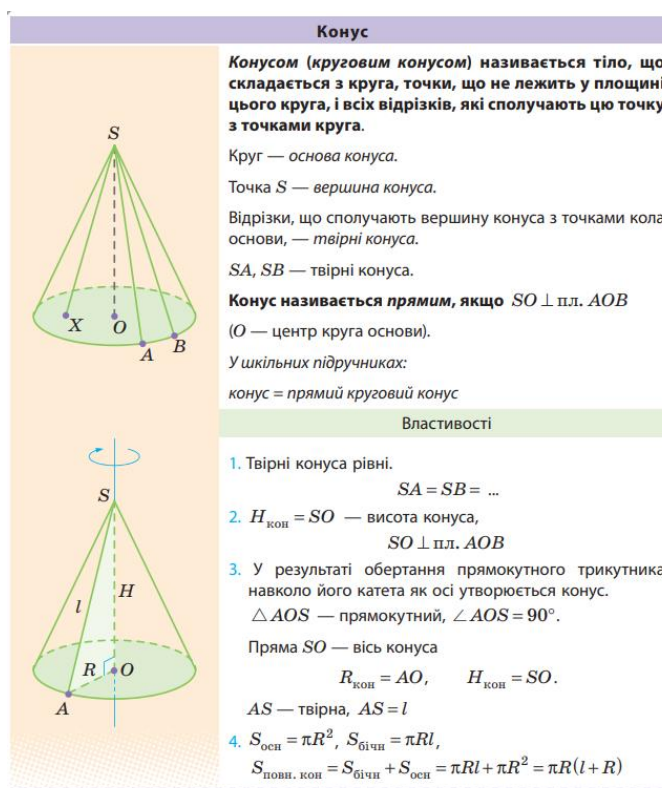


Рисунок 1.8. Довідкова таблиця на початку теми

Наявність демонстративних зображень. Підручник заповнений довідковими таблицями, зображеннями та фотографіями.

Додаткова цікава інформація для мотивації та заохочення учнів до навчання. Матеріали рубрик «Відомості з історії» та «Видатні постаті в математиці» допоможуть учням дослідити розвиток математики як науки й дізнатися про досягнення видатних учених України та світу від давнини до сьогодення.

Приклади та завдання. Після теоретичної частини в підручнику наведені приклади розв'язування задач з коментарями, за допомогою яких можна чітко скласти план з розв'язування аналогічних завдань.

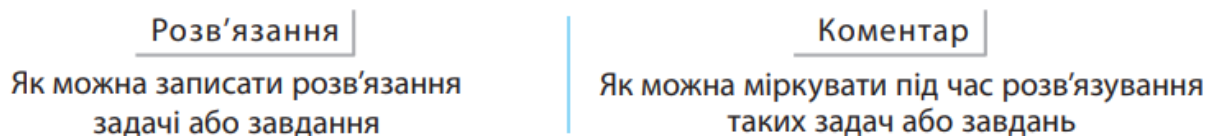


Рисунок 1.9. Приклад розв'язування завдань з коментарями

Звернути увагу на основне та оцінити рівень знань учня допоможе рубрика «Запитання». Вправи поділяються на рівні складності (середній, достатній, високий). «Виявіть свою компетентність» - це завдання, які розраховані на самостійне опрацювання учнями, що сприяють активізації розумової діяльності.

Узагальнення до кінця розділу або тести після вивчення теми. У кінці розділу розташовані «Завдання для підготовки до оцінювання», учні можуть проходити онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua. У підручнику передбачені завдання на роботу в команді «Теми навчальних проєктів».

Можемо зробити висновок, що під час вибору підручника для вивчення тіл обертання в розділі «Стереометрія» ми виділимо та будемо комбінувати матеріал і вправи з різних навчальних посібників. Також необхідно використовувати такі ресурси, як відеоуроки, анімації, онлайн-тестування та комп'ютерні програми, щоб урізноманітнити та зробити освітній процес більш цікавим та зрозумілим.

1.4 Порівняльний аналіз програм та електронних додатків для створення 3D-моделей тіл обертання

Існує багато програм та додатків для 3D-моделювання, серед них найпопулярніші: GeoGebra, Tinkercad, SketchUp, Blender, SolidWorks, 3ds Max. Критеріями оцінювання до вибору 3D програми в освітньому процесі вважаємо: рівень складності, функціональні можливості, вартість. Результати порівняння наведені в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3.

Порівняння програм для 3D-моделювання

Назва програми	Рівень складності	Можливості	Вартість
GeoGebra	Низький	Побудова найпростіших геометричних фігур та графіків, можливість робити різні обчислення	Безкоштовна
Tinkercad	Низький	3D-моделювання простими об'єктами, імпорт готових моделей, Sim Lab, завантаження 3D-моделей для друку	Безкоштовна
Paint 3D	Низький	Створення 2D та 3D графіки, перегляд 3D моделей	Безкоштовна
Blender	Середній	3D-моделювання, анімація, візуалізація, спецефекти	Безкоштовна
SolidWorks	Високий	3D-моделювання, креслення, симуляція	Платна
3ds Max	Високий	3D-моделювання, анімація, візуалізація, спецефекти	Платна

GeoGebra – це безкоштовна динамічна математична програма для побудови графіків, геометрії, наявний 3D калькулятор і багато чого іншого. Має такі переваги: безкоштовне використання, не потребує великих потреб до ПК, є онлайн та офлайн режими, потужний функціонал, наявність української мови, інтерактивний та простий інтерфейс, можливість проводити обчислення. Недоліки програми: велика кількість різних функцій може заважати учням та можуть виникати проблеми з розсіюванням уваги, програма більше підходить для викладачів закладів вищої освіти [3].

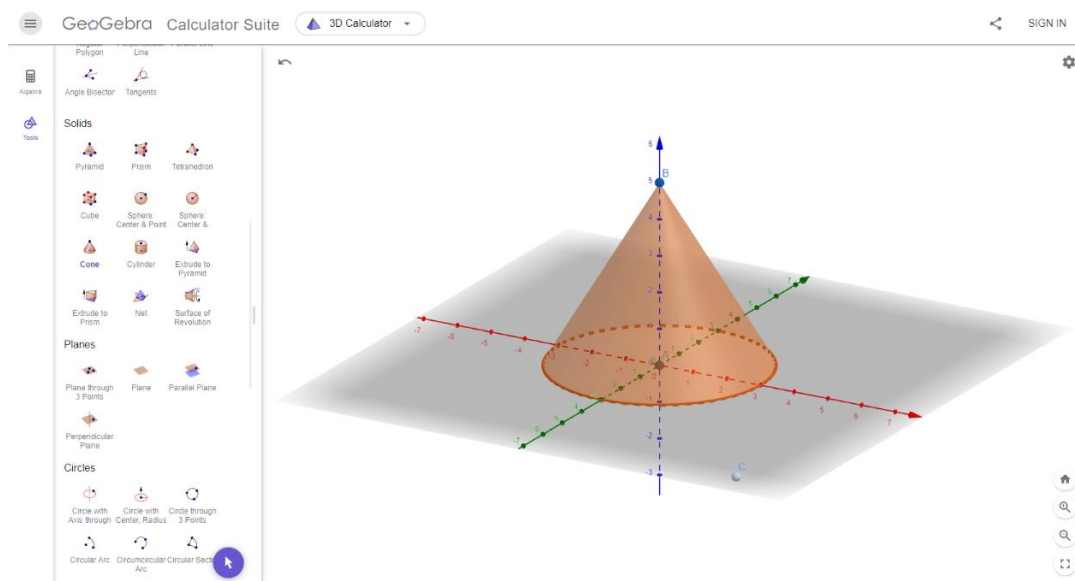


Рисунок 1.10. Інтерфейс розділу 3D Calculator в програмі GeoGebra

Tinkercad – безкоштовна онлайн-програма для 3D-моделювання, проста у використанні. Також сервіс має можливість друкувати 3D-моделі та використовувати електронні компоненти для створення простих електронних пристроїв. Із переваг можна виділити: хмарний ресурс (не займає місце на вашому комп'ютері), не вимогливий до характеристик ПК, програма широко доступна та не потребує завантаження, простий інтерфейс та набір інструментів, можна імпортувати інші моделі для редагування. Із недоліків – за відсутності інтернету програма не працює, мала кількість доступних фігур та обмежена можливість їх модифікацій [26].

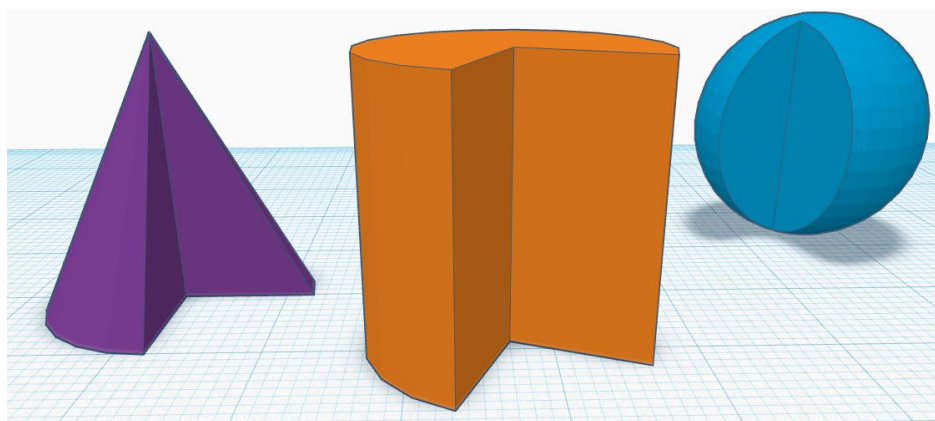


Рисунок 1.11. Фігури створенні в програмі Tinkercad

Paint 3D – це стандартна програма для Windows. Вона надає можливість користувачу малювати, працювати з простими 2D- та 3D-моделями, переглядати вже створені. Можна зробити свої наліпки, додати текст, налаштувати освітлення. Цю програму можна використовувати для наочного показу геометричних фігур, має дуже простий інтерфейс та обмежений функціонал.

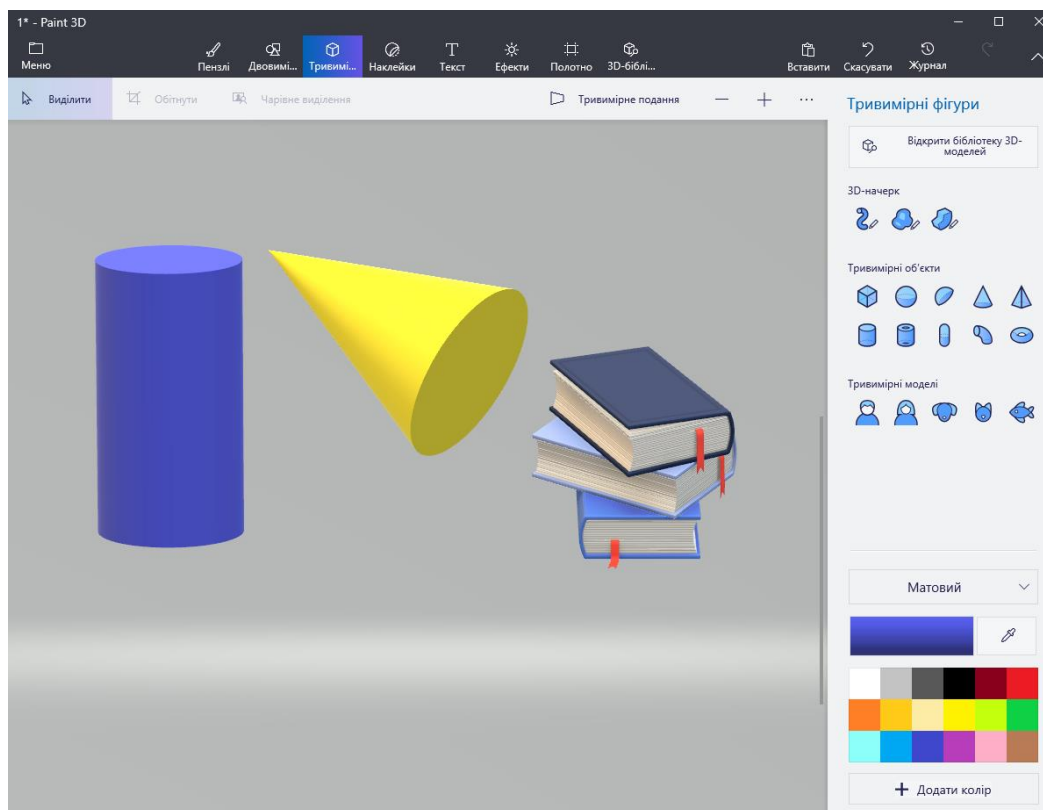


Рисунок 1.12. Інтерфейс програми Paint 3D

Blender – це безкоштовна програма для роботи з 3D-графікою. Blender має всі потрібні функції: 3D-моделювання, анімація, текстурування та набір шейдерів, можливість малювати, візуалізація, скульптинг, базовий відеоредактор, навіть ігровий рушій. Із мінусів можна виділити, що ця програма більш орієнтована на людей, які професійно займаються 3D-графікою, вчителям потрібний буде час, щоб оволодіти цією програмою, також програма потребує певних вимог до ПК [17].

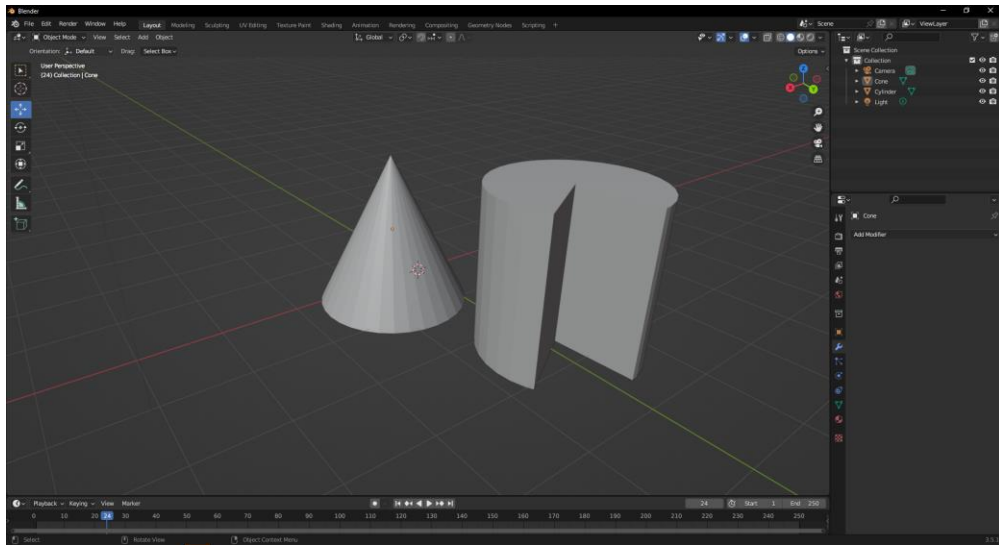


Рисунок 1.13. Інтерфейс програми Blender

SolidWorks — програма призначена для САПР, інженерного проєктування та 3D-моделювання. Має дуже багато функцій, можна створювати моделі по кресленню, технічні деталі для 3D друку, створювати візуалізацію, анімацію та симуляцію готового виробу, працювати з електричними схемами. Програма є складною для навчання та більше підходить для інженерної галузі.

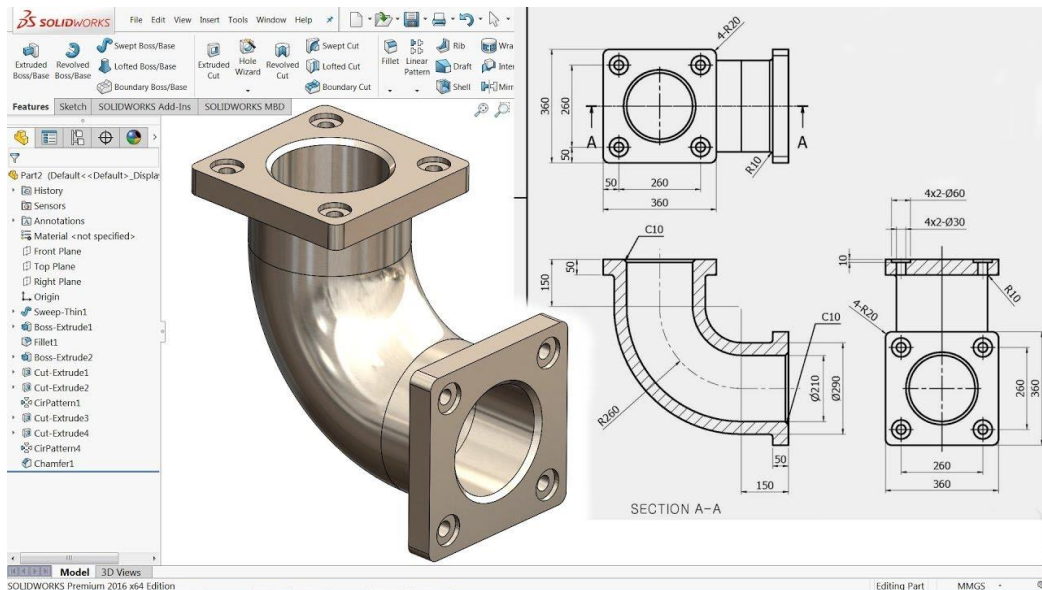


Рисунок 1.14. Інтерфейс програми SolidWorks

Ще одне програмне забезпечення від **Autodesk – 3ds Max**, яке вважається потужним інструментом для створення 3D-моделей, візуалізації та анімації, і зазвичай використовується професіоналами у сфері архітектури та дизайну. Ця програма має всі необхідні базові фігури, велику кількість модифікаторів та плагінів для зручного користування. 3ds Max має інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, всі необхідні функції мають швидкий доступ, що значно полегшує моделювання. Це програмне забезпечення можна придбати або отримати безкоштовну версію для студентів на 3 роки. Однак слід зауважити, що для роботи з цією програмою потрібні високі технічні характеристики комп'ютера, щоб працювати комфортно [1].

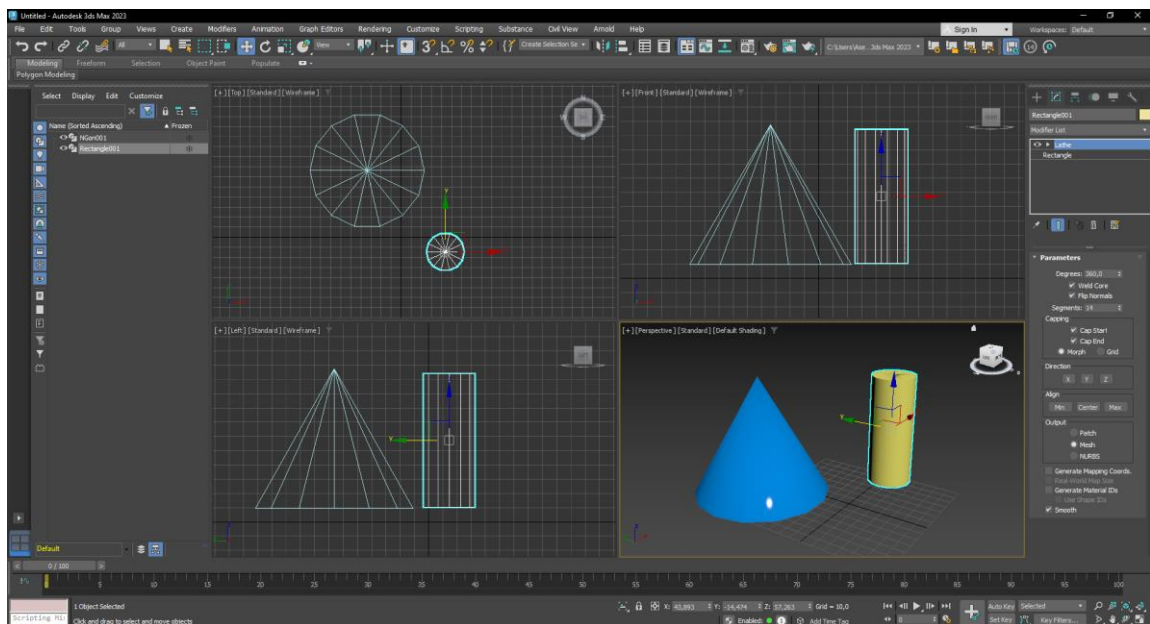


Рисунок 1.15. Створення тіл обертання за допомогою модифікатора Lathe

Tinkercad та GeoGebra є найкращими варіантами для використання в навчанні. Tinkercad більше спрямований на проектування та створення 3D-моделей різних об'єктів. GeoGebra має спеціальний розділ для стереометрії, який дозволяє створювати 3D-моделі геометричних об'єктів, таких як куби, паралелепіпеди, конуси та інші тіла обертання. GeoGebra також має можливість

проведення розрахунків параметрів цих тіл, таких як об'єм, площа поверхні та інші характеристики. Tinkercad корисна програма для створення 3D-моделей тіл обертання з метою їх пізнавального вивчення та аналізу їх конструкції, проте вона не має функцій для математичних розрахунків, які є потрібними для вивчення стереометрії. Це онлайн-сервіс, створений спеціально для освіти та дозволяє користувачам створювати прості 3D-моделі без необхідності встановлювати складні програми на свій комп'ютер. Tinkercad має простий інтерфейс та базовий набір функцій, що робить його легким у використанні для початківців та школярів. Tinkercad є безкоштовним та зручний для навчання. Але кращий варіант – це комбінувати різні програми та використовувати переваги кожної для кращого представлення геометричних фігур.

Висновки до розділу 1

У першому розділі досліджені та детально проаналізовані складники методики навчання математики. Переглянуто розроблений навчально-методичний комплекс, визначено методичні особливості навчання стереометрії в шкільному курсі геометрії 11 класу.

Здійснено логіко-математичний аналіз тіл обертання в курсі стереометрії в 11 класі (стандартний рівень). Вивчення тіл обертання охоплює такі теми: «Циліндр», «Конус», «Куля і сфера», «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл».

Проаналізовані підручники для 11 класу закладів загальної середньої освіти з математики (рівень стандарт) таких авторів: О. Істер; Г. Бевз; А. Мерзляк; Є. Нелін.

Вирішено, що комбінування різних програм з 3D-моделювання покращить якість навчання, може сприяти більш активній участі школярів у навчанні. Що дозволяє учням краще розуміти геометричні форми та їх взаємодію в просторі,

дає змогу створювати власні моделі, досліджувати їх властивості, розвиває креативне мислення та комп'ютерну грамотність. Крім того, використання програм з 3D-моделювання дозволяє створювати різні сценарії та відтворювати різні ситуації, що може сприяти поглибленню знань учнів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ДОДАТКІВ ДЛЯ СТВОРЕННЯ 3D МОДЕЛЮВАННЯ В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

2.1 Основні типи задач для тіл обертання з курсу стереометрії

Розділ «Тіла обертання» у стереометрії містить різні типи задач, які вивчають геометричні властивості та характеристики тіл, що утворюються обертанням певних фігур навколо осі в просторі. Ці типи задач можна поділити на п'ять основних категорій: задачі на доведення, обчислення, побудову, дослідження і прикладні задачі. Розглянемо кожен із цих типів задач більш докладно.

1) Задачі на доведення:

У цих задачах учням запропоновано твердження або співвідношення, що потрібно логічно та математично довести або обґрунтувати, використовуючи властивості тіл обертання та їх геометричні характеристики. Ці задачі спрямовані на перевірку знань учнів щодо теоретичних основ, пов'язаних з тілами обертання та їх спроможність доводити істинність тверджень, діяти за алгоритмом.

Наприклад: довести теорему про об'єм циліндра, конуса та кулі; теорема про площину, яка паралельна площині основи циліндра (конуса); переріз кулі площиною тощо. Нижче наведено декілька теорем:

- Дотична площина до кулі перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
- Якщо два конуси мають рівні висоти й основи рівної площі, то їхні об'єми рівні.
- Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.
- Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту.

- Доведіть, що коли площина α перетинає сферу із центром O по колу із центром O_1 , то $OO_1 \perp \alpha$ [31].

2) Задачі на обчислення:

У таких завданнях дано певні параметри тіла обертання (наприклад, радіус, висота, площа повної поверхні тощо), і учням потрібно знайти невідомі значення цього тіла (наприклад, об'єм, площу поверхні, довжину сторони тощо), використовуючи відомі формули і величини. Ось кілька прикладів таких задач.

Задачі на **знаходження об'єму** тіл обертання. Знаходження об'єму циліндра, конуса, кулі або інших тіл обертання на основі їхніх геометричних параметрів (радіус, висота тощо).

Наприклад:

- Прямокутник зі сторонами a і b ($a > b$) обертається навколо більшої сторони. Визначити об'єм тіла обертання.
- Знайти об'єм конуса, якщо його осьовим перерізом є правильний трикутник зі стороною 6 см [28].
- Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a см [27].

Задачі на **знаходження площ** тіл обертання. Знаходження площі повної поверхні, основи та бічної поверхні, перерізів тіл обертання за відповідними формулами на основі їхніх відомих геометричних даних.

Наприклад:

- Прямокутник зі сторонами 8 см і 10 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть площу повної поверхні отриманого тіла обертання [27].
- Знайдіть площу бічної поверхні конуса радіуса R , осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник [5].
- Кулю, радіус якої 5 см, перетнули площиною, що розміщена на відстані 3

см від центра. Знайти площу перерізу [27].

Задачі на **визначення параметрів** тіла обертання. Знаходження параметрів тіла обертання (наприклад, радіуса, твірної, висоти, довжини відрізків тощо) на основі відомих даних.

Наприклад:

- Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює l і утворює з площиною основи кут α . Визначити радіус циліндра.
- Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а відстань від центра основи до твірної конуса – 12 см. Знайдіть твірну та висоту конуса [31].
- Площина проходить через центр сфери й перетинає її по колу, довжина якого дорівнює 6π . Знайдіть діаметр сфери [35].

3) Задачі на побудову:

Задачі на побудову в темі «Тіла обертання» передбачають створення геометричних об'єктів або конструкцій на площині чи в просторі, використовуючи властивості та параметри різних тіл обертання. Використання програм з 3D-моделювання може бути корисним для побудови геометричних об'єктів та тіл обертання, адже це допоможе розвинути просторову уяву та полегшить розв'язування задач. Це дозволяє учням бачити, як виглядають ці тіла у тривимірному просторі.

В більшості програмах з елементами 3D-моделювання, таких як Paint 3D, 3Ds Max, GeoGebra або Tinkercad можна створити будь-яку фігуру, натиснувши іконку із написом або зображенням моделі, яку потрібно (рис. 2.1).

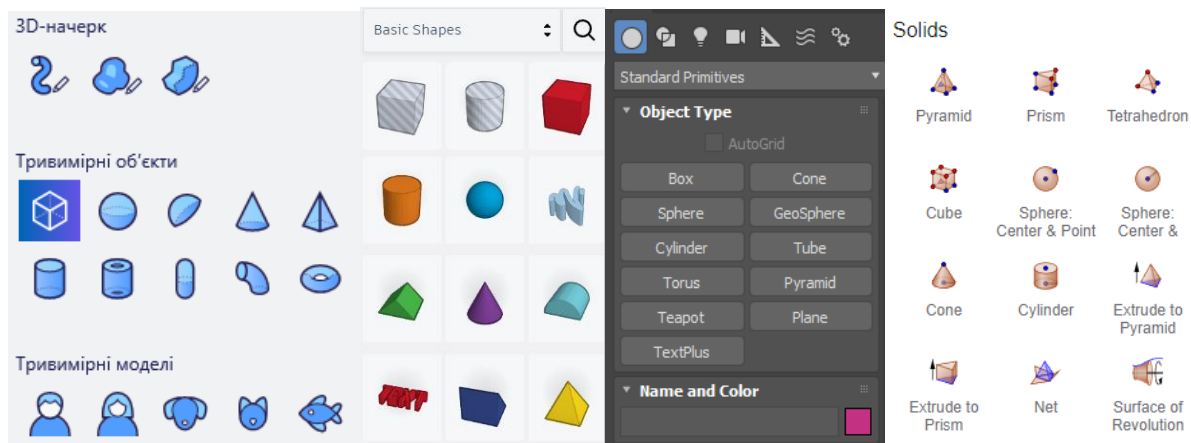


Рисунок 2.1. Вибір тривимірних об'єктів у різних програмах

Задачі на **обертання тіла навколо вісі**. Утворення тіла обертання, коли певна фігура обертається навколо певної осі.

Наприклад:

Установіть відповідність між фігурою (1-4) і тілом обертання (А-Д), утвореним унаслідок обертання цієї фігури навколо прямої, зображеної пунктиром (рис. 2.2) [27].

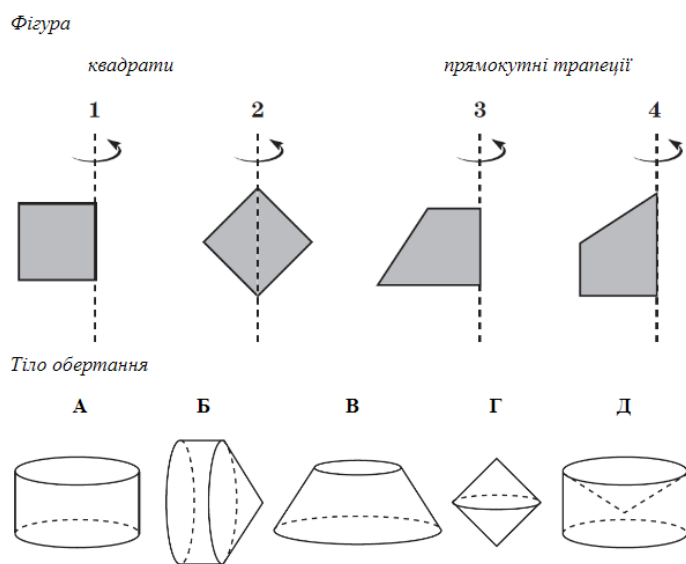
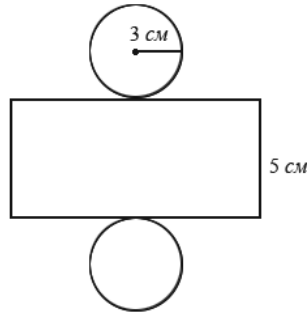


Рисунок 2.2. Завдання на відповідність між фігурою і тілом обертання

Задачі з розгорткою тіл обертання (рис. 2.3).

На рисунку зображено розгортку циліндра. Знайдіть його об'єм.



На рисунку зображено розгортку конуса. Визначте відношення площі повної поверхні цього конуса до площі його бічної поверхні.

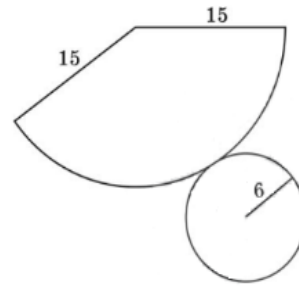


Рисунок 2.3. Задачі з використанням розгортки тіл обертання

4) Задачі на дослідження:

У таких задачах запропоновані тіла обертання або їх значення та параметри, які потрібно дослідити, їхні властивості або характеристики, наприклад: знайти відношення між площами, об'ємами, сторонами, радіусами тощо. Дослідницькі задачі можуть стимулювати учнів аналізувати властивості тіл обертання та проводити експерименти з різними параметрами цих тіл. Вони можуть досліджувати залежності між різними параметрами та робити висновки.

Задачі на знаходження співвідношень:

- У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок. Визначте відношення об'єму води, яка залишилась у склянці, до об'єму води, яка вилілася зі склянки.
- Радіус основи конуса дорівнює 4, його висота – h , а твірна – l . Укажіть серед наведених правильне співвідношення для h і l [27].
(А: $16+h^2=l^2$, Б: $4+h=l$, В: $16-h^2=l^2$, Г: $h^2-l^2=16$, Д: $8+h^2=l^2$)
- Об'єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їх поверхонь? [27]

5) Прикладні задачі:

Прикладні задачі передбачають застосування знань про тіла обертання для розв'язання реальних ситуацій за допомогою математичних засобів. Наприклад, вивчення та розробка нових архітектурних форм для споруд, задачі на розрахунок обсягу зберігання рідини в резервуарі, розрахунок необхідної кількості матеріалу. Розв'язання таких задач допомагає учням зрозуміти і застосовувати геометричні концепції в практичних ситуаціях.

Наприклад:

- Купа піску має форму конуса, довжина кола основи якого дорівнює 25,12 м, а твірна — 5 м. Скільки автомобілів вантажопідйомністю 3 т потрібно для її перевезення, якщо маса 1 м³ становить 2 т?
- При побудові міського водогону довжина 3 км були використанні труби діаметром 60 см. Визначити об'єм землі, яку треба вивезти при укладанні водогону.
- Редукційний клапан двигуна автомобіля ГАЗ 53 має форму кулі діаметром 8 мм. Знайти об'єм клапана.

Це лише деякі загальні типи задач, пов'язаних із тілами обертання в стереометрії, які можуть комбінуватися. Кожна конкретна задача може мати свої особливості та потребувати використання відповідних формул, знань і методів розв'язання.

2.2 Застосування 3D-моделей для розв'язання задач з стереометрії

Застосування 3D-моделей для розв'язування задач з стереометрії допомагає учням краще візуалізувати об'ємні тіла.

Перегляд тіла з різних кутів та проєкцій. Учні створюють тривимірні об'єкти та переглядають їх у віртуальному просторі. Таким чином учню легше

увявити форму, розмір та положення об'єктів, що розглядаються, це робить навчання більш ефективним.

Вирішення складних задач. Важкі завдання зі стереометрії можуть стати більш зрозумілими, коли учні зможуть маніпулювати 3D-моделями. Правильно побудувати тіло та його перерізи, розрахувати площу або об'єм за допомогою відповідних формул та інструментів програми. 3D-моделі дозволяють створювати і відображати об'єкти, які важко або неможливо створити в реальному житті (наприклад, гіпотетичні геометричні форми). Це дає можливість вивчати абстрактні концепції і властивості геометричних об'єктів.

Дослідження властивостей об'єктів. Використання 3D-моделей дозволяють учням проводити дослідження. Наприклад, вони можуть вивчати, як змінюється об'єм циліндра при зміні радіуса або висоти. На відміну від рисунку у зошиті, який є плоским. Додатковою незручністю є те, що потрібно постійно креслити одне і теж саме тіло в зошиті багато разів.

Практичні застосування. 3D-моделі можуть допомагати учням розуміти практичні застосування стереометрії у реальному житті, такі як розрахунки об'ємів резервуарів, матеріалів для будівництва, розробка дизайну виробів тощо. Використання 3D-моделей може мати практичний застосунок у багатьох галузях, включаючи інженерію, архітектуру, медицину тощо. Учні, які володіють навичками роботи з 3D-моделями, можуть легше розв'язувати реальні завдання.

Загалом, використання 3D-моделей у стереометрії робить навчання більш інтерактивним та захопливим, допомагаючи учням краще розуміти та застосовувати геометричні концепції у практичних ситуаціях. Детальніше розглянемо та розв'яжемо всі 5 основних типів задач: задачі на доведення, обчислення, побудову, дослідження і прикладні задачі.

Задачі на доведення:

Теорема 2.1. Якщо два конуси мають рівні висоти й основи рівної площі, то їхні об'єми рівні.

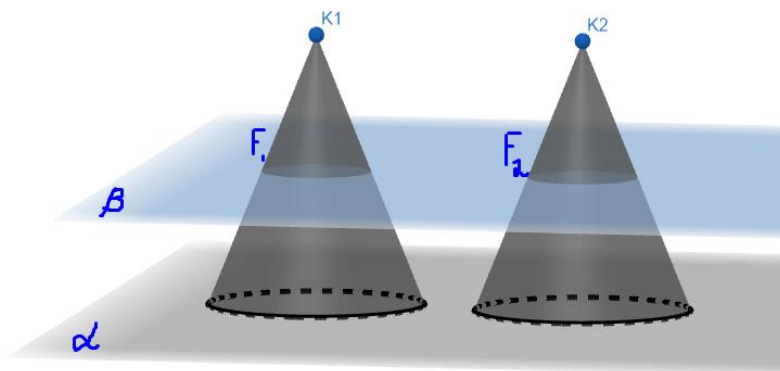


Рисунок 2.4. Рисунок до теореми 2.1

Доведення. Нехай конуси K_1 і K_2 мають висоти, що дорівнюють H , а основи площею S розташовані в одній площині α (рис.2.4). Проведемо площину β , паралельну площині α , на відстані x від неї ($0 < x < H$). Тоді фігури F_1 і F_2 , що утворюються в перерізах конусів площиною β , подібні відповідним основам, і коефіцієнт подібності k в обох випадках дорівнює відношенню висот відповідних конусів: $k=(H-x):H$. Отже, площі S_1 і S_2 фігур F_1 і F_2 відповідно виражаються формулами $S_1=k^2 \cdot S$, $S_2=k^2 \cdot S$, тобто вони рівні. Згідно з принципом Кавальєрі маємо, що об'єми конусів рівні.

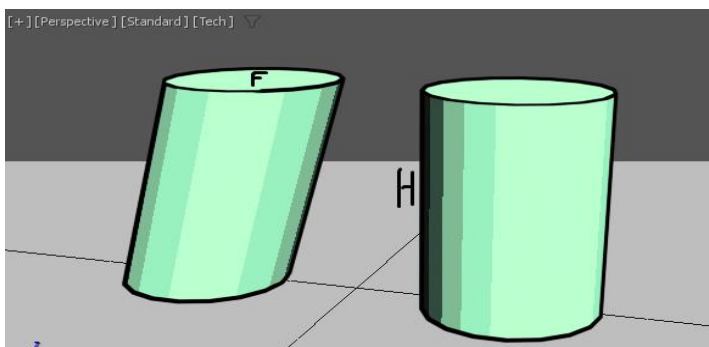


Рисунок 2.5. Ілюстрація теореми 2.2

Теорема 2.2. Об'єм похилого циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Доведення. Для заданого похилого циліндра з основою F , площа якої дорівнює S , і висотою H

розглянемо прямий циліндр із такою самою основою й висотою. Розташуємо ці

два циліндри так, щоб їх основи лежали в одній площині (рис. 2.5). Тоді перерізи цих циліндрів площинами, паралельними цій площині, дадуть фігури, що дорівнюють фігурі F , отже, вони матимуть рівні площі. За принципом Кавальєрі маємо рівність об'ємів циліндрів, а отже, для обчислення об'єму похилого циліндра можна скористатися тією самою формулою, що й для обчислення об'єму прямого циліндра: $V=S \cdot H$, де S — площа основи, H — висота циліндра.

Теорема 2.3. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину.

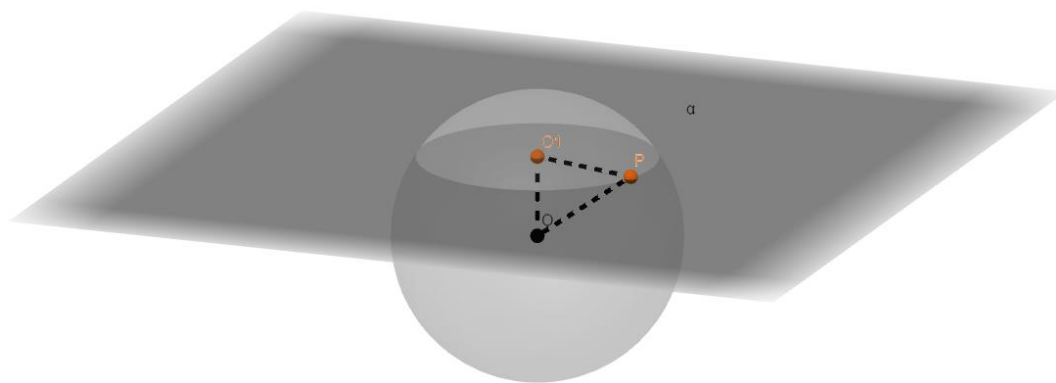


Рисунок 2.6. Рисунок до теореми 2.3

Доведення. Нехай α — січна площина й O — центр кулі (рис. 2.6). Проведемо перпендикуляр із центра кулі на площину α і позначимо через O_1 основу цього перпендикуляра. Нехай P — довільна точка кулі, що належить площині α . За теоремою Піфагора $OP^2 = OO_1^2 + O_1P^2$. Оскільки відстань OP не більша за радіус R кулі, то $O_1P \leq \sqrt{R^2 - OO_1^2}$. Маємо: довільна точка перерізу кулі площиною α розташована від точки O_1 на відстані, не більшій $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$, отже, вона належить кругу з центром O_1 і радіусом $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$. І навпаки: будь-яка точка P цього круга належить кулі. А це означає, що перерізом кулі площиною α є круг із центром у точці O_1 .

Задачі на обчислення:

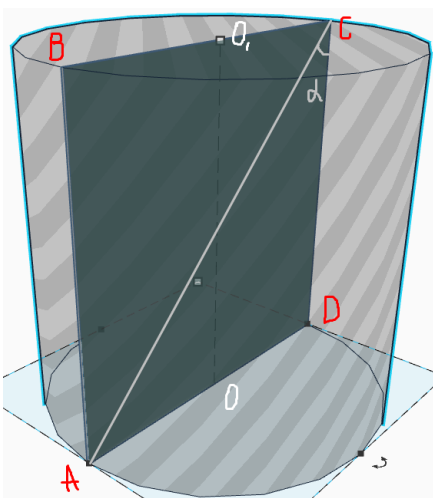


Рисунок 2.7. Ілюстрація задачі 2.1

Задача 2.1. Кут між твірною циліндра і діагоналлю осьового перерізу дорівнює 60° , площа основи циліндра дорівнює $\sqrt{3}$. Визначити площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, одна сторона якого є діаметром основи, інша сторона – твірній циліндра (рис. 2.7).

Для того, щоб знайти $S_{\text{б}} = 2\pi RH$, визначимо R і H .

Нехай перерізом є прямокутник $ABCD$, у якому сторона $AD = D = 2R$. Знайдемо

R з формули $S_0 = \pi R^2$, де $R = \sqrt{\frac{S_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{1.31}{1.77} = 0.74$. $AD = 2R = 1.48$ см.

Із $\triangle ADC$ ($\angle D = 90^\circ$) маємо: $CD = \frac{AD}{\text{tg}\alpha} = \frac{1.48}{\sqrt{3}} = 0.86$ см.

$CD = OO_1$, $S_{\text{б}} = 2\pi RH = 6.28 \cdot 0.74 \cdot 0.86 = 4$ см².

Задача 2.2. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 7 см і 15 см, а його твірна – 10 см. Знайдіть висоту конуса.

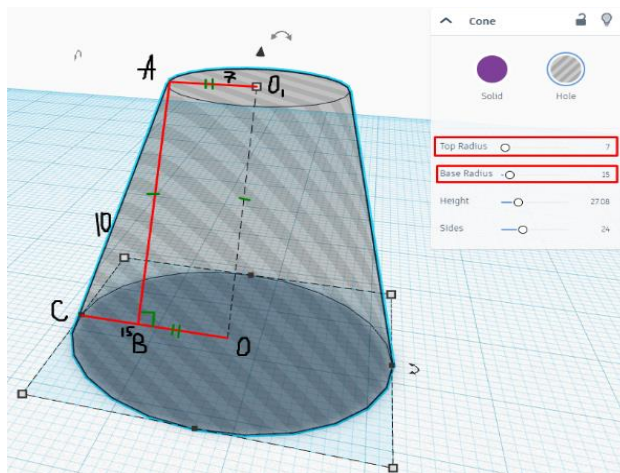


Рисунок 2.8. Рисунок до задачі 2.2

Розв'язання. Створимо конус з відповідними параметрами в Tinkercad, проведемо перпендикуляр з точки А до ОС та позначимо точки і параметри (рис. 2.8). Маємо зрізаний конус, де $OO_1 = H$ – висота зрізаного конуса і радіуси AO_1 та CO зі значеннями 7 см і 15 см відповідно.

Оскільки висота OO_1 перпендикулярна до площини основи зрізаного конуса, то вона перпендикулярна до кожної прямої, що лежить в цих площинах ($OO_1 \perp A_1O_1$). Звідси ми можемо зробити висновок, що чотирикутник CAO_1O є прямокутною трапецією, де $AO_1=BO=7$ см та $AB=O_1O$, тоді $BO=CO-BO=15-7=8$ см.

У прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle B=90^\circ$) знайдемо катет AB , з теореми Піфагора $AB^2=AC^2-BC^2=100-64=36$, отже $AB=6$ см, звідси $H = OO_1 = AB=6$ см.

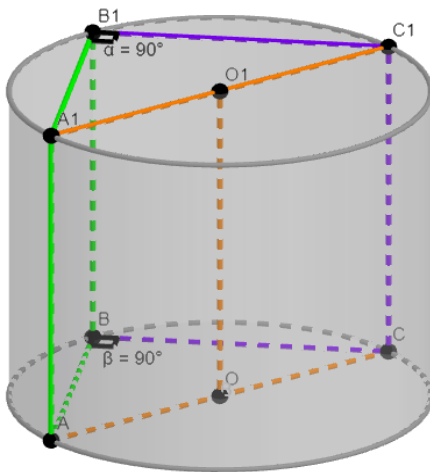


Рисунок 2.9. Ілюстрація задачі 2.3

Задача 2.3. Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи циліндра, площі яких дорівнюють 60 см^2 і 80 см^2 . Знайти площу осевого перерізу.

Розв'язання. Маємо циліндр (рис. 2.9), у якому через твірну BB_1 проведено два взаємно перпендикулярні перерізи з відомими площами:

$$S_{ABB_1A_1} = 60 \text{ см}^2, S_{CBB_1C_1} = 80 \text{ см}^2.$$

Твірні $AA_1 = BB_1 = CC_1 = OO_1 = H$ (висоті циліндра).

Площі прямокутників знаходимо за формулою:

$$S_{ABB_1A_1} = AA_1 \cdot AB = 60 \text{ см}^2, \text{ звідси } AB = \frac{S}{h} = \frac{60}{h}$$

$$S_{CBB_1C_1} = CC_1 \cdot CB = 80 \text{ см}^2, \text{ звідси } CB = \frac{S}{h} = \frac{80}{h}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle B=90^\circ$), де сторони AB і CB – катети, а AC – гіпотенуза, яка є діаметром осевого перерізу циліндра. За теоремою Піфагора, знайдемо гіпотенузу AC :

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 = \left(\frac{60}{h}\right)^2 + \left(\frac{80}{h}\right)^2 = \frac{3600}{h^2} + \frac{6400}{h^2} = \frac{10000}{h^2}, \quad AC = \frac{100}{h}$$

Осьовим перерізом циліндра є прямокутник AA_1C_1C , площа якого дорівнює $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = AC \cdot h = \frac{100}{h} \cdot h = 100 \text{ (см}^2\text{)}$.

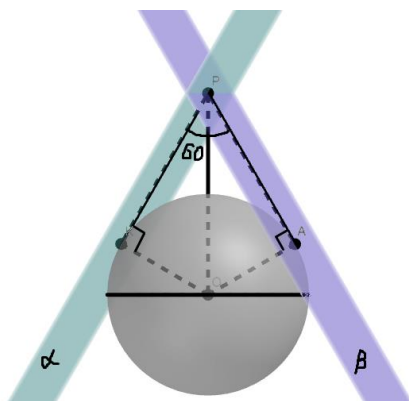


Рисунок 2.10. Ілюстрація задачі 2.4

Задача 2.4. Через точку, що не лежить на сфері, проведено дві площини, які дотикаються до сфери. Знайти відстань від центра сфери до лінії перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює 60° , а площа поверхні сфери – $32\pi \text{ см}^2$.

Розв'язання. Маємо сферу з центром O та точку T ,

яка не належить сфері, через яку проведено дві площини α і β , які дотикаються до сфери в точках K , A відповідно (рис. 2.10) і утворюють кут $\angle P = 60^\circ$. Маємо відому площу поверхні сфери $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$, де $R^2 = \frac{S_{\text{сф}}}{4\pi} = \frac{32\pi}{4\pi} = 8$, $R = 2,8 \text{ см}$ – радіус сфери.

Проведемо радіуси сфери (OK , OA) з центру перпендикулярні до дотичних площин α і β . Маємо $OK = OA = R = 2,8 \text{ см}$. До точки P проведемо перпендикуляри KP і AP .

Розглянемо $\triangle OAP$ ($\angle A = 90^\circ$), де сторони OA і PA – катети, а OP – гіпотенуза та відстань від точки P до центру O . Маємо $\angle APO = 30^\circ$, оскільки $\angle APK = 60^\circ$, а PO – бісектриса кута APK . Знайдемо OP за допомогою співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.

Отже $\sin \angle APO = \frac{AO}{PO}$, де $PO = \frac{AO}{\sin 30^\circ} = 2,8 \cdot 2 = 5,6$. Отже, $OP = 5,6 \text{ см}$ – відстань від центра O до лінії перетину площин α і β .

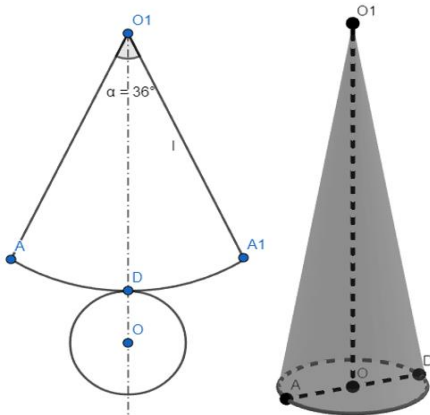


Рисунок 2.11. Ілюстрація задачі 2.5

Задача 2.5. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 10 см^2 і розгортається у сектор з кутом 36 . Знайти у квадратних сантиметрах площу повної поверхні конуса.

Розв'язання. Маємо конус (рис. 2.11) з площею бічної поверхні $S_{\text{бп}} = 10 \text{ см}^2$. Площа сектора дорівнює площі бічної поверхні, де $S_{\text{сектора}} = 0,5LR$,

де радіус сектора R дорівнює довжині твірної l конуса ($R=l$), а дуга L обчислюють за формулою довжини кола основи $L=2\pi R$. Відомо, що площа основи конуса знаходимо як площу круга: $S_{\text{осн}} = \pi R^2$. Знайдемо площу сектора з кутом α :

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi l^2 \cdot \alpha}{360^\circ}, \text{ оскільки } R=l, \text{ тоді}$$

$$S_{\text{бп}} = S_{\text{сектора}} = \frac{\pi l^2 \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi l^2 \cdot 36^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi l^2}{10}, \text{ де } \pi l^2 = 10^2, \text{ отже } l^2 = \frac{10^2}{\pi}, l = \frac{10}{\sqrt{\pi}} - \text{довжина}$$

твірної конуса. З формули знаходження площі бічної поверхні знайдемо радіус R

$$\text{основи: } S_{\text{бп}} = \pi R l = \pi \cdot R \cdot \frac{10}{\sqrt{\pi}}, \text{ де } R = \frac{S_{\text{бп}}}{\pi l} = \frac{10}{10\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{Знайдемо площу основи: } S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1 \text{ см}^2.$$

$$\text{Площу повної поверхні знаходимо за формулою: } S_{\text{пп}} = S_{\text{бп}} + S_{\text{осн}} = 10 + 1 = 11 \text{ см}^2.$$

Задачі на побудову:

Задача 2.6. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину на відстані 3 см від неї. Ця площина перетинає основу циліндра по хорді, яка дорівнює 8 см. Знайти радіус циліндра.

Задача може здатися достатньо важкою, але якщо правильно накреслити малюнок, то стане все одразу зрозуміло.

Розв'язання. Поетапно розглянемо побудову циліндра в програмі Geogebra. Для початку переходимо в розділ «3D Calculator». У розділі Tools обираємо Cylinder, для того щоб створити циліндр, потрібно поставити дві точки, що будуть його віссю (OO_1) і ввести довільний радіус (рис.2.12).

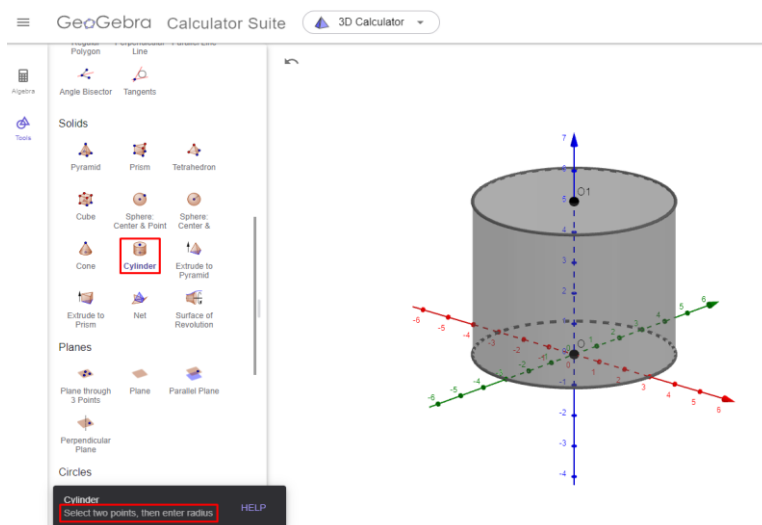


Рисунок 2.12. Будуємо циліндр в GeoGebra

Тепер створимо площину, паралельну до осі. Для цього створимо 2 довільні точки (Point) на верхній основі циліндра A і B. За допомогою інструмента Perpendicular Line проведемо перпендикуляри через точки A і B (рис.2.13).

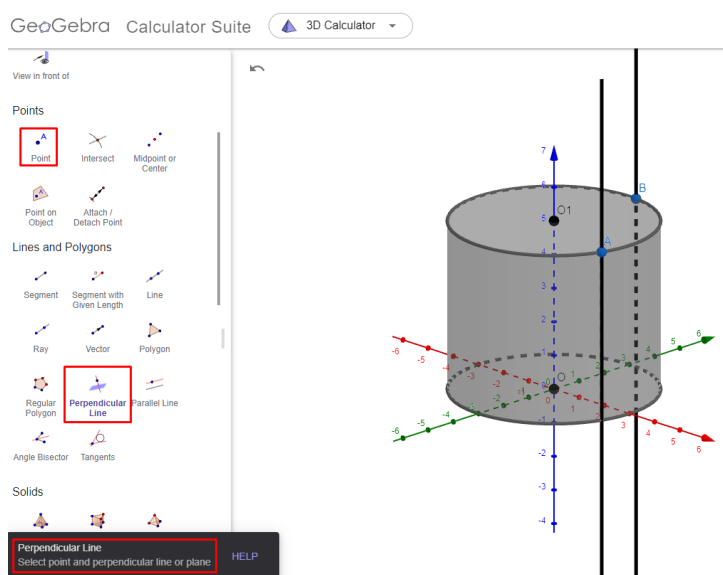


Рисунок 2.13. Проведемо перпендикуляри в GeoGebra

На наступному етапі ставимо точки, де перпендикуляр перетинає нижню основу циліндра, потім з'єднуємо точки інструментом Segment, таким чином отримуємо площину. За допомогою Midpoint or Center знайдемо середину хорд AB і CD, проведемо лінію між цими серединами (рис. 2.14).

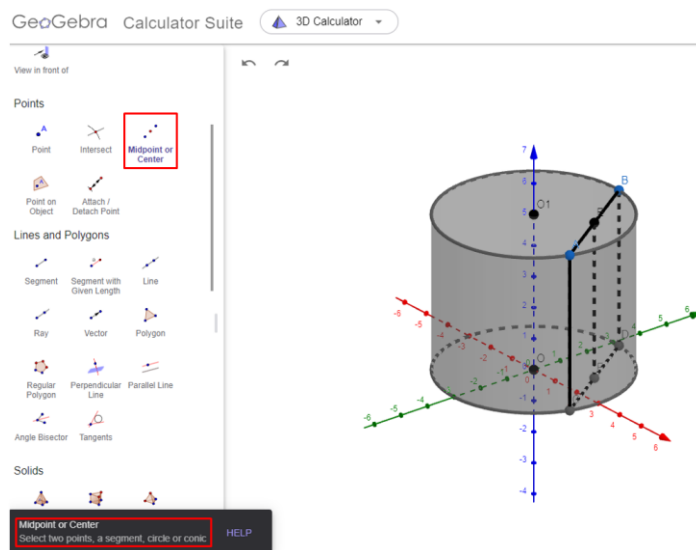


Рисунок 2.14. Побудова осьового перерізу циліндра в GeoGebra

У нижній основі циліндра проведемо лінії (рис. 2.15) відповідно до умови задачі (відстань від осі до площини - OF , радіуси – OC і OD).

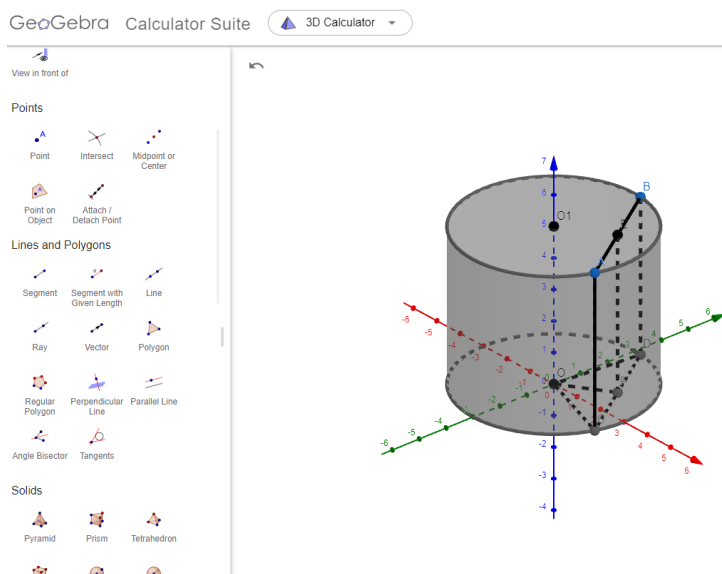


Рисунок 2.15. Проведення додаткових ліній в GeoGebra

Маємо 3D циліндр, можна покрутити та подивитися фігуру з різних боків (рис. 2.16). З виду зверху можемо побачити, що $\triangle COD$ – рівнобедрений трикутник, а $\triangle CFO$ і $\triangle DFO$ – прямокутні трикутники, маємо хорду CD , де $CF=DF=0.5 \cdot CD=4$ см. З прямокутника $\triangle CFO$ ($\angle F = 90^\circ$), знайдемо OC , що є гіпотенузою та радіусом для циліндра. За теоремою Піфагора $OC^2=OF^2+CF^2=9+16=25$, $R=OC=5$ см.

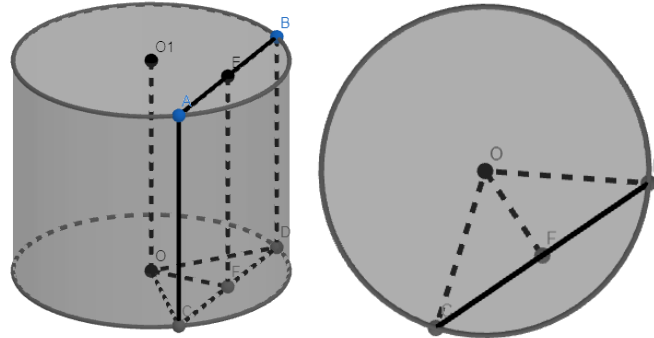


Рисунок 2.16. Проведемо перпендикуляри в GeoGebra

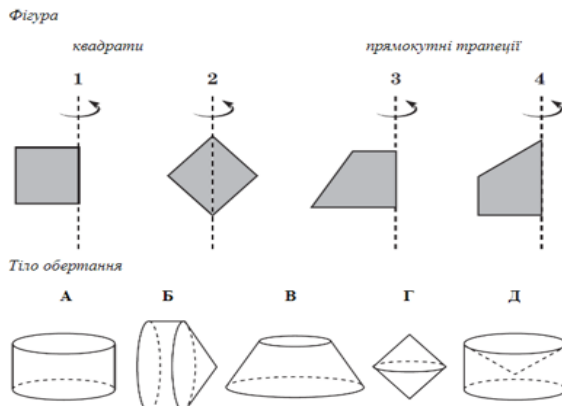


Рисунок 2.17. Ілюстрація задачі 2.7

Задача 2.7. Установіть відповідність між фігурою (1-4) і тілом обертання (А-Д), утвореним унаслідок обертання цієї фігури навколо прямої, зображеної пунктиром (рис. 2.17).

Розв'язання. У цій задачі потрібно візуалізувати тіло обертання, яке вийде в

результаті. Потренуватися можна в різних програмах, але наведемо приклад як зробити в 3Ds Max.

Спочатку на панелі справа потрібно обрати категорію Splines (сплайни). А далі обрати фігуру або форму, з якої ви хочете отримати фігуру обертання.

Спочатку оберемо Rectangle та задамо параметри 40x40, далі NGon (Radius 25, Sides 4), більш нестандартні фігури створимо за допомогою Line, всі фігури

зручніше креслити в проєкції Front (рис. 2.18). Для побудови рівних відрізків затискаємо Shift, також точки можна вирівняти інструментом Snaps Toggle.

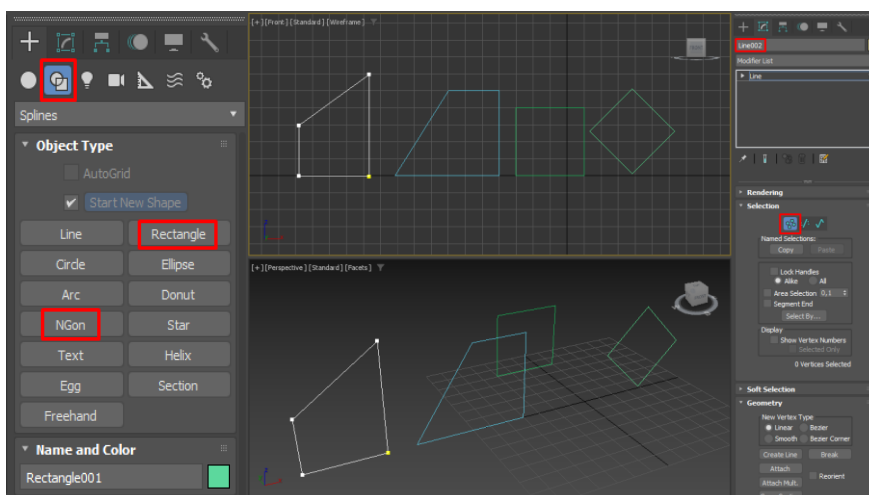


Рисунок 2.18. Побудуємо фігури для обертання в 3Ds Max

У вкладці Modify використаємо модифікатор Lathe (обертання) для створення об'єктів шляхом обертання сплайну навколо центральної осі. В налаштуваннях можна обрати Direction і Align. За необхідності можемо перемістити вісь симетрії натиснувши на ► біля модифікатора (обрати Axis і перемістити по потрібній осі). Таким чином можна тренуватися створювати різні тіла обертання (рис. 2.19).

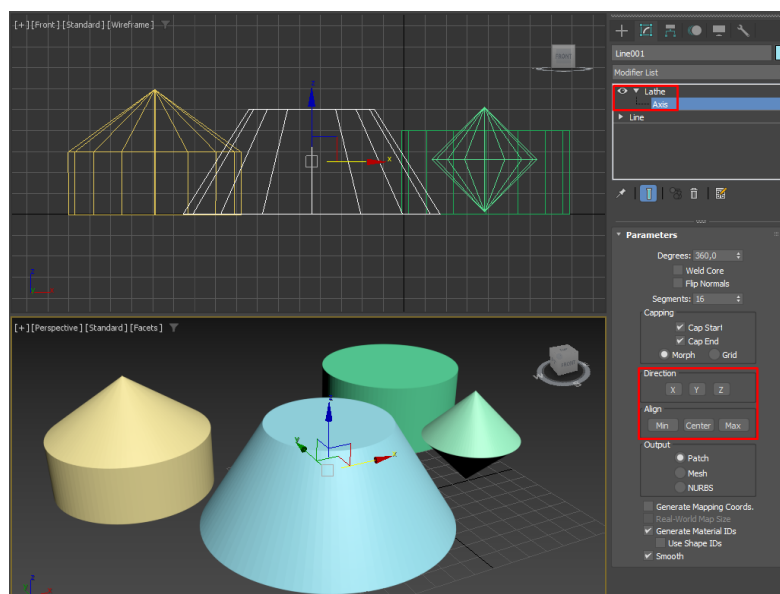


Рисунок 2.19. Застосовуємо модифікатор обертання для створених в 3Ds Max

Отже, можемо встановити відповідність: 1 – А (отримуємо циліндр), 2 – Г (конуси з спільною основою), 3 – В (зрізаний конус), 4 – Б (циліндр і конус зі спільною основою).

Задача 2.8. Побудова вписаних і описаних фігур.

Досить багато задач з вписаними та описаними тілами обертання, на такі рисунки учні витрачають достатньо багато часу, тому розглянемо, як можна створити рисунок у програмі GeoGebra і Tinkercad.

Розв'язання. У Tinkercad обираємо базові форми та накладаємо одну на одну за правилами: Куля є описаною навколо конуса, якщо вершина конуса і коло його основи знаходяться на поверхні кулі. Куля є вписаною в циліндр, якщо торкається основ циліндра [16].

У Tinkercad є дуже зручна сітка, за допомогою якої можна перевіряти правильність побудови, також тіла можна робити як прозорими, так і заповнювати кольором (рис. 2.20).

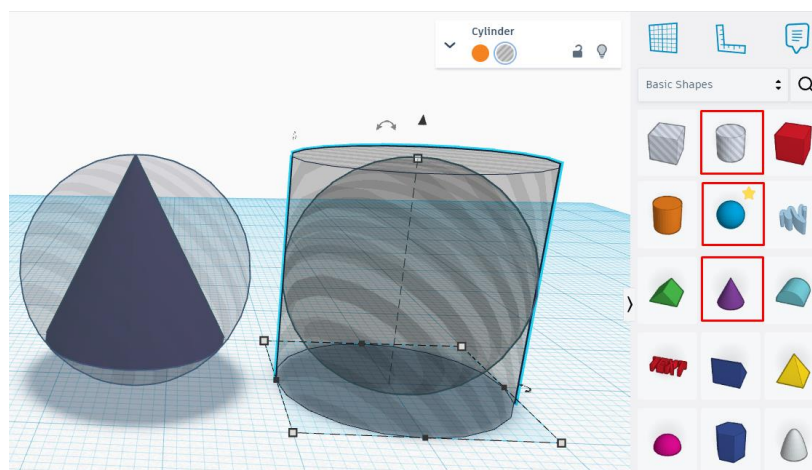


Рисунок 2.20. Побудова вписаних і описаних тіл в Tinkercad

У GeoGebra дуже просто побудувати вписані та описані тіла (рис. 2.21). Для цього будуємо, наприклад, циліндр (спочатку точка нижньої основи, потім верхньої і задаємо радіус), наступним кроком знаходимо середину осі циліндра і

створюємо кулю (центр і радіус). У програмі можна активувати функцію прив'язки до сітки та до інших поверхонь, тож точками легко маніпулювати.

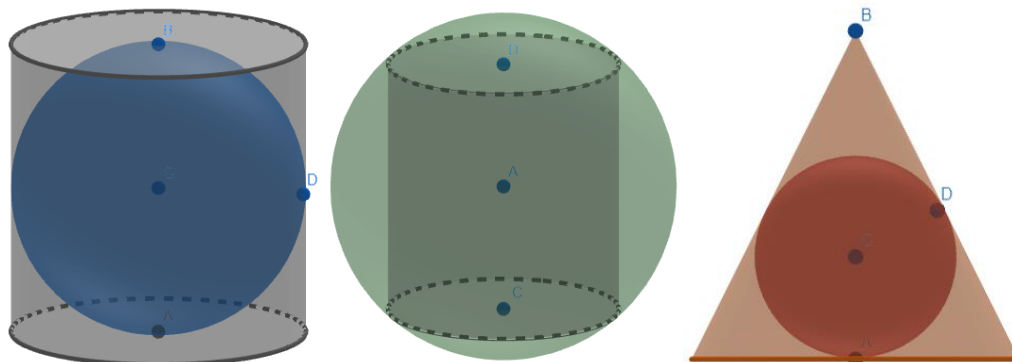


Рисунок 2.21. Побудова вписаних і описаних тіл в GeoGebra

Задачі на дослідження:

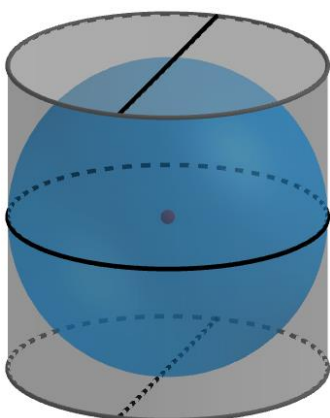


Рисунок 2.22. Ілюстрація задачі 2.9

Задача 2.9. У склянці циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок (рис. 2.22). Визначте відношення об'єму води, яка залишилась у склянці, до об'єму води, яка вилася зі склянки.

Розв'язання. Склянку циліндричної форми – позначимо як циліндр, а металеву кульку – кулею вписаною в циліндр.

Радіус кулі дорівнює R , а радіус основи циліндра – R і висота циліндра $H=2R$.

Знайдемо об'єм кулі та циліндра за формулами:

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3, V_{\text{циліндра}} = \pi R^2 H = 2\pi R^3$$

Об'єм води, що залишилась у склянці дорівнює різниці об'єму $V_{\text{циліндра}}$ і об'єму води, що вилася ($V_{\text{кулі}}$).

$$V_{\text{циліндра}} - V_{\text{кулі}} = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3. \text{ Отже } \frac{V_{\text{циліндра}} - V_{\text{кулі}}}{V_{\text{кулі}}} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

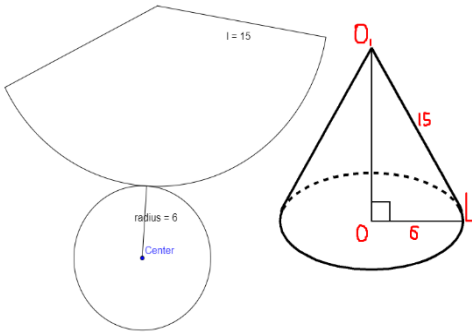


Рисунок 2.23. Ілюстрація задачі 2.10

Задача 2.10. На рисунку зображено розгортку конуса. Визначте відношення площі повної поверхні цього конуса до площі його бічної поверхні.

Розв'язання. Згідно з зображенням (рис. 2.23), маємо твірну конуса $l=15$ та радіус основи $R=6$.

Площа бічної поверхні дорівнює: $S_{\text{бп}}=\pi Rl$, тоді площа повної поверхні конуса: $S_{\text{пп}}=S_{\text{бп}}+S_{\text{осн}}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R(l+R)$.

Визначимо відношення площі: $\frac{S_{\text{пп}}}{S_{\text{бп}}} = \frac{\pi R(l+R)}{\pi Rl} = \frac{l+R}{l} = \frac{21}{15} = 1,4$.

Задача 2.11. Площина β проходить через точку A , розташовану на поверхні кулі. Відстань від центра цієї кулі до площини β дорівнює d (d менше радіуса кулі, $d \neq 0$). Радіус кулі, проведений в точку A , утворює з площиною β кут α .

1. Зобразіть переріз кулі площиною β і укажіть на рисунку відстань d .
2. Обґрунтуйте положення кута α .
3. Визначте площу цього перерізу.

Розв'язання. Переріз кулі площиною утворює круг, тому побудуємо переріз β , який проходить через точку A , розташовану на поверхні кулі (рис. 2.24). Позначимо центр круга перерізу точкою M і проведемо відрізок до точки O центра кулі (рис. 2.25).

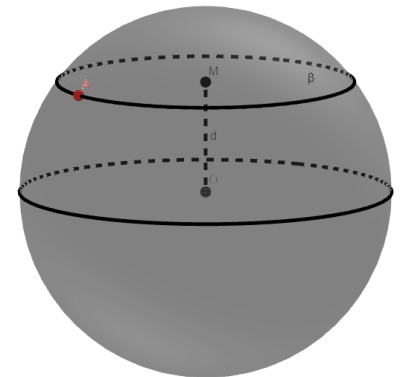


Рисунок 2.24. Ілюстрація задачі 2.11

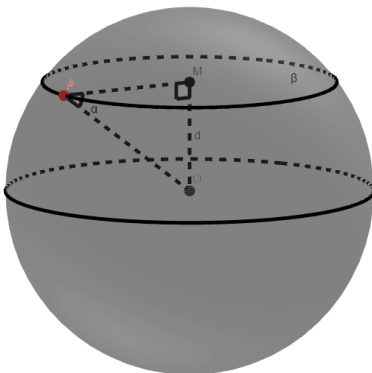


Рисунок 2.25. Ілюстрація задачі 2.11

Оскільки цей відрізок перпендикулярний до площини перерізу, то довжина $OM=d$, що буде відстанню від центра кулі до площини.

Маємо $OM \perp \beta$, тоді кут $\angle AMO = 90^\circ$. Маємо відрізок MA , що є проєкцією OA на площину перерізу β . За означенням, кут між OA і проєкцією MA на площину β є кутом між прямою та площиною. Таким чином, робимо висновок, що кут $\angle MAO = \alpha$. Знайдемо площу перерізу β , тому розглянемо $\triangle AMO$ ($\angle M = 90^\circ$), AM – катет прямокутного трикутника, що знайдемо за допомогою співвідношення між кутами та сторонами трикутника. Отже $AM = OM \cdot \operatorname{ctg} \alpha = d \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Радіус круга перерізу є відрізок AM . Формула площу перерізу: $S = \pi R^2 = \pi d^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Прикладні задачі:

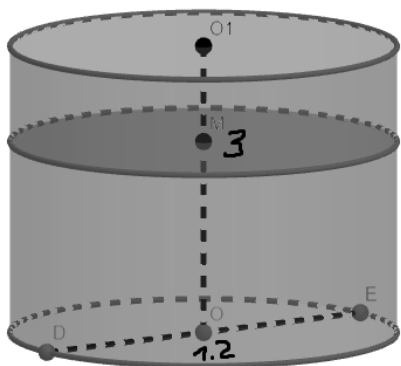


Рисунок 2.26. Ілюстрація задачі 2.12

Задача 2.12. Криниця має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює 1,2 м, а глибина – 3 м. Він наповнений водою на $\frac{2}{3}$ глибини. Обчислити з точністю до 0,01 м³ об'єм води у криниці.

Розв'язання. Маємо криницю з циліндричною

формою діаметром $DE = 1,2$ м. Глибина – це висота циліндра, $H = OO_1 = 3$ м. Знайдемо об'єм криниці, наповненою водою (рис. 2.26). За умовою заповнено водою $\frac{2}{3}$ циліндра, отже висота заповненого водою циліндра $H = 2$ м, а радіус $R = 0,5 \cdot DE = 0,6$ м. Знайдемо об'єм: $V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H = 0,36 \cdot 3,14 \cdot 2 \approx 2,26$.

Задача 2.13. На рисунку 2.27 зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l . Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи.

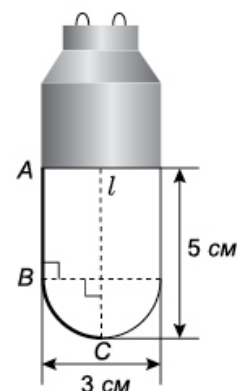


Рисунок 2.27.

Ілюстрація задачі 2.13

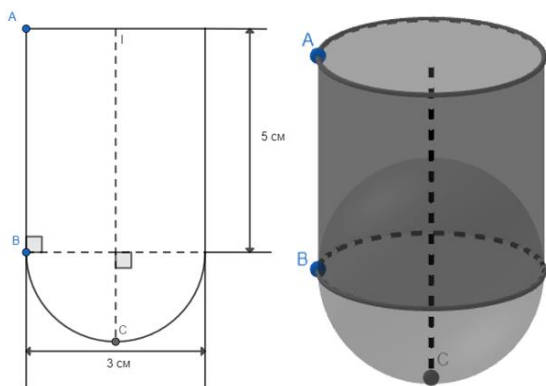


Рисунок 2.28. Ілюстрація задачі 2.13

Розв'язання. Для того, щоб знайти площу активної поверхні світлодіодної лампи, потрібно обчислити суму площ бічної поверхні циліндра та площі півсфери. Маємо циліндр (рис. 2.28), утворений обертанням відрізка АВ навколо осі l , знайдемо $S_{\text{бп}}=2\pi RH$, де радіус циліндра $R = 0,5D = 1,5$

см, а висота $H = l - R(\text{півсфери}) = 5 - 1,5 = 3,5$ см. Отже $S_{\text{бп}}=2\pi \cdot 1,5 \cdot 3,5=32,97$ см².

Площу півсфери, утвореної обертанням чверті кола ВС навколо осі l , обчислимо за формулою:

$S = \frac{1}{2}(4\pi R^2) = \frac{4\pi R^2}{2} = 2\pi R^2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,25 = 14,13$ см². Отже, площа активної поверхні лампи дорівнює $32,97 + 14,13 = 47,1$ см².

Задача 2.14. Цукерка має форму конуса, висота якого дорівнює 3 см, а діаметр основи – 2 см. Маса 1 см³ шоколаду, з якого виготовлено цукерку, становить 3 г. Визначте масу 100 таких цукерок, якщо кожна цукерка є однорідною і не має всередині порожнин.

Розв'язання. Маємо однорідну цукерку у формі конуса, отже маса однієї цукерки дорівнює об'єму конуса: $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, де $R=0,5D=1$ см та $h=3$ см. Тоді $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi l^2 \cdot 3 = \pi = 3,14$ см³. За умовою задачі маса 1 см³ шоколадної цукерки дорівнює 3 г, отже маса всієї цукерки $3V_{\text{к}} = 3\pi$, а маса 100 цукерок $V_{100} = 300\pi = 942$ г.

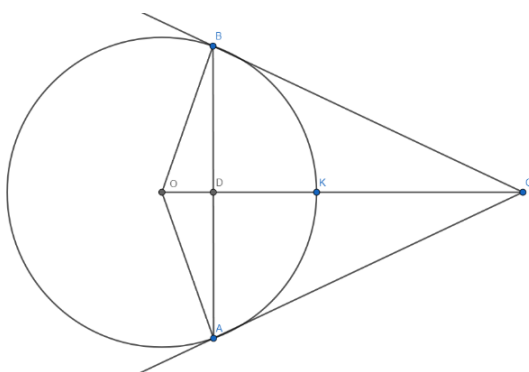


Рисунок 2.29. Ілюстрація задачі 2.15

Задача 2.15. На якій відстані від центра кулі радіуса 12 см повинна міститися точка, яка світиться, щоб вона освітлювала $\frac{1}{3}$ її поверхні?

Розв'язання. Нехай маємо точку С, яка освітлює $\frac{1}{3}$ поверхні кулі з центром О та

радіусом 12 см. Зобразимо осьовий переріз кулі площиною, що проходить через точку С. Знайдемо відстань від центра кулі до точки С, довжину відрізка ОС.

Проведемо дотичні до кола (СВ і СА) через точку С, що обмежує осьовий переріз. Нехай К – точка перетину кола з відрізком ОС. Маємо дугу \cup АКВ, що освітлює точка С та сферичний сегмент (рис. 2.29).

Проведемо в $\triangle OBC$ висоту ВD, тоді DK=H (висоті сферичного сегмента), його площа $S=2\pi RH$. Оскільки, за умовою, потрібно знайти площу, що становить третину площі поверхні кулі, тоді $2\pi RH = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2$, де $H = \frac{2}{3}R = 8$ см. Знайдемо $OD=OK-DK=12-8=4$ см.

Прямокутні трикутники $\triangle OBC$ і $\triangle ODB$ ($\angle OBC = \angle ODB = 90^\circ$), мають спільний кут $\angle O$, тому вони подібні. Звідки: $\frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OB}$; $OC = \frac{OB^2}{OD} = \frac{144}{4} = 36$ см.

2.3 Застосування 3D-моделей для пояснення нового матеріалу з тем

Використання 3D-моделей для пояснення теми «Тіла обертання» у геометрії для учнів є важливим інструментом для кращого засвоєння та розуміння нового матеріалу. Ось декілька способів як можна використовувати 3D-моделі для навчання:

- Відображення тіл обертання:

Використовуйте 3D-моделі для відображення різних тіл обертання, таких як циліндри, конуси, кулі тощо. Дозвольте учням обертати ці моделі та міняти параметри (висота, радіус), щоб побачити, як виглядають тіла з різних кутів та як вони змінюються. Для кращого розуміння об'єму можна застосувати різні текстури та наклейки на об'єктах (рис.2.30).

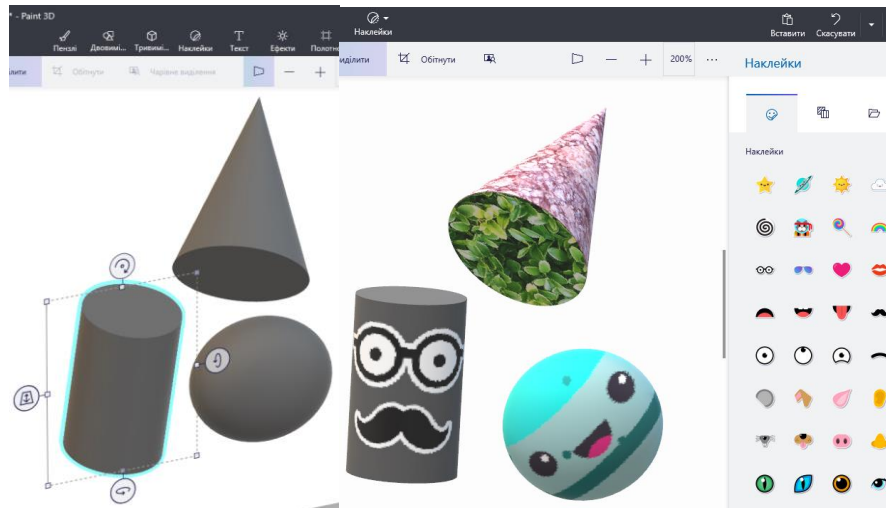


Рисунок 2.30. Тривимірні об'єкти в Paint 3D

- Розділення тіл на частини:

Поділіть тіло обертання на окремі частини, наприклад, на кругові диски. Використовуйте 3D-моделі для пояснення, як ці частини обертаються навколо вісі та як це впливає на форму та об'єм тіла (рис. 2.31).

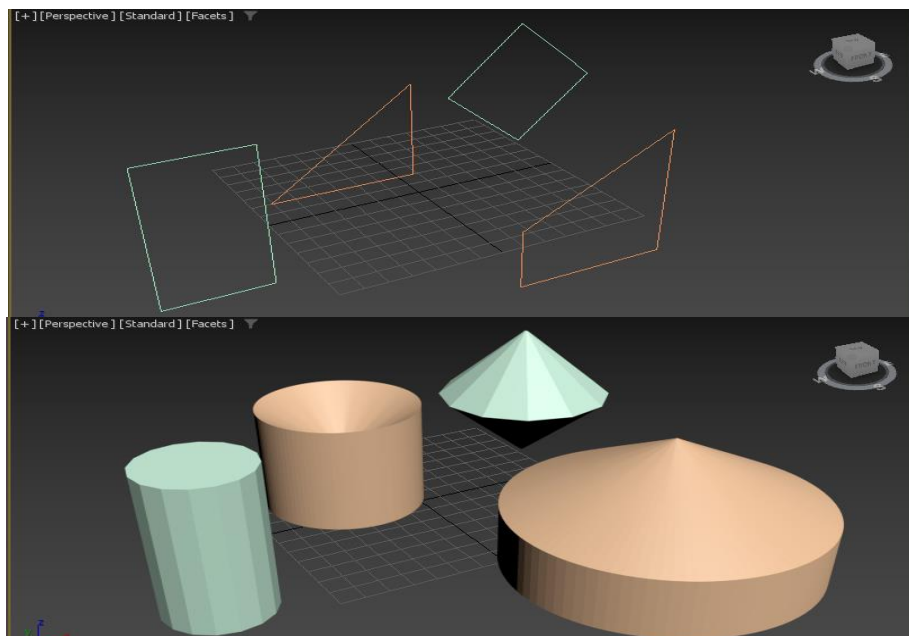


Рисунок 2.31. Тривимірні об'єкти в 3Ds Max

- Визначення параметрів тіл обертання, обчислення об'ємів та площ поверхонь:

За допомогою 3D-моделей вивчайте параметри тіл обертання, такі як радіус, висота, діаметр тощо. Покажіть як можна обчислювати об'єм та площу тіла обертання за допомогою програми (рис. 2.32).

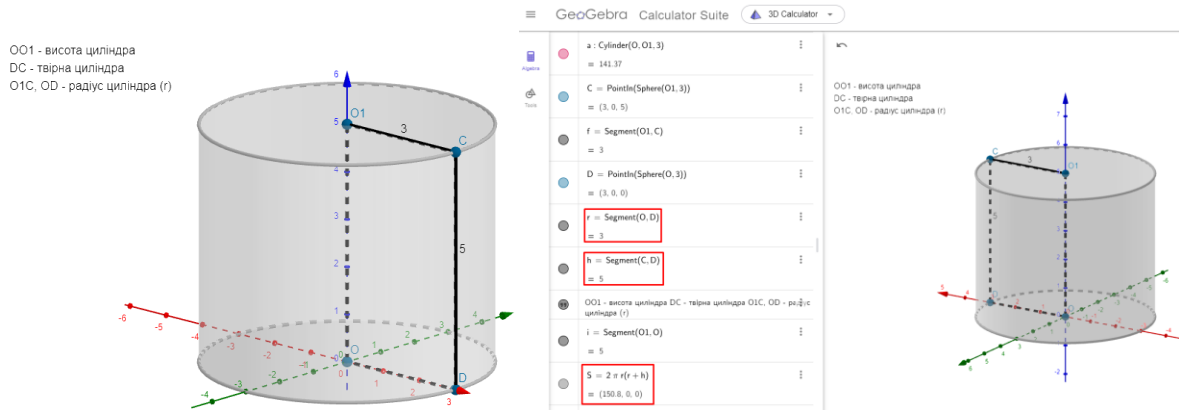


Рисунок 2.32. Позначення на циліндрі в GeoGebra

- Використання анімацій:

Створіть анімації, які демонструють обертання (рис. 2.33) та як виглядає розгортка тіл (рис. 2.34). Це дозволить учням побачити, як тіло поступово змінює свою форму під час обертання чи розгортання. Анімації розміщені за посиланням:

https://drive.google.com/drive/folders/1iFtug39JieCBIWlyEimuQnQKOE3B5_RU?usp=sharing.

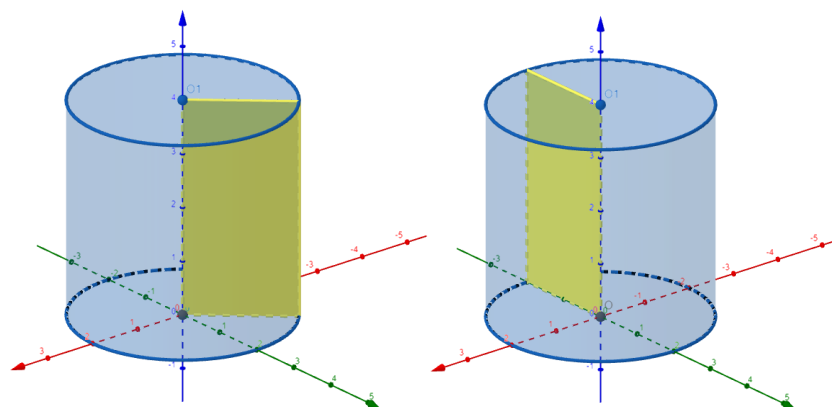


Рисунок 2.33. Демонстрація анімації в GeoGebra

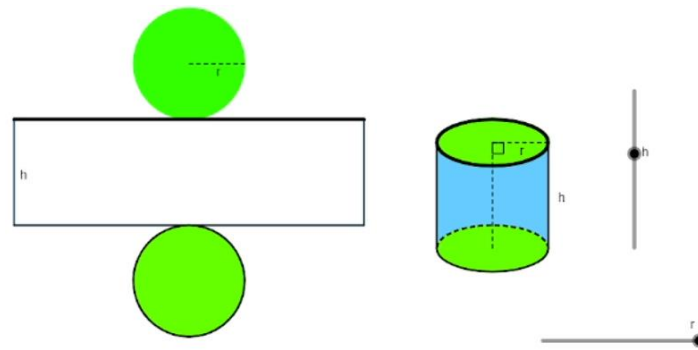


Рисунок 2.34. Розгортка циліндра в GeoGebra

- Демонстрація різних дій з тілами:

Різні тіла можна модифікувати за допомогою логічних операцій Boolean (рис. 2.35) і ProBoolean (віднімання і додавання тривимірних об'єктів). Вони поділяються на шість типів, такі як: складання (Union), перетин (Intersection), віднімання (Subtraction) та об'єднання (Merge), приєднання (Attach), вставка (Insert).

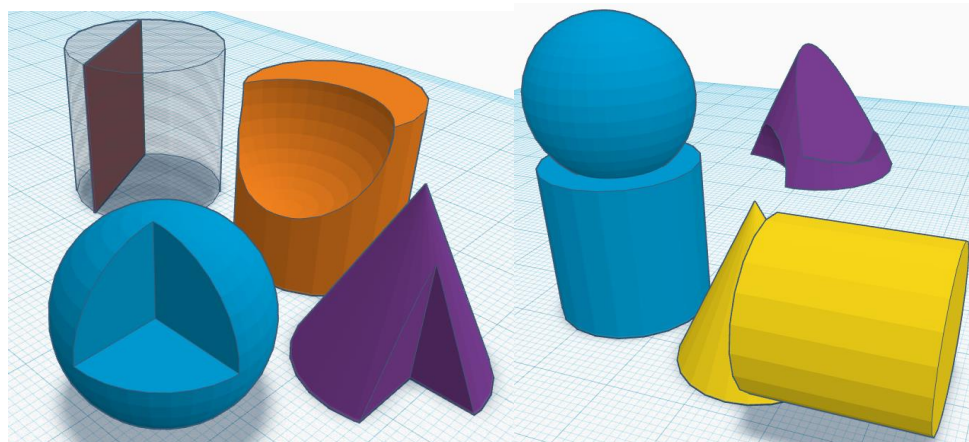


Рисунок 2.35. Модифікація тіл обертання в Tinkercad

- Порівняння різних тіл обертання:

Порівняйте різні тіла обертання за їхніми властивостями, відображаючи відповідні 3D-моделі. Демонструйте, чим вони відрізняються або схожі.

- Застосування у реальних задачах:

Використовуйте 3D моделі для розв'язування прикладних задач (рис. 2.36), пов'язаних з обчисленням об'ємів, площ поверхонь та інших параметрів тіл обертання.

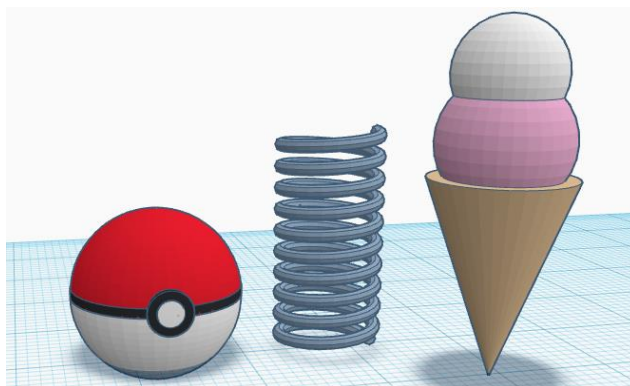


Рисунок 2.36. Демонстрація реальних тіл в Tinkercad

Використання 3D-моделей є дуже ефективним способом навчання учнів, що сприяє кращому розумінню геометричних концепцій, збільшує інтерес та мотивацію до вивчення теми.

2.4 Методичні рекомендації

Тема «Тіла обертання» є складною для учнів, оскільки вимагає від них розуміння просторових геометричних понять. Для успішного вивчення теми необхідно звернути увагу на три основні моменти:

- 1) Розвиток просторового уявлення (розуміння тривимірного простору та розташування фігур у ньому).
- 2) Розвинути навичку побудови тіл обертання (як у зошиті, так і за допомогою спеціальних програм).
- 3) Розвиток творчого та аналітичного мислення (вміння творчо та різнобічно підійти до розв'язання задач, проаналізувати методи та дані, розкладання

та структуризація інформації).

Детальніше оглянемо **перший** пункт. Розвиток просторового уявлення - це процес формування здібностей особи сприймати та розуміти об'єкт та його положення у тривимірному просторі. Ця навичка має велике значення в багатьох галузях життя, зокрема науки, інженерії, архітектури, комп'ютерної графіки та багато інших.

Розвиток просторового уявлення передбачає:

Сприйняття тривимірного простору. Учні повинні розуміти, що тривимірний простір характеризується трьома величинами: довжина, ширина і висота.

Орієнтація у просторі. Учні мають орієнтуватися та визначати, де розташовані об'єкти у просторі та як вони співвідносяться один до одного.

Маніпулювання тривимірними об'єктами. Учні повинні вміти обертати, переміщувати та змінювати розміри тривимірних об'єктів у віртуальному або реальному просторі.

Розуміння геометричних форм. Учні повинні бути ознайомлені з різними геометричними фігурами, такими як циліндри, конуси, сфери тощо, та розуміти їхні характеристики та властивості у тривимірному просторі.

Застосування просторового уявлення в розв'язанні задач. Учні повинні вміти застосовувати свої навички просторового уявлення для розв'язання геометричних задач, таких як розрахунок об'ємів, площ поверхонь та параметрів тіла, застосовувати для життєвих ситуацій.

Досягнути розвитку просторового уявлення можна за допомогою використання різноманітних методів та навчальних інструментів: віртуальних та інтерактивних програм для моделювання тривимірних об'єктів, використання макетів фігур, виконання практичних вправ. Ця навичка корисна не лише для розв'язання математичних задач, але і для розвитку креативного мислення та інженерних вмінь.

Другий пункт стосується розвитку навички побудови тіл обертання, що є важливим складником навчання геометрії та стереометрії. Це передбачає здатність створювати тривимірні об'єкти на папері або в інтерактивних програмах. Розглянемо докладніше про це:

Побудова фігур в зошиті на папері. Учні повинні навчитися робити плоскі проєкції тривимірних об'єктів на площині. Це може передбачати побудову тіл обертання з різних виглядів (спереду, зліва, зверху). Також можна використовувати шаблон для побудови основ циліндра або конуса. Учні повинні розуміти, що у фігурі є видимі елементи та невидимі, які позначаються пунктиром або штриховкою. Всі побудови різних тіл обертання повинні бути доведені до автоматизму.

Загальний алгоритм побудови тіл обертання:

1. Вибір масштабу (для рисунку з великою кількістю додаткових елементів, такі як перерізи, додаткові площини тощо, необхідно намалювати рисунок побільше, щоб краще було видно всі елементи).
2. Для більш охайного рисунку зробіть розмітку основи фігури.
3. Побудуйте вісь симетрії.
4. Нарисуйте видимі та невидимі елементи тіла або фігури.
5. Додайте деталі, якщо це потрібно (радіус, діагональ тощо).
6. Додайте позначення та виміри.
7. Якщо потрібно побудувати ще одну фігуру, то перейти до 2 пункту, інакше – перейти до наступного пункту.
8. Перейти до розв'язування задачі.

Використання підручних об'єктів. Вчителі можуть використовувати підручні об'єкти для демонстрації тривимірних фігур, такі як реальні об'єкти, схожі на геометричні фігури (дорожній конус, ялинка, апельсин, кулька, ручка, свічка).

Використання програм для 3D-моделювання. Учні можуть навчатися побудові тіл обертання за допомогою спеціальних програм для 3D-моделювання, таких як Blender, 3Ds Max, GeoGebra або Tinkercad. Це дозволяє їм створювати та вивчати тривимірні об'єкти на комп'ютері, обертаючи їх та змінюючи їхні розміри за бажанням.

Розв'язання завдань на побудову. Учні отримують завдання на побудову конкретних тіл обертання за вказаними параметрами. Це вимагає від них розуміння геометричних правил та вміння застосовувати їх для створення об'єктів.

Теоретичні знання. Крім самої побудови, учні також повинні розуміти та знати теорію про тіла обертання, такі як їхні властивості, формули для об'ємів та площ поверхонь, а також співвідношення між різними параметрами тіл.

Третій пункт передбачає, що аналітичні навички допомагають учням розуміти геометричні концепції, використовувати логічне мислення та розв'язувати складні задачі. Ось кілька способів, які можна використовувати для розвитку аналітичних навичок учнів:

Вивчення теорії з конкретними прикладами: (для того, щоб учні мали базові знання щодо вирішення простих задач). Почніть з вивчення теорії, пов'язаної з тілами обертання, надайте учням конкретні приклади для розв'язання. Пояснюйте, як вони застосовуються до реальних ситуацій та використовуються для розв'язання задач.

Завдання для самостійного розв'язання. Надавайте учням завдання для самостійного розв'язання, які вимагають застосування аналітичних навичок. Поступово підвищуйте рівень складності завдань, допомагаючи учням розвивати навички розв'язування більш складних задач (рухатись від простого до складного).

Групова робота та обговорення. Організуйте уроки, на яких учні мають можливість спільно розв'язувати задачі, обговорювати свої рішення, уміти

аргументувати та відстоювати свою позицію. Це сприяє обміну ідеями, розвитку критичного мислення та навичку співпрацювати в команді.

Пошук і аналіз різних методів розв'язання. Заохочуйте учнів шукати різні методи розв'язання задач та аналізувати їх ефективність. Це допомагає розвивати творче та критичне мислення.

Задачі на дослідження. Заохочуйте учнів проводити дослідження, спрямовані на вивчення властивостей тіл обертання. Вони можуть досліджувати залежності між параметрами цих тіл та проводити експерименти.

Застосування аналітичних навичок у реальних ситуаціях. Включіть прикладні завдання, які дозволяють учням застосовувати свої аналітичні навички для вирішення практичних завдань, таких як розрахунок об'єму резервуара або аналіз геометричних форм у будівництві.

Для успішного вивчення теми «Тіла обертання» необхідно використовувати комплексний підхід, що передбачає розвиток графічних, просторових і аналітичних навичок учнів.

Висновки до розділу 2

Розділ «Тіла обертання» в стереометрії охоплює різні типи задач, які поділяються на п'ять основних категорій: задачі на доведення, обчислення, побудову, дослідження та прикладні задачі.

Використання 3D-моделей є корисним інструментом для розв'язання задач з курсу стереометрії. Комбінування різних програм для створення 3D об'єктів урізноманітнить процес навчання та надасть більше можливостей у вивченні стереометрії. Створення тривимірних об'єктів допомагає учням краще засвоювати матеріал та візуалізувати геометричні тіла та їхнє положення в тривимірному просторі, що значно полегшує навчання.

Для успішного вивчення стереометрії важливо дотримуватися методичних рекомендацій, які є важливою частиною навчального процесу в стереометрії. Вони містять стратегії розв'язання різних типів задач, використання 3D-моделей для навчання та вирішення задач, систематичне вдосконалення навичок, а також підходи до пояснення нового матеріалу учням.

ВИСНОВКИ

Згідно з визначеною метою та поставленими завданнями нашого дослідження отримані такі **результати**: проаналізовано наукову та навчально-методичну літературу з теми магістерської роботи; здійснено логіко-математичний аналіз тем «Циліндр», «Конус» та «Куля» у розділі «Стереометрія» для 11-го класу; здійснено порівняльний аналіз чинних підручників та програм для створення 3D-моделей; розглянуті та розв'язані основні типи задач з обраних тем у розділі «Стереометрія»; досліджена та розроблена методика навчання тіл обертання з використанням комп'ютерних 3D-моделей.

Результати проведеного дослідження дають підстави для таких **висновків**:

Відповідно до першого завдання дослідження здійснено аналіз наукової та навчально-методичної літератури з розділу «Стереометрія». Було виявлено, що вивчення стереометрії у шкільному курсі математики є актуальним і важливим у навчальному процесі. Знання зі стереометрії розвивають просторове уявлення й абстрактне мислення учнів, що є основою для засвоєння таких дисциплін, як: фізика, архітектура та дизайн, механіка тощо.

На виконання другого завдання дослідження за допомогою логіко-математичного аналізу тем «Циліндр», «Конус» та «Куля» виявлено важливі аспекти, які необхідно враховувати під час навчання учнів стереометрії. А саме – основні поняття та властивості фігур, які мають засвоїти та зрозуміти учні; застосування можливостей програм для 3D-моделювання для раціонального використання часу; забезпечення логічності та системності навчання; розв'язування задач на доведення та знаходження відношень як важливого засобу розвитку логічного мислення в учнів; застосування знань на практиці.

З метою виконання третього та четвертого завдань нашого дослідження було здійснено порівняльний аналіз різних підручників та програм для створення 3D-моделей, що дозволило визначити найбільш ефективні засоби для

покращення якості навчання. Комбінування матеріалу та вправ з різних підручників матиме такі переваги, як: учитель може надати більш широко інформацію та урізноманітнити задачі; покращити якість навчання через використання матеріалу з різних джерел; постійно підтримувати зацікавленість в учнів. Також використання таких програм, як: GeoGebra, Tinkercad, Paint 3D, 3ds Max є безкоштовним, легким у засвоєнні, що задовольняє сучасні потреби як вчителя, так і здобувачів освіти.

На виконання п'ятого завдання дослідження було розглянуто основні типи задач (задачі на доведення, обчислення, побудову, дослідження і прикладні задачі) у розділі «Стереометрія» та запропоновано прийоми розв'язання до кожного виду задач. Доведено, що під час розв'язання задач важливо навчити учнів правильно будувати малюнок, розв'язувати задачі за певним алгоритмом, сформулювати вміння застосовувати знання на практиці.

Відповідно до шостого завдання дослідження було розроблено методiku навчання тіл обертання з використанням комп'ютерних 3D-моделей, що відкриває нові можливості, які сприяють кращому розумінню матеріалу учнями та підвищує їх інтерес до предмета. Залучення учнів до активної діяльності, бажання експериментувати з різними формами та фігурами підвищує рівень знань та формує здатність учнів до аналітичного та логічного мислення.

Розроблені методичні рекомендації містять стратегії розв'язання різних типів задач, використання різноманітних підходів до пояснення нового матеріалу учням, розкладання і структурування інформації.

Отже, результати дослідження можуть бути використані для вдосконалення методів навчання геометрії та стереометрії у шкільній програмі, для розробки цікавих та інтерактивних уроків. Отримані результати можуть стати основою для подальших досліджень у галузі математичної освіти, удосконалення навчальних програм, осучаснення підручників та навчальних посібників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Autodesk 3ds Max: Create massive worlds and high-quality designs. URL: <https://www.autodesk.com/products/3ds-max/overview?term=1-YEAR&tab=subscription> (дата звернення: 23.05.2023).
2. GeoGebra Manual. URL: <https://wiki.geogebra.org/GeoGebra-en-Manual.pdf> (дата звернення: 23.05.2023).
3. GeoGebra Класична. URL: <http://surl.li/mnwei> (дата звернення: 23.05.2023).
4. Алексюк А. М. Загальні методи навчання в школі. 2-е вид. Київ : Рад. школа, 1981. 206 с.
5. Бевз Г. П., Бевз. В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.
6. Беседін Б. Б., Смоляков О. В. Використання наочності на уроках математики. *Методика викладання математики в ЗОШ та ВНЗ*. 2017. №7. С. 103–109.
7. Биданов Н. Методика використання відеоматеріалів в навчальному процесі. URL: <http://sisv.com/publ/1/metodika/14-1-0-557> (дата звернення: 08.07.2023).
8. Биков В. Ю. Проблеми інформатизації. *Комп'ютер у школі та сім'ї*. 2001. №5. С.8-12.
9. Богатинська Н. В., Голубева С. Ф. Узагальнення й систематизація – джерело знань учнів. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць*. Вип. 6. Т. 1, 2006. С. 103–107.
10. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. Київ : 2011. № 26. С. 184–189.

11. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. 464 с.
12. Бреус І. А. Розвиток просторового мислення учнів в умовах отримання додаткового математичної освіти. *Інноваційна наука*. 2016. №12. С. 47–50.
13. Василенко А. В. Моделювання як засіб просторового мислення. *Викладач XXI століття*. 2012. №3. С. 141-144.
14. Винославська О. В. Психологія. Навчальний посібник. Київ: ІНКОС, 2005. 351 с.
15. Вікові особливості учнів. URL: <http://surl.li/mnwfc> (дата звернення: 23.05.2023)
16. Вписані та описані фігури. URL: <https://formula.kr.ua/metodi-zobrazhen/vpisani-ta-opisani-figuri.html> (дата звернення: 27.09.2023).
17. Вступ – Introduction. URL: <http://surl.li/mnwfr> (дата звернення: 23.05.2023).
18. Грамбовська Л. В., Яковчук О. М. Комп'ютерні динамічні моделі як засіб дидактичного забезпечення процесу навчання геометрії в сучасній школі. *Комп'ютер у школі та сім'ї*. 2010. №7. С.14–17.
19. Грохольська А. В., Яценко С. Є. Методика навчання математики в старшій та вищій школах. Частина I. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. 310 с.
20. Гулівата І. О. Методика навчання учнів старшої школи побудови стереометричних фігур з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. URL: <http://surl.li/mnwfz> (дата звернення: 15.06.2023).
21. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології : навч. посіб. Київ : Академвидав, 2004. 352 с.
22. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: посібник для вчителів. Київ : Техніка, 1997. 304 с.

23. Жарких Ю. С., Лисоченко С. В., Сусь Б. Б., Третяк О. В. Комп'ютерні технології в освіті : навч. посібн. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011. 239 с.
24. Зайченко І. В. Педагогіка. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів, 2-е вид. Київ : «Освіта України», «КНТ», 2008. 528 с.
25. Зверева Г. Ф., Сердюк В. В. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики. *Математика в школах України*. 2010. №9. С. 2–7.
26. Знайомство з програмою Tinkercad. URL: <http://surl.li/mnwhf> (дата звернення: 23.05.2023).
27. ЗНО-ОНЛАЙН. Завдання за темою з математики. URL: https://zno.osvita.ua/mathematics/tag-tila_obertannja/ (дата звернення: 17.09.2023)
28. Істер О. С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 304 с.
29. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером. Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. 271 с.
30. Кухарчук О. Р. Методика навчання тіл обертання у розділі «Стереометрія» в 11 класі з використанням програм з 3D-моделювання. *Альманах «QN». Збірник наукових праць студентів V Всеукраїнської студентської науково-практичної інтернет-конференції «Студентський науковий вимір проблем природничо-математичної освіти в контексті інтеграції України до єдиного європейського і світового освітнього простору»*. Випуск 13. Глухів : ГНПУ ім. О. Довженка, 2023. С. 128–132.
31. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 208 с.

32. Методи навчання та їх класифікація. URL: <https://osvita.ua/school/method/780/> (дата звернення: 23.05.2023)
33. Навчальні програми для 10-11 класів. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 23.05.2023).
34. Нагорна Н. В. Формування у студентів понять компетентності й компетенції. *Виховання і культура*. 2007. №1–2. С. 266–268.
35. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 304 с.
36. Основні принципи навчання. URL: <http://surl.li/mnwgt> (дата звернення: 23.05.2023)
37. Пасічник Н., Пасічник Г. Формування соціальної компетентності випускника школи на уроках математики. *Математика в сучасній школі*. 2012. №7–8. С. 36–39.
38. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: наук.-метод. посібн. / за ред. О.І. Пометун. Київ : Видавництво А.С.К., 2004. 192 с.
39. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
40. Словник української мови: в 11 томах. Том 9, 1978. 688 с.