

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Глухівський національний педагогічний університет**  
**імені Олександра Довженка**

**Кафедра фізико-математичної освіти та інформатики**

**МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА**  
**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА**  
**ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ» З ВИКОРИСТАННЯМ**  
**ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**Виконав:**

**ХАРИТОНЕНКО Вячеслав Миколайович**  
студент \_\_\_\_\_ групи  
спеціальності 014 Середня  
освіта спеціалізації 014.04  
Середня освіта (Математика)

**Науковий керівник:**

Кугай Наталія Василівна,

д-р пед. наук, доцент

Допущено до захисту «\_\_\_\_»

\_\_\_\_\_ 2023 р.

**Завідувач кафедри**

\_\_\_\_\_

(підпис)

Р.П. Кухарчук

(ініціали, прізвище)

Дата захисту «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 р.

Оцінка \_\_\_\_\_

Підписи членів ЕК:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Глухів 2023 р.

## ЗМІСТ

|  |    |
|--|----|
| ВСТУП.....   | 3  |
| РОЗДІЛ I. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ» У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ .....            | 6  |
| 1.1 Тема "Інтеграл та його застосування" та її відображення у освітній програмі шкільного курсу математики .....       | 6  |
| 1.2 Основні поняття теми "Інтеграл та його застосування" .....   | 12 |
| 1.3 Аналіз навчальних підручників із теми "Інтеграл та його застосування".....   | 23 |
| 1.4 Інтерактивні технології як один із важливих напрямів удосконалення освітнього процесу з математики .....           | 34 |
| РОЗДІЛ II. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»..... | 43 |
| 2.1. Традиційна методика викладання теми "Інтеграл та його застосування" у 11 класі.....                               | 43 |
| 2.2. Інтерактивні методики колективних навчальних занять у процесі вивчення теми "Інтеграл та його застосування" ..... | 46 |
| 2.3 Використання сучасних цифрових технологій для обчислення інтегралів .....  | 58 |
| 2.4. Використання MatLab для обчислення визначених інтегралів ..   | 65 |
| 2.5. Методичні рекомендації для вчителів щодо використання інтерактивних технологій та цифрових інструментів.....      | 73 |
| ВИСНОВКИ.....  | 76 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....  | 79 |
| ДОДАТКИ.....   | 84 |

## ВСТУП

Одним із головних пріоритетів, що визначають траєкторію розвитку сучасної освіти, є створення інформаційного середовища, в якому учні можуть розвивати навички самостійного навчання впродовж життя та застосовувати їх у практичній діяльності. У сучасних умовах якість освіти пов'язується з реалізацією компетентнісного підходу, спрямованого на формування в учнів ключових компетентностей та предметних умінь. Це створює передумови для визначення практичного спрямування навчання, поетапного управління формуванням результатів навчання учнів, підвищує особисту відповідальність усіх учасників освітнього процесу за якість результатів навчання. Новий підхід ставить питання про те, як учні навчаються, тобто в якій формі здійснюється навчальна діяльність і як вчитель має її організувати для досягнення найкращих результатів. Необхідність розвитку сучасного, цифрово-орієнтованого навчання пов'язана з потребою розвитку предметних компетентностей та їх цілями, найважливішими з яких є когнітивна, комунікативна, регулятивна та особистісна.

Нова педагогічна технологія є продуктом певної цілеспрямованої форми, методики та засоби навчання, зокрема, і математичної освіти. Спостереження показують, що здебільшого вчитель працює на уроці, а учні залишаються спостерігачами. Цей вид освіти не розвиває розумове мислення учнів, не підвищує їхню активність, гасить їхню творчу активність у навчальному процесі. Крім того, уроки, організовані на основі передових педагогічних технологій, допомагають учням опанувати свої знання загально, розвинути мислення, навчити самостійному, творчому мисленню, Виховання гармонійно розвиненого покоління – важлива ознака культурного та просвітницького розвитку суспільства, духовної зрілості нації.

Сучасне освітнє середовище потребує нових підходів до навчання та викладання математики. Застосування інтерактивних технологій у

навчальному процесі може значно покращити розуміння та освоєння складних математичних концепцій, зокрема теми "Інтеграл та його застосування". Сучасні учні ростуть в еру цифрових технологій і звикли до використання різних електронних пристроїв та програм, тому використання інтерактивних технологій у навчанні математики відповідає їхнім потребам і забезпечує більш ефективну і привабливу форму навчання.

Тема "Інтеграл та його застосування" відноситься до важливих розділів математики, які мають широкі застосування у фізиці, економіці, інженерії та інших науках. Глибоке розуміння цих концепцій є необхідним для подальшого вивчення та професійного розвитку учнів як майбутніх студентів закладів вищої освіти.

Крім того, використання інтерактивних технологій дозволяє створити динамічне та змістовне середовище для навчання. Інтерактивні матеріали, такі як візуалізації, анімації, інтерактивні завдання та симуляції, можуть допомогти учням краще сприймати та запам'ятовувати матеріал. Використання інтерактивних технологій сприяє активному залученню здобувачів освіти до освітнього процесу, сприяє розвитку їхніх аналітичних та проблемно-орієнтованих навичок. Це також стимулює співпрацю та комунікацію між учнями під час виконання інтерактивних завдань.

Розробка ефективної методики вивчення теми "Інтеграл та його застосування" з використанням інтерактивних технологій може мати значний вплив на покращення якості освіти та зростання мотивації учнів до вивчення математики.

Актуальність вибраної проблеми дослідження й обумовила вибір теми нашого дослідження **"Методика вивчення теми «Інтеграл та його застосування» з використанням інтерактивних технологій"**.

**Об'єкт дослідження:** процес навчання алгебри і початків аналізу у старших класах закладів загальної середньої освіти.

**Предмет дослідження:** методика використання інтерактивних технологій на уроках математики у процесі вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в 11-му класі.

**Метою дослідження** є розробка та реалізація інтерактивних методів та цифрових технологій у процесі вивчення теми «Інтеграл та його застосування» в 11-му класі.

**Завдання дослідження:**

1. Провести системний аналіз сучасного стану викладання теми "Інтеграл та його застосування" у 11 класі у науково-методичній та психолого-педагогічній літературі.

2. Дослідити зміст теми "Інтеграл та його застосування" та її місце у навчальній програмі з алгебри і початків аналізу у 11 класі.

3. Розробити методику, яка поєднує традиційні методи викладання з інтерактивними підходами у процесі вивчення теми "Інтеграл та його застосування" у 11 класі.

4. Розробити систему дидактичних матеріалів, інтерактивних засобів, цифрових ресурсів, застосовуючи традиційну та інтерактивну технології та комп'ютерні математичні програми для підтримки методики навчання теми "Інтеграл та його застосування".

5. Сформувати методичні рекомендації для вчителів щодо використання інтерактивних технологій цифрових технологій у процесі вивчення теми "Інтеграл та його застосування" в 11-му класі.

**Методи дослідження.** Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань у процесі роботи використовувалися теоретичні, загальнометодологічні та емпіричні методи і прийоми дослідження: аналіз та синтез, порівняння, узагальнення, моделювання, спостереження.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

## РОЗДІЛ I

### МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ "ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ" У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

#### **1.1. Тема "Інтеграл та його застосування" та її відображення у освітній програмі шкільного курсу математики**

Державний стандарт визначає мету та принципи освітнього процесу в закладах базової середньої освіти, дає загальну характеристику змісту навчання, пояснює вимоги до обов'язкових результатів навчання та орієнтири для їхнього оцінювання. Документ було затверджено 30 вересня 2020 року. Державний стандарт базової середньої освіти оприлюднено на сайті Кабінету Міністрів.

Перелік ключових компетентностей та наскрізних умінь, закладений в Державний стандарт, базується на "Рекомендаціях Європейського Парламенту та Ради Європейського Союзу щодо формування ключових компетентностей освіти впродовж життя". Завдяки підтримці Європейського фонду освіти, за безпосередньої участі провідних європейських експертів, ці рекомендації та пов'язані з ними європейські документи (так звані "Рамки компетентностей") ретельно опрацьовувала команда авторів документа [14].

Державні стандарти загальної середньої освіти – це вимоги до обов'язкових результатів навчання та компетентностей здобувача загальної середньої освіти відповідного рівня.

Документи визначають загальний обсяг навчального навантаження та форми державної атестації здобувачів освіти на відповідному рівні загальної середньої освіти, характеристики змісту навчання, принципи організації освітнього процесу, систему управління змістом освіти, змістові лінії та очікувані результати навчання за освітніми галузями.

Державні стандарти розробляються на теоретичному і світоглядному фундаменті класичної та сучасної педагогіки України і світу, на основі

аналізу впровадження провідних українських та світових інноваційних практик в освіті задля реалізації головної цілі загальної середньої освіти.

Метою повної загальної середньої освіти є всебічний розвиток, виховання і соціалізація особистості, яка здатна до життя в суспільстві та цивілізованій взаємодії з природою, має прагнення до самовдосконалення і навчання впродовж життя, готова до свідомого життєвого вибору, самореалізації, відповідальності, трудової діяльності та громадянської активності [15].

Ці документи визначають освітні вимоги до учнів і випускників початкової та середньої школи, а також державні гарантії щодо їх виконання. Ухвалені національні освітні стандарти реалізуються в загальноосвітніх навчальних закладах через навчальні плани, програми, підручники, навчальні посібники та методичні матеріали, затверджені Міністерством освіти і науки України. Важливу роль у їхній успішності відіграють наукові та методичні здобутки вітчизняних і зарубіжних учених.

Особливо важливо окреслити методологічні засади стратегії оновлення змісту освіти. Національні стандарти: забезпечення створення єдиного освітнього простору; посилення регулюючої ролі школи в системі неперервної освіти; забезпечення еквівалентності різних форм загальної середньої освіти; приведення змісту шкільної освіти у відповідність до потреб і викликів часу.

В основі нових національних стандартів лежать принципи особистісно-орієнтованого, компетентнісного та діяльнісного підходу, які реалізуються в освітній сфері та відображені в результативних компонентах змісту базової та повної загальної середньої освіти.

Ключові компетенції включають здатність вчитися та спілкуватися національною, рідною та іноземними мовами, математичні та базові компетенції в галузі природничих наук і технологій, інформації та комунікації, суспільства, громадянськості, народної культури та підприємництва, літератури, мистецтва, міждисциплінарної естетики,

природничих наук і математики, проєктної технології та інформаційно-комунікаційних технологій, суспільствознавства та історичних компетенцій.

Метою навчання математики в класах математичного, фізико-математичного та математичного профілів є формування системи математичних знань, навичок та вмінь учнів, розвиток їхнього логічного та абстрактного мислення, підготовка до подальшого вивчення математики на вищому рівні, а також підготовка учнів до розуміння математичних концепцій, їхнього використання у практичних ситуаціях і подальшого розвитку математичних знань і навичок.

Основні завдання навчання математики в цих класах включають:

- Розширення знань і вмінь з основних розділів математики, таких як алгебра, геометрія, аналітична геометрія, тригонометрія, математичний аналіз тощо.
- Вивчення складніших математичних концепцій і методів, таких як логарифми, експоненти, диференціальні рівняння, інтеграли, теорія чисел, комбінаторика тощо.
- Розвиток навичок самостійного мислення, формулювання математичних утверджень, застосування різних методів розв'язування задач.
- Вивчення математичного мовлення та практичне його використання в розв'язанні математичних задач і доведенні тверджень.
- Розвиток вмінь моделювати реальні ситуації за допомогою математичних концепцій і методів, а також аналізувати та розв'язувати задачі з реального життя.
- Підготовка учнів до участі в олімпіадах та конкурсах з математики, розвиток їхніх математичних обдарувань і вмінь застосовувати їх у складних задачах.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою



свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.

Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей навчання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Практична спрямованість математичної освіти суттєво підвищується завдяки впровадженню інформаційно-комунікаційних засобів у навчання математики.

Одним із найважливіших засобів забезпечення практичної спрямованості навчання математики є встановлення міжпредметних зв'язків математики з іншими предметами, у першу чергу з природничими. Особливої уваги заслуговує встановлення зв'язків між математикою та інформатикою — двома освітніми галузями, які є визначальними у підготовці особистості до життя у постіндустріальному, інформаційному суспільстві. Широке застосування інформаційно-комунікаційних засобів у навчанні математики доцільне для проведення математичних експериментів, практичних занять, інформаційного забезпечення, візуального інтерпретування математичної діяльності, проведення досліджень [34].

Важливим завершенням функціональної лінії курсу «Математика» є розгляд понять похідної та інтеграла, які є необхідним інструментом дослідження руху. Основні ідеї математичного аналізу виглядають досить простими і наочними, якщо викладати їх на тому інтуїтивному рівні, на якому вони виникли історично і який цілком задовольняє потреби загальноосвітньої підготовки учнів. Не варто захоплюватися формально-

логічною строгістю доведень та відводити багато часу суто технічним питанням і конструкціям. Більше уваги слід приділити змісту ідей і понять, їх геометричному і фізичному тлумаченню. Вивчення інтегрального числення зазвичай починається з розгляду сукупності первісних даної функції, яку доцільно розуміти як сукупність функцій, які задовольняють умову  $y' = f(x)$  [34].

Вивчення теми "Інтеграл та його застосування" у 11 класі є дуже важливим з множини причин, зокрема:

1. Підготовка до вищої математики. Вивчення інтегралів є важливим кроком для подальшого вивчення математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та багатьох інших математичних дисциплін на вищому рівні.
2. Розуміння зв'язку між похідними та інтегралами. Вивчення інтегралів дозволяє учням краще зрозуміти зв'язок між похідними та інтегралами, а також основні принципи математичного аналізу. Це сприяє глибшому розумінню математичних концепцій і підвищує їхню математичну грамотність.
3. Використання в реальних задачах. Інтеграли мають широкий спектр застосувань у різних галузях, включаючи фізику, економіку, інженерію, статистику тощо. Вивчення інтегралів допомагає учням розуміти і вирішувати задачі, які виникають у реальному світі, і розвиває їхню здатність застосовувати математичні методи в практичних ситуаціях.
4. Розвиток аналітичного мислення. Вивчення інтегралів сприяє розвитку аналітичного мислення учнів. Вони навчаються аналізувати складні математичні вирази, розв'язувати складні рівняння та нерівності, застосовувати різні методи для обчислення інтегралів. Це розвиває їхні аналітичні навички та критичне мислення.

5. Підготовка до вступу до вищих навчальних закладів. Вивчення інтегралів є необхідним для успішного вступу до вищих навчальних закладів у багатьох спеціальностях, зокрема в математиці, фізиці, інженерії, економіці тощо. Глибоке розуміння інтегралів дозволяє учням успішно вивчати ці дисципліни на вищому рівні.

Навчальна програма з математики для 11 класу рівня стандарту включає 54 години навчального матеріалу. На тему "Інтеграл та його застосування" відведено 10 годин.

У процесі вивчення цієї теми учні здобудуть знання про: первісну та її властивості; визначений інтеграл, його геометричний зміст; обчислення площ плоских фігур.

Під час вивчення цієї теми учні повинні:

- **знаходити** первісні за допомогою таблиці первісних та їх властивостей;
- **виділяти** первісну, що задовольняє задані початкові умови;
- **обчислювати** інтеграл за допомогою таблиці первісних та їх властивостей;
- **знаходити** площі криволінійних трапецій [34].

**Таблиця 1.1.**

**Календарно-тематичне планування теми "Інтеграл та його застосування"**

| <b>Тема 2. Інтеграл та його застосування (10 год)</b> |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 1.  | Поняття первісної. Основна властивість первісних      |  |  |
| 2.  | Правила знаходження первісних. Таблиця первісних      |  |  |
| 3.  | Визначений інтеграл, його геометричний зміст          |  |  |
| 4.  | Розв'язування типових вправ                           |  |  |
| 5.  | Розв'язування типових вправ. <i>Самостійна робота</i> |  |  |
| 6.  | Обчислення площ плоских фігур.                        |  |  |

|     |   |  |  |  |
|-----|---|--|--|--|
|     | Застосування інтеграла до розв'язування прикладних задач        |  |  |  |
| 7.  | Розв'язування типових вправ                                     |  |  |  |
| 8.  | Розв'язування типових вправ. <i>Самостійна робота</i>           |  |  |  |
| 9.  | Підсумковий урок за темою «Інтеграл та його застосування»       |  |  |  |
| 10. | Контрольна робота № 2 за темою: «Інтеграл та його застосування» |  |  |  |

## 1.2. Основні поняття теми "Інтеграл та його застосування"

Процес вивчення теми "Інтеграл та його застосування" починається із актуалізації опорних знань, що базуються на понятті "похідної функції". Потім ставиться проблемне запитання:

*Знаючи закон руху матеріальної точки  $s(t)$ , як можемо знайти закон зміни швидкості  $v(t)$ ? Чи можемо визначити закон руху  $s(t)$ , якщо відомо  $v(t)$ ? Тобто необхідно відновити функцію за її похідною.*

Знаходження функції за її похідною називають **інтегруванням**.

Спочатку учні знайомляться із поняттям **первісна**.

Функцію  $F$  називають первісною функцією функції  $f$  на проміжку  $I$ , якщо для всіх  $x \in I$  виконується рівність  $F'(x) = f(x)$

*Можливий запис у зошиті:  $F(x)$  - первісна для  $f(x)$  на проміжку  $I$ , якщо  $\forall x \in I$*

$$F'(x) = f(x)$$

Наприклад:

|                      |              |  |                         |
|----------------------|--------------|--|-------------------------|
| $F(x) = x^3$         | Первісна для | $f(x) = 3x^2$  |                         |
| $F(x) = \frac{1}{x}$ | Первісна для | ? (запитати учнів, до якої функції на їх думку буде первісною ця | $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ |

|                 |              |   |                 |
|-----------------|--------------|---|-----------------|
|                 |              | функція)  |                 |
| $F(x) = \sin x$ | Первісна для | ? (запитати учнів, до якої функції на їх думку буде первісною ця функція) | $f(x) = \cos x$ |

**Теорема (основна властивість первісної)**

Якщо функція  $F$  є первісною функції  $f$  на проміжку  $I$  та  $C$  – довільне число, то функція  $y = F(x) + C$  також є первісною функції  $f$  на проміжку  $I$ .

Будь-яку первісну функції  $f$  на проміжку  $I$  можна подати у вигляді

$$y = F(x) + C$$

$C$  – деяке число

$y = F(x) + C$  – загальний вигляд первісних функції  $f$  на проміжку  $I$ .

Графіки будь-яких первісних для заданої функції одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі  $Oy$ .

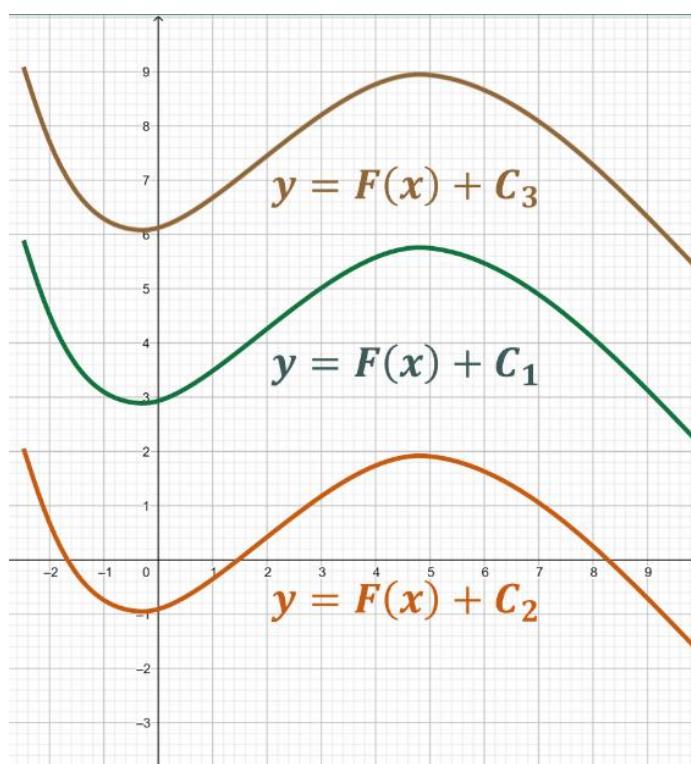


Рис. 1.1. Сімейство графіків первісних

Сукупність усіх первісних  $y=f(x)$  на проміжку  $I$  називається невизначеним інтегралом:

$$\int f(x)dx \text{ («інтеграл еф від ікс де ікс»)}$$

Таблиця 1.2.

## Первісні деяких функцій

| Функція $f$             | Первісна функції $f$              |
|-------------------------|-----------------------------------|
| $k$ (стала)             | $kx$                              |
| $x^n, n \neq -1$        | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$             |
| $\frac{1}{x}, x \neq 0$ | $\ln x $                          |
| $\sqrt[n]{x}$           | $\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$    | $2\sqrt{x}$                       |
| $\sin x$                | $-\cos x$                         |
| $\cos x$                | $\sin x$                          |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$    | $\operatorname{tg} x$             |
| $a^x$                   | $\frac{a^x}{\ln a}$               |
| $e^x$                   | $e^x$                             |

## Правила знаходження первісних

## Теорема

Якщо функції  $F$  і  $G$  є відповідно первісними функцій  $f$  і  $g$  на проміжку  $I$ , то на цьому проміжку функція  $y = F(x) + G(x)$  є первісною функції

$$y = f(x) + g(x).$$

$$\text{Можливий запис: } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

### Теорема

Якщо функція  $F$  є первісною функції  $f$  на проміжку  $I$  та  $k$  – деяке число, то на цьому проміжку функція  $y = kF(x)$  є первісною функції  $y = kf(x)$ .

$$\text{Можливий запис: } \int kf(x) dx = k \int f(x) dx = kF(x) + C$$

### Теорема (про похідну функції $y = f(kx + b)$ )

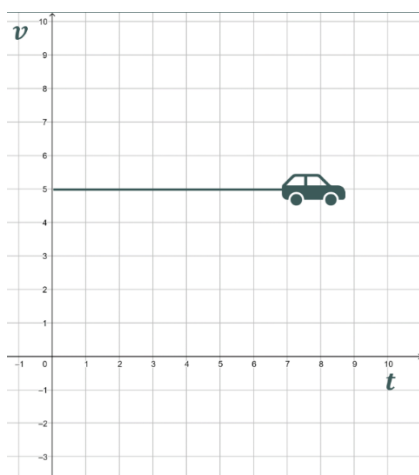
Похідна функції  $y = f(kx + b)$  обчислюється за формулою:  $(f(kx + b))' = kf'(kx + b)$

### Теорема

Якщо  $F(x)$  - первісна для  $f(x)$ , а  $k$  і  $b$  – деякі сталі, причому  $k \neq 0$ , тоді  $\frac{1}{k}F(kx + b)$  - первісна для функції  $f(kx + b)$

$$\text{Можливий запис: } \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$$

### Введення поняття "інтеграл"



Як знайти шлях, що подолає автомобіль?

$$(S = v_0 t)$$

Чи буде цей шлях дорівнювати площі  $S$  прямокутника?

Рис. 1.2. Графік руху тіла

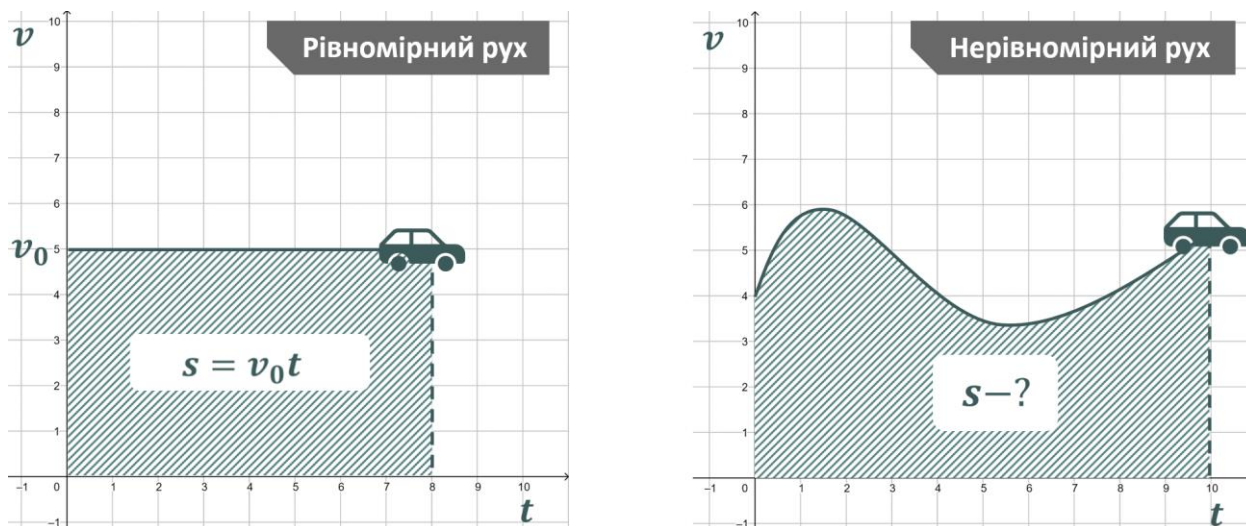
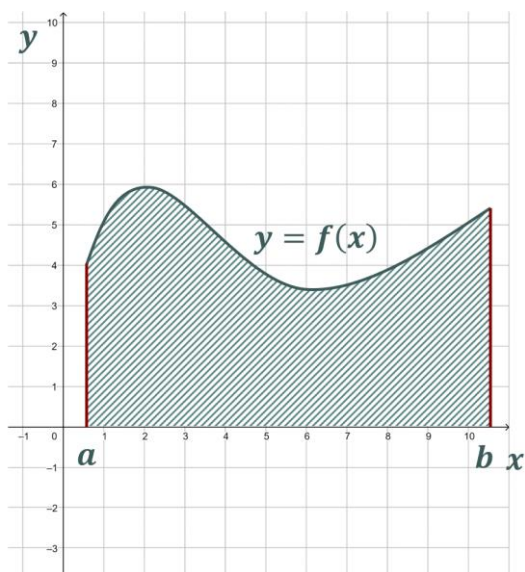


Рис. 1.3. Графіки рівномірного і нерівномірного руху тіл

*Проблемне питання: чи можемо знайти площу такої фігури?*



#### **Означення**

Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на проміжку  $[a; b]$  і  $y = f(x) \geq 0$ , то фігура, обмежена графіком функції  $f$  і прямими  $y = 0, x = a$  і  $x = b$ , називається **криволінійною трапецією**.

*\*Відрізок  $[a; b]$  – це основа криволінійної трапеції.*

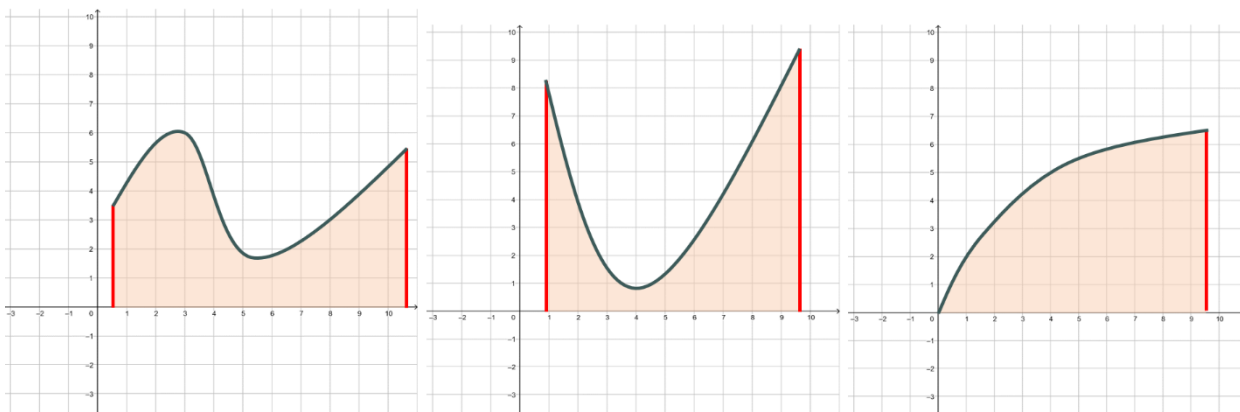


Рис. 1.4. Приклади криволінійних трапецій



### **Теорема**

Площу  $S$  криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції  $y = f(x)$  і прямими  $y = 0$ ,  $x = a$  і  $x = b$  ( $a < b$ ), можна обчислити за формулою

$S = F(b) - F(a)$ , де  $F$  будь-яка первісна функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$

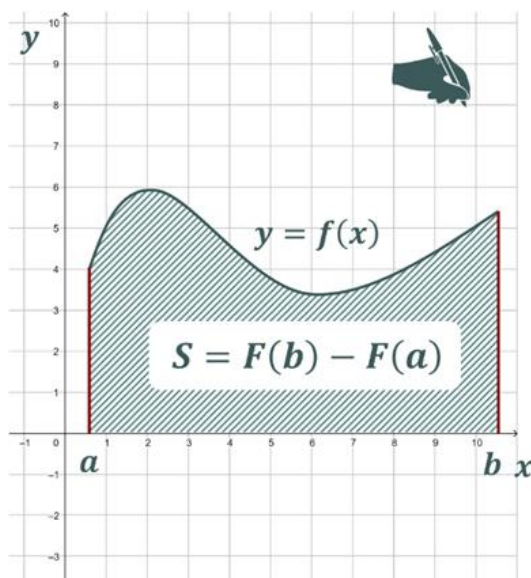


Рис. 1.5. Площа криволінійної трапеції

### **Формула Ньютона-Лейбніца**

#### **Означення**

Нехай  $F$  – первісна функції  $f$  на проміжку  $I$ , числа  $a$  і  $b$  ( $a < b$ ), належать проміжку  $I$ . Різницю  $F(b) - F(a)$  називають визначеним інтегралом функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

"Позначення"  $\int_a^b f(x) dx$  "читається як інтеграл від"  $a$  "до"  $b$  "еф від ікс де ікс".

Числа  $a$  і  $b$  – це межі інтегрування:  $a$  – нижня межа,  $b$  – верхня межа.

### **Геометричний зміст визначеного інтеграла**

Використовуючи теорему про площу криволінійної трапеції та формулу Ньютона-Лейбніца можна зробити висновок, що **площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної**

на відрізку  $[a; b]$  функції  $y = f(x)$ , відрізком  $[a; b]$  осі  $Ox$  і прямими  $x = a$  і  $x = b$ , можна обчислювати за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

### Обчислення визначеного інтеграла

1. Знайти будь-яку первісну  $F$  функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$ ;
2. Обчислити значення первісної  $F$  у точках  $x = b$  і  $x = a$ ;
3. Знайти різницю  $F(b) - F(a)$ ;

Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

### Властивості визначеного інтеграла

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

➤ Рівність виконується для будь-якого  $a$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

➤ Якщо переставити межі інтегрування то інтеграл змінює знак на протилежний

$$3) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

➤ Сталий множник можна виносити за знак інтеграла

$$4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

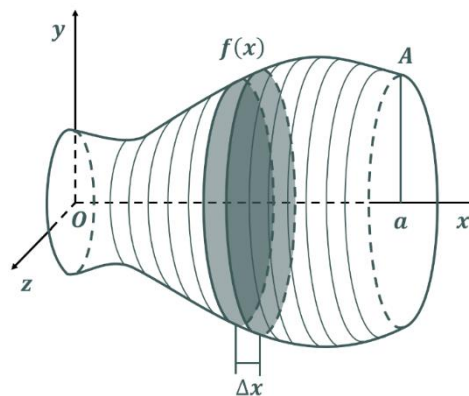
\*Функція  $f(x)$  неперервна на  $[a; b]$  і  $c \in [a; b]$

$$5) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- Інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій

### Об'єм тіла обертання

- Будь-яке тіло обертання можна уявити як суму дуже великої кількості пластин або циліндрів з дуже малими висотами  $\Delta x$ .
- Радіус кожного такого циліндра буде залежати від змінної  $x$  та дорівнюватиме  $f(x)$
- Як знайти об'єм циліндра?  
( $V = \pi R^2 h$ )



- Так як об'єм циліндра  $V = \pi R^2 h$ , то об'єм циліндра, що відповідає змінній  $x$ , буде дорівнювати  $\pi f^2(x) \Delta x$
- Що потрібно зробити, щоб знайти увесь об'єм тіла обертання?  
(Об'єму усього тіла обертання буде відповідати інтегральна сума  $\pi f^2(x_1) \Delta x + \pi f^2(x_2) \Delta x + \dots + \pi f^2(x_n) \Delta x$ )

Отже, об'єм усього тіла обертання можна знайти за формулою:

$$V = \int_0^a \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^a f^2(x) dx$$

### Робота змінної сили

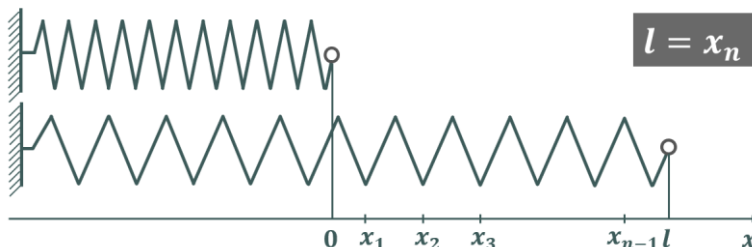
- За допомогою інтегралів можна обчислити роботу змінної сили.  
(Наприклад, розтягування пружини – для того, щоб її розтягнути необхідно постійно застосовувати більшу силу)
- Для розтягування пружини потрібно постійно прикладати більшу й більшу силу. Згадавши уроки фізики, як можемо в такому випадку знайти роботу, необхідну для розтягування пружини на певну відстань?



- Як знайти роботу, якщо внаслідок дії сталої сили  $F$  тіло переміщується в напрямі сили на відстань  $s$ ?  
( $A = Fs$ )

- Як бути в тому випадку, коли на тіло діє не постійна сила а змінна?

(Можемо поділити відрізок на який розтягується пружина на  $n$  рівних частин і знайти виконану роботу на кожній частині)



- Як можемо знайти силу, яку необхідно прикласти щоб розтягнути пружину на відстань  $x$ ?  
(За допомогою закону Гука)

- Сформулюйте закон Гука

$$F = kx$$

$F$  – сила,  $k$  – коефіцієнт жорсткості,  $x$  – видовження.

- Що ви знаєте про коефіцієнт жорсткості?

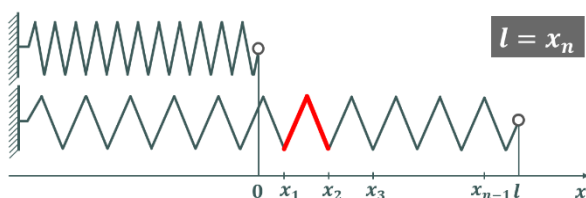
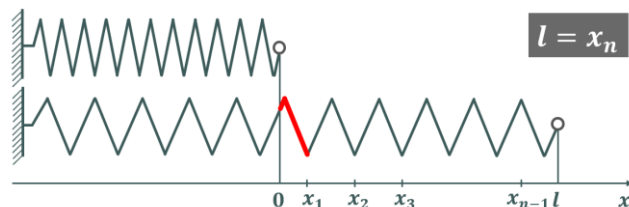
(Коефіцієнт жорсткості – це властивість стрижня або пружини, а не властивість матеріалу, з якого він виготовлений)

- Як можемо виразити силу  $f(x)$ , яку необхідно прикласти, щоб розтягнути пружину на відстань  $x$ ?

Згідно із законом Гука, ця сила пропорційна цій відстані, тобто  $f(x) = kx$

- Яку необхідно виконати роботу, щоб розтягнути пружину на відстань  $[0; x_1]$ ?

$$A_1 = f(x_1) \cdot \Delta x$$



ку необхідно виконати роботу, щоб розтягнути пружину на відстань  $[x_1; x_2]$ ?

$$A_2 = f(x_2) \cdot \Delta x$$

- Отже, яку роботу необхідно виконати, щоб розтягнути пружину на відстань  $[0; l]$ ?

$$A_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

- Якщо ділити відрізок  $[0; l]$  на більшу і більшу кількість частин, то значення роботи  $A_n$  буде все ближче наближатися до точного значення виконаної роботи  $A$

$$n \rightarrow \infty \left| \begin{array}{l} A_n \rightarrow A \end{array} \right. \Rightarrow A = \int_0^l f(x) dx = \int_0^l kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^l = \frac{1}{2} kl^2 - \frac{1}{2} k \cdot 0^2 = \frac{1}{2} kl^2$$

Інші застосування інтегралів у фізиці:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$$

$Q$  – кількість теплоти  
 $c$  – теплоємність

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

$s$  – переміщення  
 $v$  – швидкість  
 $a$  – прискорення

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

$q$  – електричний заряд  
 $I$  – сила струму

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

$m$  – маса тонкого стрижня  
 $\rho$  – лінійна густина

### • Економічний зміст інтеграла

- Нехай у нас є власне виробництво і нам потрібно знайти обсяг виробленої продукції певний проміжок часу.
- Нехай зміна продуктивності підприємства протягом певної одиниці часу

$$y = f(x)$$

Завдання:

Знайти обсяг продукції  $U$ , виробленої за проміжок часу  $[0; T]$

- Відомо, що коли продуктивність не змінюється протягом певного часу ( $f(t)$  - стала функція), то  $\Delta U$  – обсяг продукції виробленої за деякий проміжок часу  $[t; t + \Delta t]$  можна знайти за формулою:

$$\Delta U = f(t)\Delta t$$

Загальний випадок:

$$\Delta U \approx f(t)\Delta t,$$

$$t \in [t; t + \Delta t]$$

- Поділимо відрізок  $[0; T]$  на  $n$  рівних частин точками  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  ( $t_0 = 0, t_n = T$ )



$$\Delta U_k \approx f(t_k) \Delta t$$

$\Delta U_k$  - обсяг продукції виробленої за проміжок часу  $\Delta t = [t_{k-1}, t_k]$ , де  $t_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

- Як знайти загальний обсяг продукції?

$$U \approx \sum_{k=1}^n \Delta U_k = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t$$

- Якщо  $\Delta t \rightarrow 0$ , то кожна з використаних наближених рівностей буде точнішою, отже:

$$U = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t$$

- Отже, розв'язком нашого завдання (Знайти обсяг продукції  $U$ , виробленої за проміжок часу  $[0; T]$ ) буде наступна формула:

$$U = \int_0^T f(t) dt$$

$f(t)$  - продуктивність праці в момент часу  $t$ ,  $U$  - обсяг виробленої продукції за проміжок  $[0; T]$

Інші застосування інтегралів в економіці:

$$\Pi = \int_0^T I(t) e^{-pt} dt$$

$\Pi$  - дисконтована вартість грошового потоку  
 $I$  - швидкість грошового потоку  
 $p$  - річна відсоткова ставка  
 $t$  - час

$$CS = \int_0^{q_0} p(q) dq - p_0 q_0 ;$$

$$PS = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} p(q) dq$$

$q$  - кількість товару  
 $p$  - ціна товару (вартість одиниці),  
 $(p_0; q_0)$  - точка рівноваги попиту і пропозиції  
 $CS$  - надлишок для споживача

### **1.3. Аналіз навчальних підручників із теми "Інтеграл та його застосування"**

Підручники з математики є важливим інструментом навчання учнів. При аналізі підручників з математики слід враховувати декілька критеріїв, які допоможуть вам зрозуміти, наскільки вони ефективні та корисні. Підручники з математики мають бути якісними, доступними та ефективними засобами навчання. При аналізі підручників з математики, слід враховувати наступні критерії:

**Зміст, структура, відповідність освітній програмі.** Підручник має відповідати змісту навчальній програмі та потребам учнів. Підручник повинен включати всі ключові поняття, теорії та методи, необхідні для засвоєння математичного матеріалу, а також поєднувати теорію з практикою. Матеріал повинен бути викладений послідовно та логічно, з відповідною структурою розділів і підрозділів, що сприяє кращому розумінню математичних понять.

**Методи навчання.** Автори підручника повинні доступно розкривати зміст освітнього контенту, надавати зрозумілі та доступні пояснення математичних концепцій і правил. Врахування методів навчання, що використовуються у підручнику, допомагає підвищити ефективність навчання, розвиває різні типи мислення, підтримує інтерес учнів до предмета та сприяє розвитку ключових компетентностей.

Використання відповідних методів навчання сприяє покращенню ефективності навчання учнів. Різні методи, такі як пояснення матеріалу, використання прикладів та вправ, виконання практичних завдань та проєктів, дозволяють залучити учнів до активного пізнавального процесу та покращити їх засвоєння математичних концепцій.

Різні методи навчання враховують різні типи мислення учнів, такі як аналітичне, логічне, творче та візуальне мислення. Використання

різноманітних методів навчання дозволяє кожному учневі знайти свій підхід до вивчення математики та розвитку власних міцних сторін.

Використання різних методів навчання сприяє підтримці інтересу учнів до предмета. Взаємодія з матеріалом через інтерактивні методи, використання прикладів з реального життя та візуалізація математичних концепцій допомагають зробити навчання цікавішим та зрозумілішим для учнів.

Використання різних методів навчання сприяє розвитку ключових компетентностей учнів, таких як критичне мислення, проблемне розв'язування, комунікаційні навички та співпраця. Ці компетентності є важливими як у математиці, так і у житті загалом.

**Система прикладів, завдань та вправ.** Наявність системи прикладів, вправ та завдань у підручнику має велику важливість з кількох причин.

Приклади та вправи є важливим інструментом для засвоєння математичних концепцій. Вони допомагають учням розуміти та застосовувати теоретичні знання на практиці. Через виконання різних типів завдань учні отримують можливість практикувати навички та закріплювати вивчений матеріал.

Виконання вправ та завдань у підручнику розвиває навички розв'язування математичних задач. Вони надають учням можливість розглянути різні ситуації, застосувати різні методи та стратегії для розв'язання завдань, що сприяє розвитку творчого та алгоритмічного мислення.

Приклади, вправи та завдання в підручнику можуть бути спрямовані на підготовку учнів до іспитів та вступних випробувань. Вони допомагають учням засвоїти необхідні знання та навички, які можуть знадобитися під час виконання тестових завдань.

Наявність різних типів прикладів, вправ та завдань у підручнику дозволяє вчителям та учням вибирати ті, які найкраще відповідають їхнім



потребам та рівню складності. Це дозволяє адаптувати навчання до індивідуальних особливостей та потреб учнів.

Порівняльний аналіз діючих підручників профільного рівня [30, 31, 32, 33] щодо змістового наповнення навчальним матеріалом та його логічної структури наведено нижче (Таблиця 1.3).

Таблиця 1.3.

**Порівняльний аналіз підручників з алгебри та початків аналізу для учнів 11 клас**

| № | Підручник  | Зміст навчального матеріалу  |
|---|--|--|
| 1 | Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 304 с. [30] | Первісна, основна властивість первісної, невизначений інтеграл, правила знаходження первісних (правила інтегрування), таблиця первісних (невизначених інтегралів); геометричний зміст і означення визначеного інтеграла, обчислення визначеного інтеграла (формула Ньютона — Лейбніца), криволінійна трапеція, площа криволінійної трапеції, властивості визначених інтегралів, визначений інтеграл і його застосування у фізиці та економіці. |
| 2 | Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) :  | Первісна та її властивості, основна властивість первісної, невизначений інтеграл; Таблиця первісних, правила знаходження   |

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | <p>підруч. для 11-о кл. закл. заг. серед. освіти/ Олександр Істер. Київ : Генеза, 2019. 304 с. [31]</p>   | <p>первісних (правила інтегрування), застоосування первісних у фізиці;</p> <p>Визначений інтеграл, його фізичний і геометричний зміст, обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца, основні властивості визначених інтегралів;</p> <p>Обчислення площ плоских фігур, інші застосування визначеного інтеграла у фізиці</p> |
| 3 | <p>Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х. : Гімназія, 2019. 208 с. [32]</p> | <p>Первісна, основна властивість первісної, невизначений інтеграл;</p> <p>Правила знаходження первісної;</p> <p>Площа криволінійної трапеції, визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца, геометричний зміст визначеного інтегралу.</p>  |
| 4 | <p>Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної</p>  | <p>Первісна, правила знаходження первісної;</p> <p>Площа підграфіка;</p> <p>Визначений інтеграл, формула Ньютона-Лейбніца;</p> <p>Застосування визначених інтегралів.</p>   |

|  |   |  |
|--|---|--|
|  | <p>середньої освіти / Г.<br/>П. Бевз, В. Г. Бевз. К.<br/>: Видавничий дім<br/>«Освіта», 2019. 272 с.<br/>[33]</p> |  |
|--|---|--|

**Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 304 с. [30]**

### **Зміст, структура, відповідність освітній програмі.**

Темі "Інтеграл та його застосування" відведено два параграфи, окремо подано "Теми навчальних проектів", "Відомості з історії" та завдання для підготовки до оцінювання.

У підручнику детально розглядається теоретичний матеріал, супроводжується детальними поясненнями і прикладами, окремо акцентується увага на ключових визначеннях (наприклад, переклад слів іншомовного походження для кращого розкриття змісту понять).

Структура підручника відносно цікава: до кожного параграфа спочатку подається узагальнююча таблиця, що нагадує план вивчення навчального матеріалу, а потім знаходиться пояснення і обґрунтування. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить учням самостійно вибирати рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

### **Методи навчання.**

У підручнику широко використовуються графіки, схеми, діаграми та ілюстрації. На початку більшості параграфів (розділів) наведено довідкову таблицю, яка описує роботу з цим матеріалом у вигляді основних визначень, характеристик, властивостей поняття, що розглядається, систематизації теоретичного матеріалу та спеціальних вказівок до розв'язування задач.

На початку більшості розділів міститься довідкова таблиця, яка описує, як працювати з цим матеріалом у вигляді основних визначень, характеристик

і властивостей понять, що розглядаються, систематизації теоретичного матеріалу та спеціальних вказівок до розв'язування задач. Автор рекомендує вивчати матеріал спочатку до кінця, а потім переходити до наступного розділу.

Розділ "Виявіть свою компетентність" містить практичні завдання та задачі, які потребують аналізу, узагальнення та систематизації набутих знань для їх розв'язання.

Онлайн-підтримка підручника дозволяє учням проходити онлайн-тестування з кожної теми, глибше засвоювати навчальний матеріал, знайомитися з досягненнями видатних українських та зарубіжних вчених, досліджувати розвиток алгебри як науки.

### **Система прикладів, завдань та вправ.**

Приклади розв'язування задач (задачі) знайомлять з основними ідеями розв'язування задач, допомагають учням зрозуміти і засвоїти основні математичні поняття та розвинути необхідні предметні навички. Щоб підкреслити приблизні основи діяльності з розв'язування задач (загальні вказівки), приклади супроводжуються коментарями, які допомагають учням планувати розв'язування подібних задач. Слід зауважити, що коментар не заважає основній ідеї розв'язання певних типів задач, а за необхідності можна отримати детальну консультацію щодо наведених у коментарі розв'язань.

Для закріплення, контролю та самооцінки засвоєння матеріалу в кінці кожного розділу пропонується система запитань і вправ. Запитання покликані допомогти учням пригадати і зрозуміти вивчене, звернути увагу на ключові моменти параграфа та оцінити своє розуміння теоретичного матеріалу.

**Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-о кл. закл. заг. серед. освіти/ Олександр Істер. Київ : Генеза, 2019. 304 с. [31]**

### **Зміст, структура, відповідність освітній програмі.**

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв'язування задач і виконання вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної та домашньої робіт тощо. Теоретичний матеріал підручника автор намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами застосування математики в повсякденному житті.

Зміст теми "Інтеграл та його застосування" підручника розкрито у 5 параграфах і повністю охоплює навчальну програму.

Підручник видано в повному кольорі, що дозволило авторам виділити та зосередити увагу на кожному навчальному елементі та кожному структурному підрозділі окремо.

Автори підручника чітко подають основні теореми, їх означення, доведення та застосування. Майже всі пояснення супроводжуються графіками, схемами і таблицями. Математичні формули не тільки пояснюються, а й даються варіанти їх прочитання.

Наприкінці підручника подано відповіді та вказівки до задач і вправ, предметний покажчик і зміст.

### **Методи навчання.**


На початку розділу автор підручника формулює, що саме учні прочитають, вивчать і засвоять. Такий підхід допомагає мотивувати учнів до навчання, даючи їм зрозуміти, навіщо вони вивчають матеріал.

Учні, в процесі вивчення матеріалу, мають можливість ознайомитися з інформацією в рубриці "А раніше ще..." Вони мають можливість ознайомитися з інформацією в рубриці "А ще до того, як...". Там автор подає перелік цікавих фактів з історії становлення та розвитку математичної науки, виникнення основних її понять, життєвого шляху українських учених, які долучилися до творення шкільного курсу математики, цікаву історичну довідку про історію розвитку теми та історичних постатей.

### Система прикладів, завдань та вправ.

Підручник насичений прикладами різних типів і складності.


Вправи і задачі розміщено відповідно до рівнів навчальних досягнень:



з позначки  1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки  2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки  3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки  4 починаються вправи високого рівня.

Рубрика  "Розв'яжіть задачі та виконайте вправи" містить багато завдань до кожної теми розділу, включаючи класні та домашні завдання, усні вправи та практичні завдання, які допоможуть вам добре засвоїти матеріал розділу.

У рубриці  «Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» пропонується виконати вправи, необхідні для вивчення наступної теми. У рубриці  «Життєва математика» зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі.

Наприкінці кожного параграфа, у рубриці «Перевірте свою компетентність», ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити курс математики, перевірити свою предметну компетентність, рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання «Домашньої самостійної роботи» та «Завдання для перевірки знань».

**Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х. : Гімназія, 2019. 208 с. [32]**

### **Зміст, структура, відповідність освітній програмі.**

Текст підручника поділено на сім розділів, кожен з яких складається з параграфів. Вивчаючи теоретичний зміст параграфів, автор рекомендує зосереджувати увагу на виразах, виділених жирним шрифтом, напівжирним курсивом та курсивом. Таким чином у книзі підкреслюються визначення, правила і, що особливо важливо, математичні твердження.

Зазвичай опис теоретичного матеріалу закінчується прикладами розв'язування задач. Ці пункти можна розглядати як один із зразків розв'язання.

У цій книзі можна вивчити багато важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. Оскільки доведення виходять за рамки цього курсу, у цій книзі подано лише формулювання теорем.

Освітній контент розподілено на 3 параграфи, у яких повністю розкривається зміст навчальної програми.

У цьому підручнику автор знайомить учнів з низкою важливих теорем, деякі з яких подано з повними доведеннями. Там, де доведення виходять за рамки навчальної програми, у підручнику наведено лише формулювання теорем.

У кінці підручника є вправи на повторення курсу алгебри і початків аналізу 11 класу, відповіді та вказівки до вправ, предметний покажчик, зміст підручника, на форзаці знаходяться основні визначення формули.

### **Методи навчання.**

Підручники видаються в повному кольорі. Це дозволяє зосередити увагу на ключових елементах і покращити сприйняття інформації. Автори включають у підручники графіки, які ілюструють теоретичний матеріал та детально пояснюють кроки.

На початку вивчення розділу наводиться перелік тем, основних понять і чому навчаться учні. Зміст підручника пронизують відомості про історичні епізоди з математики, зокрема про діяльність відомих українських математиків.

Наприкінці теми є сторінка узагальнення і систематизації компетентностей учнів "Головне в параграфі". У цій рубриці конспективно наведено основні визначення і формули.

Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну та практичну складові, підручник містить рубрику «Життєва математика», що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та допоможе формувати в учнів практичну компетентність.

У підручнику наведено завдання, які відповідають темам, що вивчаються із можливості застосування комп'ютера у шкільному курсі математики. Таким чином, в учнів з'являється можливість систематизувати та вдосконалити свої знання, що дадуть змогу використовувати комп'ютер під час вивчення курсу математики. Учень має можливість визначати самостійно, яку технічну роботу може виконувати за допомогою комп'ютера; яким чином подавати матеріал, що вивчається, у наочному вигляді. Рекомендується о також складати алгоритми для розв'язування вправ і програми для їх реалізації мовою програмування, яку вивчає учень.

### **Система прикладів, завдань та вправ.**

Кожен розділ супроводжується контрольним запитаннями, задачами для самостійного розв'язування, і рекомендується, щоб учні опанували теоретичний матеріал перед початком роботи.

У підручник включено велику кількість задач і вправ, завдань практичного змісту. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності забезпечить особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятиме формуванню позитивної мотивації учнів до навчання.



Вивчення кожного параграфу закінчується завданнями на повторення для актуалізації опорних знань для наступного уроку.

Перевірити свої знання можна, розв'язавши тестові завдання з розділу "ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ" у тестовій формі.

**Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с. [33]**

**Зміст, структура, відповідність освітній програмі.**

Зміст підручника повністю охоплює матеріал навчальної програми і розбитий на 4 параграфи.

Структура навчального матеріалу чітка і логічна; відповідає структурі навчальної програми. Подані означення окремо виділяються, акцентуючи на собі увагу. Теоретичний матеріал супроводжується поясненнями та прикладами.

Площі підграфіків функцій автори підручника пропонують знаходити за допомогою первісних. Визначений інтеграл подається як інший спосіб визначення площі підграфіка функції.

У темі "Застосування визначених інтегралів" детально описано знаходження об'ємів тіл обертання, роботи змінної сили, економічний зміст інтеграла.

Наприкінці розділу присутня рубрика " Скарбничка досягнень і набутих компетентностей", де систематизуються та узагальнюються отримані теоретичні відомості, формули, таблиці тощо.

У кінці розділу подані історичні відомості про виникнення поняття інтеграл як метода визначення площі.

У кінці підручника є предметний показчик, відповіді та вказівки до задач та справ, подано зміст підручника.

**Методи навчання.** Теоретичний матеріал супроводжується ілюстраціями, графіками, діаграмами, схемами, що візуалізують числову інформацію. Оформлення трикольорове (блакитний, помаранчевий і чорний).

Наявна таблиця первісних, правила знаходження первісної подано як подібність до правил диференціювання.

Зміст підручника насичений історичними фактами та особистостями (Готфрід Вільгельм Лейбніц, Ісаак Ньютон, Бонавентура Кавальєрі, Віктор Буняковський, Михайло Ядренко), цікавими висловленнями учених, що спонукають до цікавої творчої освітньої діяльності. Історичні відомості внесені у темі відповідно логіки вивчення.

**Система прикладів, завдань та вправ.** До кожної теми автори підібрали достатню кількість прикладів. Для закріплення матеріалу наявні рубрики "Перевірте себе" (у вигляді контрольних запитань), "Виконаємо разом" (завдання із прикладами розв'язання), "Вправи для повторення" для актуалізації знань до вивчення нової теми і два варіанти самостійної роботи.

Рубрика "Тематичні тести" складається із 12 тестових завдань на виявлення рівня компетентності учнів.

#### **1.4. Інтерактивні технології як один із важливих напрямів удосконалення освітнього процесу з математики**

Зміни, що відбуваються у загальній середній освіті, обумовлені суттєвим розвитком інноваційної особистісно-розвиваючої парадигми освіти, необхідністю використання інтелектуально-творчого потенціалу людини для творчої діяльності у всіх сферах життя.

Залежно від характеру взаємодії вчителя та учнів розрізняють пасивні, активні та інтерактивні методи навчання, що схематично зображено на рис.

1.6.

Одним із елементів комплексних змін сфери освіти є використання **інтерактивних методів навчання** – один із важливих напрямів удосконалення процесу навчання учнів та обов'язкове умова ефективної реалізації компетентнісного підходу. Формування компетенцій передбачає застосування нових технологій і форму реалізації навчальної роботи. На першому місці - необхідність переходу від інформативних форм і методів навчання до активних, переорієнтація від знаннєвого до діяльнісного підходу, пошук можливостей поєднання теоретичних знань учнів з їх практичними навиками. Сучасні освітні технології, активні та інтерактивні методи навчання повинні корелювати у процесі формування компетенцій учнів.

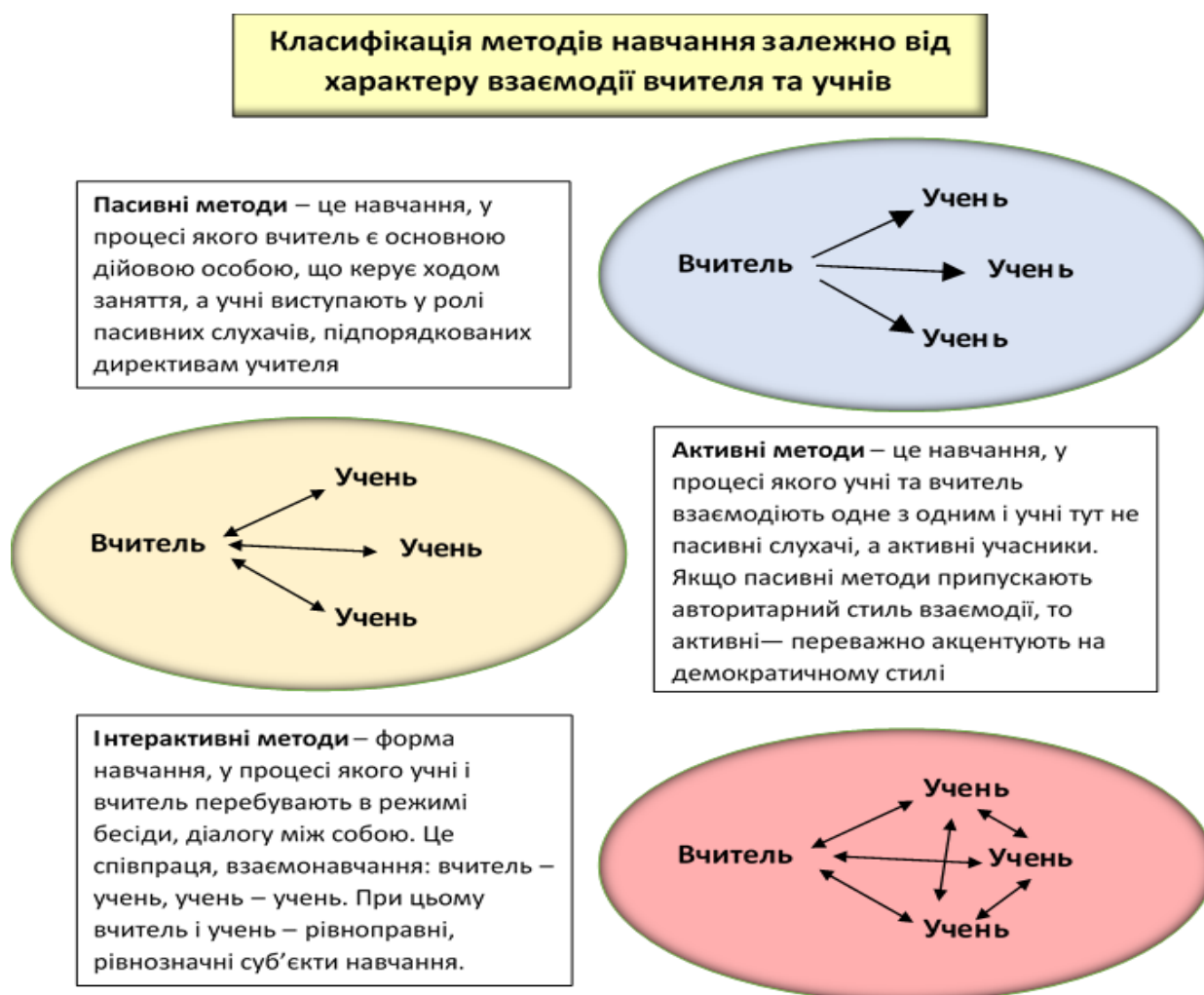


Рис. 1.6. Класифікація методів навчання залежно від характеру взаємодії вчителя та учнів

**Інтерактивне навчання** - здатність пізнання, що здійснюється у формах колективної діяльності учнів. У цьому і полягає суть інтерактивних методів, що навчання відбувається у взаємодії учнів і вчителів.

**Інтерактивне навчання є підходом до навчання**, який активно залучає учнів до пізнавального процесу та створює можливості для активної взаємодії, обміну думками та спільної побудови знань. Використання інтерактивних методів сприяє покращенню засвоєння матеріалу, розвитку критичного мислення, співпраці, комунікаційних навичок та інших ключових компетентностей.

**Метою інтерактивного навчання** є створення сприятливих умов для активного залучення учнів до навчального процесу, розвитку їх критичного мислення, комунікаційних навичок, творчого потенціалу та практичних умінь. **Основні задачі інтерактивного навчання** включають:

1. *Залучення учнів до активної діяльності.* Створення умов, що спонукають учнів до активної участі у навчальному процесі, постановки запитань, розв'язування задач, проведення експериментів та дослідів. Це сприяє поглибленому засвоєнню знань та розвитку вмінь і навичок.
2. *Сприяння взаємодії та співпраці.* Залучення учнів до спільної роботи в групах, дискусій, проектів та інших активних форм взаємодії. Це дозволяє учням обмінюватися ідеями, думками, взаємно навчатися та вирішувати завдання разом.
3. *Забезпечення індивідуального підходу.* Створення умов для самостійної роботи учнів, врахування їхніх індивідуальних особливостей, розвитку творчих здібностей та вироблення навичок самоорганізації та самостійного навчання.
4. *Використання різноманітних методів та засобів.* Використання інтерактивних дошок, комп'ютерних програм, відеоматеріалів, рольових ігор, симуляцій та інших засобів, що сприяють зрозумілому та цікавому представленню навчального матеріалу.

5. *Розвиток критичного мислення та самооцінки.* Залучення учнів до критичного аналізу і оцінки інформації, постановки аргументованих запитань, формулювання власних думок та висловлювань. Це допомагає розвивати навички самооцінки, критичного мислення та самоконтролю.

Мета і задачі інтерактивного навчання спрямовані на забезпечення ефективного та цікавого процесу навчання, що сприяє глибокому засвоєнню знань, розвитку навичок і компетенцій учнів, а також формуванню позитивної мотивації до навчання та саморозвитку.

### **Основні принципи інтерактивного навчання включають:**

1. *Активна роль учнів.* Учні беруть активну участь у навчальному процесі, задають запитання, висловлюють свої думки, розв'язують завдання та виконують практичні вправи. Це допомагає їм активно залучитись до навчання та глибше засвоїти матеріал.
2. *Взаємодія та співпраця.* Учні спілкуються між собою, обмінюються думками, працюють у групах та колективно розв'язують завдання. Це сприяє розвитку співпраці, комунікаційних навичок та вміння працювати в команді.
3. *Використання різноманітних методів.* Використання інтерактивних методів, таких як дискусії, рольові ігри, проектна робота, використання інтерактивних дошок та комп'ютерних програм, дозволяє зробити навчання цікавим та зрозумілим для учнів. Ці методи створюють можливості для активної взаємодії, використання різних типів мислення та відкриття нових підходів до вивчення матеріалу.
4. *Стимулювання творчості.* Інтерактивне навчання сприяє розвитку творчих навичок учнів. Вони мають можливість самостійно формулювати питання, шукати рішення, висловлювати власні ідеї та досліджувати нові підходи.
5. *Формування практичних навичок.* Інтерактивне навчання спрямоване на формування практичних навичок та їх застосування у реальних ситуаціях.

Учні мають можливість виконувати практичні завдання, розв'язувати реальні задачі та застосовувати отримані знання у практичній діяльності.

Отже, суть інтерактивного навчання у тому, що навчальний процес відбувається за умови постійної, активної взаємодії всіх учнів. Це співнавчання, взаємонавчання (колективне, групове, навчання у співпраці), де і учень і вчитель є рівноправними, рівнозначними суб'єктами навчання, розуміють, що вони роблять, рефлексують з приводу того, що вони знають, вміють і здійснюють. Організація інтерактивного навчання передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, вирішення проблеми на основі аналізу обставин та відповідної ситуації. Воно ефективно сприяє формуванню навичок і вмінь, виробленню цінностей, створенню атмосфери співробітництва, взаємодії, дає змогу педагогу стати справжнім лідером дитячого колективу [41].

Застосування інтерактивних методів навчання у класі з математики допомагає зробити процес вивчення цікавим, зрозумілим та ефективним. Воно сприяє поглибленому засвоєнню матеріалу, розвитку критичного мислення та розв'язуванню проблем, що стимулює розвиток учнів.

Головна задача в процесі розвитку особистості не керування нею, а вміння контролювати процес її розвитку, застосовуючи різні інтерактивні методи навчання. «inter» - «взаємний», «act» - діяти. Нова методика сприяє впровадженню в процес навчання взаємодії вчителя і учня в діалоговому спілкуванні.

Навчання, що опирається на підключення до освітнього процесу знайомства всього учнівського колективу без виключень. Це одна із самих прогресивних моделей освітнього спілкування, що характеризується рівноправною взаємодією учасників навчання, можливістю взаємного контролю та оцінок знань, сумісним використанням накопиченого групового досвіду, коли кожен з учасників може внести свій власний, індивідуальний вклад у процес взаємного обміну знаннями.

Інтерактивні методи навчання не тільки дозволяють учням проявляти ініціативу в освоєнні матеріалу, але і стимулюють їх до цього, розвиваючи здібності до самостійного пошуку рішень поставлених завдань.

Інтерактивні методи навчання поділяють на *ігрові* та *неігрові*.

До **ігрових інтерактивних методів** навчання відносяться робочі навчальні та рольові ігри, психологічний тренінг; до **неігрових** – аналіз конкретних ситуацій (case-study), групові дискусії, мозковий штурм, методи кооперативного навчання.

Розглянемо методи, які доцільно застосовувати у процесі вивчення математики.

**1. Ділова гра** імітує різні аспекти людської активності та соціальної взаємодії, знімає протиріччя між абстрактним характером навчального предмета та реальним характером професійної діяльності.

**2. Аналіз конкретних навчальних ситуацій** (метод кейсів, англ. case-study) - метод навчання, призначений для вдосконалення навичок і отримання досвіду в таких областях: виявлення, відбір і вирішення проблеми; робота з інформацією - осмислення значень, описаних в ситуації деталей; аналіз і синтез інформації та аргументів; робота з гіпотезами та висновками; оцінка альтернативи; прийняття рішень; навички групової роботи – слухання і розуміння інших людей.

**3. Групові дискусії** – це колективне обговорення конкретної проблеми, питання або постановка різних позицій, інформації, ідей, думок і пропозицій.

Інтерактивні методи передбачають взаємодію в рамках бесіди та діалогу. Вони орієнтовані на більш широку взаємодію учнів не тільки з вчителем, але і з іншими, а також на домінування активності учнів у процесі навчання. Роль вчителя під час інтерактивних занять зводиться до спрямування діяльності учнів на досягнення освітніх цілей.

**4. Тренінг** (від англ. train - виховувати, вчити, привчати) - це процес отримання умінь та навичок у будь-якій області шляхом виконання послідовних завдань, дій або ігор, спрямованих на розвиток необхідних

навичок. Під тренінгами розуміють навчання, в якому основна увага приділяється на практичне відпрацювання досліджуваного матеріалу, коли в процесі вирішення спеціальних завдань, учні мають можливість розвинути та закріпити отримані ними знання та навички.

Для успішного проведення даного навчання необхідні такі умови: готовність учнів навчатися, застосування різних методів і форм навчання; використання повторення для закріплення знань.

Тренінг дозволяє отримати його учасникам недостатню інформацію, формувати навички стійкості до тиску опонентів. Безперечною перевагою тренінгу є те, що він забезпечує активне залучення всіх учасників у процес навчання.

**5. Робота в малих групах.** Процес профілактичного навчання необхідно побудувати з орієнтацією на здобувача освіти. Така форма роботи застосовується, коли потрібно продемонструвати спорідненість або відмінність певних явищ, виробити стратегію або розробити план, з'ясувати ставлення різних груп учасників до одного і того ж питання.

Цей метод навчання максимально наближає учня до роботи в трудовому колективі, де кожен виконує певну частину роботи.

**6. Тестування.** Метод тестування необхідний для визначення інформованості здобувачів освіти у конкретному розділі математики. Формулювання питань тесту повинно бути коректною, тест має бути складений грамотно і чітко. Отримавши тест, учень повинен уважно прочитати його та відмітити свій варіант відповіді у відповідному графі.

Кожен тест, наданий учню, містить питання відповідного розділу навчально-методичного комплексу. Кожен наступний тест може містити запитання попередніх тестів. Підсумки звичайного тестування підводяться після спільного обговорення відповідей учасниками та вчителем.

Підсумковий тест включає в себе питання всіх розділів дисципліни. Його результат є базовою оцінкою теоретичної частини навчального курсу.



**7. Міні-лекція.** Міні-лекція є однією з ефективних форм викладання теоретичного матеріалу, де кожному терміну дається чітке означення. Важливо посылатися на авторитетні джерела і підтверджувати, що все сказане – вивчено і описано фахівцями в даній галузі.

Теорія краще пояснюється за принципом "від загального до конкретного". Перед тим, як перейти до наступного питання, необхідно зробити підсумки попередньо сказаного.

По завершенні виступу необхідно обговорити всі питання, які виникли в учасників, зробити висновки про використання отриманої інформації на практиці при вирішенні поставлених завдань.

**8. Творчі завдання.** Творчими завданнями вважаємо такі завдання, які вимагають від учня не просто відтворення вивченої інформації, а дають можливість індивідуально підійти до вирішення заданого питання. Творчі завдання можуть мати безліч розв'язків, відповідно, навчання направлене не тільки на закріплення пройденого матеріалу, але й на вивчення нового, в тому числі і самостійно.

Проте, при застосуванні інтерактивних технологій педагог стикається з певними труднощами.

Наприклад, навчання за принципом "рівний-рівному", коли учні працюють у групах або в парах, або в парах учнів з різним складом, дає чудові результати. Однак, навчання за принципом "рівний-рівному" має і слабкі сторони, які необхідно враховувати при використанні цього методу. Для того щоб подолати складності застосування окремих інтерактивних технологій і перетворити їхні слабкі сторони в сильні, треба пам'ятати:

- двосторонній діалог вимагає зміни всієї атмосфери в класі і потребує значного часу на підготовку як для учнів, так і для вчителів;

- проведення спеціальних "організаційних сесій" з учнями, щоб створити "правила роботи в класі". Налаштуйте учнів і спочатку використовуйте прості інтерактивні технології - роботу в парах, малих групах, мозковий штурм тощо;

- використання інтерактивного навчання не є самоціллю, а лише засобом для досягнення результатів, співпраці, розуміння та доброзичливості;

- якщо використання інтерактивної моделі в конкретному класі не дає очікуваних результатів, слід переглянути стратегію і з обережністю підходити до її застосування;

- щоб ефективно використовувати інтерактивне навчання, вчителі повинні ретельно планувати свою роботу;

- використовуючи інтерактивні моделі навчання, вчителі повинні бути добре підготовлені заздалегідь, щоб посилити свій контроль над навчальним процесом.

Використання інтерактивного навчання дає можливість для фахового росту, для зміни себе, для навчання разом з учнями. Зробити перший крок допоможе сам новий підхід до навчання та його цілей, за якого вчитель відверто може визнати себе не спеціалістом і одержати „право” не знати відповіді на ті чи інші запитання (до того ж багато запитань з будь-якого предмета не мають однозначної або єдино правильної відповіді). З іншого боку, після кількох старанно підготовлених уроків вчитель зможе відчувати як змінилося ставлення до нього учнів, а також сама атмосфера у класі – і це стане додатковим стимулом до роботи з інтерактивними технологіями [41].

## РОЗДІЛ II

### МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ "ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ"

#### 2.1. Традиційна методика викладання теми "Інтеграл та його застосування" у 11 класі

Тему "Інтеграл та його застосування" за програмою вивчають в 11 класі. Основна мета вивчення полягає у запровадженні поняття про первісну, інтеграл, операцію інтегрування як обернену до операції диференціювання; застосуванні інтеграла до обчислення площ криволінійних трапецій і об'ємів найпростіших тіл обертання (в геометрії).

Вимоги до знань і вмінь учнів:

- знати означення первісної, інтеграла, розуміти зміст операції інтегрування як оберненої до операції диференціювання;
- уміти знаходити первісні та найпростіші інтеграли, користуючись таблицею і правилами знаходження первісних;
- уміти застосовувати інтеграл до обчислення площ криволінійних трапецій і об'ємів найпростіших тіл обертання.

Для символу інтеграла  $\int_a^b f(x)dx$  упроваджуються такі позначення і терміни:  $a$  і  $b$  — межі інтегрування;  $f$  — підінтегральна функція;  $x$  — змінна інтегрування. Проте зміст множника  $dx$  і термін «диференціал аргументу» не вводяться. Пов'язано це з тим, що поняття диференціала аргументу і функції в шкільному курсі не вивчають. У зв'язку з цим залишається пояснити учням, як читати вираз і запропонувати їм сприймати цей символ як єдиний для позначення інтеграла [40].

Традиційна методика викладання теми "Інтеграл та його властивості" у 11 класі включає наступні етапи:

**Вступ до теми.** Перші уроки починаються з огляду вже вивчених тем, таких як похідна, її властивості, таблиця похідних. Вчителю необхідно навести зв'язок попередніх тем і новою темою "Інтеграл та його властивості". На перших уроках формується розуміння важливості вивчення інтегралів і їх ролі в математиці та реальному житті. Спочатку вводиться на конкретному прикладі первісна як функцію, похідна якої дорівнює заданій функції на певному проміжку, потім рекомендується розглянути задачі з метою пояснення фізичного і геометричного змісту сталої інтегрування та мотивації введення інтеграла [40].

Доцільно, щоб, користуючись таблицею похідних, учні самостійно на уроці заповнили таблицю первісних.

**Теоретичний огляд.** Наступним етапом вчитель пояснює основні поняття, пов'язані з інтегралами, такі як поняття первісної функції, нижньої та верхньої межі суми, властивості інтегралів. Для цього необхідно використовувати доцільні приклади для демонстрації розуміння концепцій.

Поняття визначеного інтеграла виникло у зв'язку із розв'язуванням геометричних задач (про обчислення площі криволінійної трапеції) та фізичних (про визначення шляху, пройденого точкою під час прямолінійного руху за її відомою миттєвою швидкістю; роботу змінної сили; масу неоднорідного стрижня). Розв'язування їх зводиться до виконання граничного переходу певного типу.

Традиційно склалося так, що в курсах математичного аналізу вищої школи введення визначеного інтеграла здебільшого пов'язується із розв'язуванням задачі про визначення площі криволінійної трапеції. Проте в шкільних посібниках і в підручниках для технікумів була спроба покласти в основу означення інтеграла формулу Ньютона-Лейбніца.

Під час введення поняття інтеграла в школі можна здійснити два методичні варіанти:

1) Задача про площу криволінійної трапеції.

2) Задача про масу неоднорідного стрижня [40]

**Похідні та інтегрування.** Учні повинні усвідомлювати тісний зв'язок між похідною та інтегралом. Це можна продемонструвати прикладами.

Насамперед слід звернути увагу учнів на те, що кожна дія (операція), яка вивчалась у шкільному курсі, має обернену: додавання – віднімання, множення – ділення, піднесення до степеня – добування кореня.

Основною операцією диференціального числення є операція відшукування похідної  $f'$  заданої функції  $f$ . Під час розв'язування задач, зокрема з фізики і геометрії, доводиться виконувати обернену операцію, тобто за відомою похідною деякої функції визначати саму функцію. Наприклад: 1) за формулою функції, яка задає швидкість  $v$  руху тіла, знаходити формулу функції, яка задає закон руху – залежність шляху  $S$  від часу  $t$ ; 2) за відомим кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої в кожній точці певного проміжку (функція  $x$ ) – формулу функції, до графіка якої проводять дотичну [40].

**Методи обчислення інтегралів.** Вчитель наводить учням різні методи обчислення інтегралів, такі як метод прямокутників, метод трапецій, метод Сімпсона; демонструє, як застосовувати ці методи для обчислення значень інтегралів.

**Властивості інтегралів.** Учитель знайомить учнів з основними властивостями інтегралів, такими як лінійність, адитивність, інтегрування за частинами та заміна змінної; пояснює, як ці властивості можуть бути застосовані для спрощення обчислень.

**Практичні вправи та завдання.** Кожні пояснення вчитель закріплює прикладами, вправами і завданнями. Вчитель повинен забезпечити достатню кількість вправ та завдань для самостійного розв'язування; різнорівневих завдань, починаючи від простих до більш складних, щоб учні мали можливість поетапно розвивати свої навички.

**Застосування в реальних ситуаціях.** Значного ефекту набуває демонстрація учням прикладів застосування інтегралів у різних науках та

практичних ситуаціях. Необхідно наголосити, що в математиці інтеграл використовують не тільки для обчислення площ фігур, а й для визначення об'ємів тіл, довжин дуг кривих ліній, площ поверхонь тіл. Доцільно також навести приклади задач на застосування інтеграла у фізиці, техніці, економіці.

**Підсумки та рефлексія.** Завершення уроків відбувається підведенням підсумків вивченого матеріалу, повторенням ключових понять та властивостей інтегралів; закріплення учням набутих компетенцій на основі додаткових вправ або дискусійних питань.

Використовуючи традиційну методику викладання теми "Інтеграл та його властивості" у 11 класі, вчитель надає учням систематизоване та послідовне вивчення цього матеріалу. Учні отримують теоретичні знання, практичні навички та можливість застосувати їх у різних ситуаціях. Традиційна методика допомагає створити стійке розуміння інтегралів та їх властивостей, а також розвиває аналітичне мислення та самостійність учнів.

## **2.2. Інтерактивні методики колективних навчальних занять у процесі вивчення теми "Інтеграл та його застосування"**

У повноцінному інтерактивному навчанні учасники взаємодіють з фізичним, соціальним середовищем (один з одним та вчителем) і з навчальним матеріалом. При всій багатогранності методів і форм організації навчання реалізація інтерактивної форми навчання для дисциплін математичного циклу частіше всього здійснюється за допомогою використання ігрових імітаційних організацій форм занять, які містять розробку інженерного, технологічного, економічного та інших видів проєктів в ігрових умовах, що імітують професійну діяльність - так званий **метод проєктів**. Практика викладання показує, що тільки 5-10% навчальних занять з математики може бути проведено з використанням методу проєкту. У

цьому зв'язку актуальною є проблема пошуку додаткових і цікавих для навчання інтерактивних форм, які можна застосовувати на уроках математики.

Інтерактивний метод можна розглядати як найбільш сучасну форму активних методів. Інтерактивний («inter» – це взаємний, «act» – діяти) означає взаємодіяти, знаходитися в режимі бесіди, діалогу з ким-небудь. Іншими словами, на відміну від активних методів, інтерактивні орієнтовані на більш широку взаємодію учнів і не тільки з вчителем, а й з іншими учасниками, причому акцент робиться на домінування активності учнів. Місце вчителя на інтерактивних заняттях зводиться до направлення учнівської діяльності, на досягнення цілей занять. Інтерактивне навчання — це спеціальна форма організації пізнавальної діяльності. Вона має цілком конкретні і прогнозовані цілі. Мета полягає у створенні комфортних умов навчання, при яких учень відчуває свою успішність, свою інтелектуальну успішність, що робить продуктивним сам процес навчання, а також створює базу для роботи з вирішення проблем після закінчення навчання.

**Задачами інтерактивних форм навчання є:**

збудження інтересу учнів до навчання;

ефективне засвоєння навчального матеріалу;

самостійний пошук шляхів і варіантів рішень поставленої навчальної задачі (вибір одного із запропонованих варіантів або знаходження власного варіанта та обґрунтування рішення);

встановлення взаємодії між учнями, навчання працювати в команді, проявляти толерантність до будь-якої точки зору, поважати право кожного на свободу слова, поважати його гідність;

формування в учнів власної думки та відношення;

формування життєвих і професійних навичок;

вихід на рівень усвідомленої компетентності учня.

Сучасна педагогіка багата цілим арсеналом інтерактивних форм, серед яких можна виділити наступне:

*творчі завдання;*

*робота в малих групах;*

*робота в парах;*

*навчальні ігри (ролеві ігри, імітації, ділові ігри та освітні ігри);*

*вивчення та закріплення нового матеріалу (інтерактивна лекція, робота з наочними посібниками, відео- та аудіоматеріалами, "учень у ролі вчителя", "кожний навчає кожного", мозаїка (ажурна пилка), використання запитань, сократичний діалог тощо);*

*кейс-метод.*

На основі теоретичного аналізу навчально-методичної та наукової літератури можна виділити основні **принципи інтерактивних форм навчання:**

- заняття – не лекція, а спільна робота (принцип колективної мислительної діяльності);
- всі учасники рівні незалежно від віку, соціального статусу, досвіду, місця роботи (принцип рівності);
- кожен учасник має право на власну думку з будь-якого питання (принцип свободи самовиявлення);
- немає місця прямій критиці особистості (критикувати можна тільки ідею) (принцип психологічного комфорту);
- все сказане на занятті – не вказівка до дії, а інформація до роздумів (принцип партнерства);
- наприкінці занять необхідно підвести підсумки і оцінити проведення заняття (принцип зворотного зв'язку).

При всій багатогранності методів і форм організації навчання реалізація інтерактивної форми навчання математики частіше всього здійснюється шляхом використання ігрових форм організації занять, що імітують професійну діяльність. Що стосується вивчення розділів програм, які не мають професійного контексту, то в цьому випадку інтерактивне



навчання можна реалізувати за допомогою організації та проведення колективних навчальних занять, суть яких – навчання в діалозі. Саме на колективних навчальних заняттях інтерактивність навчання досягає своєї найвищої організаційної форми – колективної. Саме на колективних навчальних заняттях ми можемо спостерігати ті ознаки, які присутні в інтерактивній формі навчання, – діалог, мисленнєва діяльність, креативність, свобода вибору, створення ситуації успіху, рефлексію.

Ознаками колективного навчального заняття є:

- відсутність загального фронту;
- засвоєння навчального курсу за різними освітніми маршрутами різними учнями;
- часова кооперація учнів.

У колективних навчальних заняттях присутні такі навчальні ситуації, як:

- індивідуальна робота учнів;
- робота в парах з вчителем та іншими учнями;
- робота в малих групах.

Основний принцип колективних навчальних занять — "Кожний – мета, кожний – засіб". Це означає, що все, що робиться у навчальній групі, має робитися для кожного і через кожного. Тобто в цьому принципі узагальнено два принципи — індивідуалізації навчання та всезагальної співпраці.

Методики колективних навчальних занять різноманітні:

- взаємопередача тем – кожен, хто вивчив свою тему, навчає іншого учня в парах змінного складу;
- поабзацна обробка складних навчальних текстів у парах змінного складу;
- взаємообмін завданнями — учень, який навчився виконувати завдання визначеного типу, повинен навчити іншого учня розв'язувати його;

- взаємотренування – відпрацювання основних понять, термінів: учень диктує напарнику завдання, перевіряючи відповіді на своїй картці;
- взаємоперевірка індивідуальних завдань – після самостійно виконаних вправ або відповідей на теоретичні питання з повторення і закріплення знань, учні у парах змінного складу знаходять помилки і виправляють їх;
- у динамічних парах за планом розкривається зміст питання або виконується реферат.

Основою функціонування колективних навчальних занять є тимчасові кооперації учнів, які створюються для виконання тієї чи іншої конкретної навчальної цілі. Тимчасову кооперацію, якщо у її складі три особи і більше, називають малою групою.

На колективному занятті, як правило, діють кілька тимчасових кооперацій, що відрізняються як темами вивчення, так і формами, методами роботи, чисельністю, якісним складом. Зокрема, в одному колективі можна одночасно спостерігати всі чотири загальні організаційні форми навчання: індивідуально-опосередковану; парну; групову (взаємодія за типом «один говорить – інші слухають») і колективну (спілкування в групі відбувається в парах змінного складу).

На заняттях можливі ситуації, коли для всього колективу певний час проводиться фронтальна робота. Це теж різновид малої групи. Таким чином, усі переваги позитивного досвіду, розробленого будь-якою педагогічною теорією і практикою, можна використовувати переважно у всьому колективі одночасно, або в окремих малих групах, або окремих учнів.

З практичною метою реалізації колективних навчальних занять власні методики повинні бути уточнені та адаптовані переважно до специфіки навчального процесу та безпосередньо до процесу вивчення математики.

Для того, щоб проведення колективних навчальних занять було ефективним, зміст навчального матеріалу повинен відповідати наступним умовам:

- легко структуруватися;
- легко переструктуруватися, виділятися в блоки, теми в яких можна вилучити незалежно одна від одної, тобто у довільному порядку;
- у більшій своїй частині має бути достатньо простим для можливості самостійного вивчення учнями.

Найбільш вдало з точки зору виконання вимог до змісту навчального матеріалу та періоду застосування колективних навчальних занять підходить тема "Інтеграл і його властивості". Зміст цього розділу досить легко переструктурується і компонується в блоки, які можна вилучити незалежно від іншого. Незважаючи на те, що для колективних навчальних занять характерна відсутність загального фронту, його наявність для завантаження в навчальний матеріал з математики необхідно.

Перший урок "Вступ" у вигляді лекції-візуалізації представляє вчитель. У ньому він дає визначення первісної, невизначеного інтеграла, виділяє його властивості, а також характеризує види інтегралів і способи їх обчислення. Зміст матеріалу представлений навчальним також у вигляді логічної таблиці-схеми "Види інтегралів і способи їх обчислення".

У якості методики, використовуваної для формування навиків рішення практичних завдань, доцільно з точки зору ефективності навчання вибрати методику взаємообміну завдань. Ця методика призначена для первинного вивчення типових завдань учнями у парах змінного складу. Для реалізації даної методики вчитель готує спеціальний дидактичний матеріал — картки, що містять по три однотипні вправи. Наприклад, за темою «Табличні інтегралі» можна скласти шість карток із завданнями, різними за типом, але однаковими за структурою. Орієнтовний час виконання завдання має

залишатися в середньому близько 5 хвилин. Для опрацювання даної теми можна сформувати малу групу із трьох пар, тобто з шести осіб. Порядок роботи в парі за методикою взаємообміну завдань може бути таким:

1. Прочитати партнеру завдання зі своєї картки.
2. Виконати в зошиті партнера перше завдання зі своєї картки, пояснюючи його рішення.
3. Стежити, як партнер виконує друге завдання із вашої картки.
4. Помінятися ролями з партнером: тепер він пояснює вам завдання своєї картки.
5. Помінятися картками з партнером. Виконання друге завдання працюючи самостійно.
6. Помінятися зошитами з партнером. Перевірити один у одного правильність виконання друге завдання.
7. Дякуємо партнеру за роботу. Взяти його картку собі. Змінити наступного партнера.

Зміна партнерів не відбувається доти, поки кожен член малої групи не отримає і передасть всі типи завдань. Навчальний процес стає захоплюючим та пізнавально активним. Важливо також спочатку відзначити, що при застосуванні цієї методики необхідно здійснити «запуск», а саме, попередньо навчити методиці розв'язання запропонованих завдань і роботі з партнером кожного учня з групи. Навчання може відбуватися або до заняття, або безпосередньо на заняття. Учні легко сприймають техніку роботи в парах і з цікавістю захоплюються роботою, а кількість додаткової індивідуальної роботи з навчання є незначною і укладається в рамки планового навантаження вчителя.

На рис. 2.1 представлені картки із завданнями на тему «Площа плоских фігур» для однієї пари учнів.

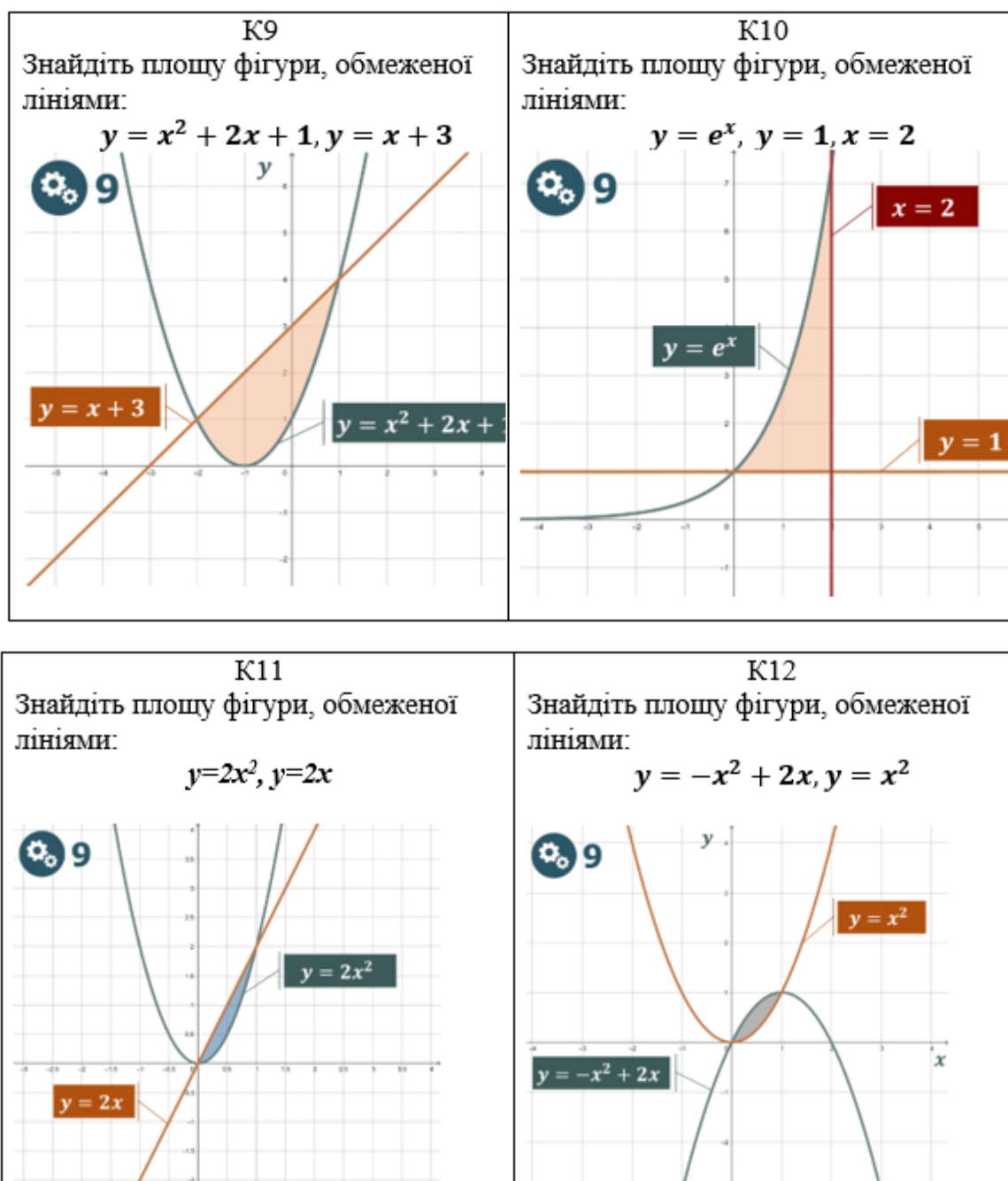


Рис. 2.1. Дидактичний матеріал для роботи з методикою взаємообміну завданнями

Для зручності роботи вчителя за даною методикою доцільно запровадити табло обліку проходження теми, підрозділу, розділу (див. рис. 2.2), в якому можна зафіксувати інформацію про те, яка тема вивчається конкретним учнем, з які результатами він попередньо отримав тощо. При цьому можна використовувати символи:

- — приступивши до вивчення або виконання завдання
- + — вивчив з вчителем,
- @ - передав іншому учню тощо.

Крім цього, можна виставляти оцінки у балах, показувати методики навчальної роботи (Л, — лекція, ОК — опорний конспект, ВОЗ — взаємообмін завданнями, ВПТ — взаємопередача тем, КР — контрольна робота тощо), а також форми взаємодії (С — самостійна, П — у парі, Г — у малій групі тощо).

| Прізвище, ім'я студента | Назва теми |         |         |             |         |  |    |
|-------------------------|------------|---------|---------|-------------|---------|--|----|
|                         | 1          | 2       | 3       | 4           |         |  | КР |
| Баранов А.              | + / Л      | • / ВОЗ |         | @ 4 • / ВОЗ |         |  |    |
| Волошин П.              | + / Л      | @ / ВОЗ |         |             |         |  |    |
| Капустин В.             | + / Л      | + / ВОЗ | • / ВОЗ |             | • / ВОЗ |  |    |
| ...                     |            |         |         |             |         |  |    |

Рис. 2.2. Фрагмент таблиці обліку вивчення підрозділу «Невизначений інтеграл»

З урахуванням індивідуальних особливостей і можливостей кожного учня, вчитель при необхідності складає план на кожне заняття. У плані навчального заняття конкретизується поетапна робота кожного учня: яку тему вивчає, з ким, за якою методикою, час виконання завдань, форма контролю тощо. Методи вивчення тієї чи іншої теми бажано підбирати з урахуванням побажання учня. Але при цьому важливо, щоб ролі кожного учня були різноманітні: вивчає, слухає, викладає, перевіряє, перевіряється, організовує, керує, контролює тощо.

Відносно методик, які можуть бути використані для проведення лекційних або лекційно-практичних занять в інтерактивній формі, то тут найбільш простими для розуміння учнів, зручними для використання вчителем і ефективними з точки зору результативності навчання є **дві**

**основні методики колективних навчальних занять: методика роботи в малих групах і методика взаємопередачі тем.** Для їх застосування розробляється або адаптується специфічний дидактичний матеріал.

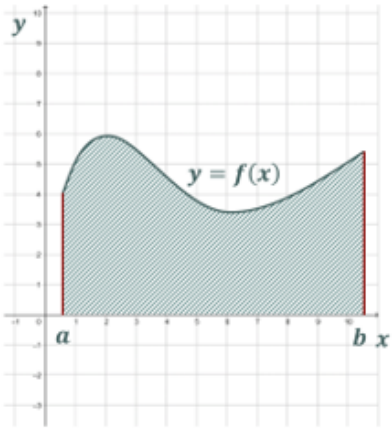
**Методика роботи в малих групах** заснована на методиці поабзацного опрацювання складних навчальних текстів, яку можна застосувати для роботи не тільки в парах змінного складу, але і в малих групах. На рис. 2.3 представлений фрагмент конспекта лекцій для вивчення в групі.

- **Криволінійна трапеція**

**Означення**

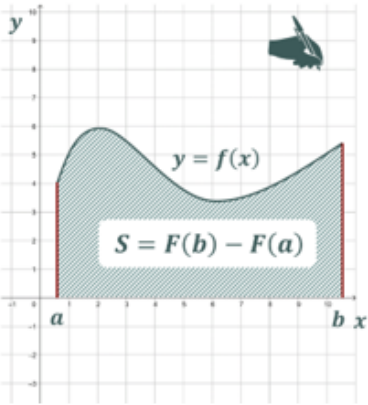
Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на проміжку  $[a; b]$  і  $y = f(x) \geq 0$ , то фігура, обмежена графіком функції  $f$  і прямими  $y = 0, x = a$  і  $x = b$ , називається **криволінійною трапецією**.

\*Відрізок  $[a; b]$  – це основа криволінійної трапеції.


- **Площа криволінійної трапеції**

**Теорема**

Площу  $S$  криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції  $y = f(x)$  і прямими  $y = 0, x = a$  і  $x = b$  ( $a < b$ ), можна обчислити за формулою  $S = F(b) - F(a)$ , де  $F$  будь-яка первісна функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$


- **Формула Ньютона-Лейбніца**

**Означення**

Нехай  $F$  – первісна функції  $f$  на проміжку  $I$ , числа  $a$  і  $b$  ( $a < b$ ), належать проміжку  $I$ . Різницю  $F(b) - F(a)$  називають **визначеним інтегралом** функції  $f$  на проміжку  $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- **Геометричний зміст визначеного інтеграла**

Використовуючи теорему про площу криволінійної трапеції та формулу Ньютона-Лейбніца можна зробити висновок, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку  $[a; b]$  функції  $y = f(x)$ , відрізком  $[a; b]$  осі  $Ox$  і прямими  $x = a$  і  $x = b$ , можна обчислювати за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Рис. 2.3. Фрагмент опорного конспекту лекції для вивчення в малій групі

Техніка взаємодії в малій групі повинна бути такою, щоб кожен учень був залучений до спільної роботи, причому в різних ролях. Наприклад, при вивченні теоретичного матеріалу порядок роботи може бути таким: один учень читає перший фрагмент тексту вголос (інші – про себе); потім учень, який сидить ліворуч відтворює, що зрозумів, пояснює ключові терміни; третій по колу – формулює і задає запитання на розуміння прочитаного фрагмента (або наводить приклади) тощо. Крім того, важливо залучити кожного в процес оцінки та виправлення відповідей іншого товариша. Для цього рекомендується встановити правило: перше слово дається учню, який сидить ліворуч від того, хто відповідає, а потім – усі бажаючі.

У тому випадку, коли тема досить проста для самостійного вивчення, а зміст теми містить і теоретичну, і практичну частини, то може бути використана методика взаємопередачі тем. На рис. 2.4 представлений спеціально оформлений текст для вивчення за методикою взаємопередачі тем у парах змінного складу.

Методика призначена для організації вивчення матеріалу у процесі роботи в парах змінного складу. Різні теми програми, що вивчається, розподіляються між учнями. Одну тему учень вивчає індивідуально, решту – його навчають інші учні. Тему, яку він засвоїв самостійно, він передає своїм однокласникам. Керівник групи з числа учнів може вести табло звіту та координувати діяльність малої групи.

Навчальні тексти для вивчення тем за методикою взаємопередачі оформляються спеціальним чином. Текст ділиться на частини, що складаються з інформаційних фрагментів (абзаців) та супровідних запитань, завдання першої групи. Іноді запитання можуть і не бути, але в тих випадках, коли для розуміння теми достатньо назви абзацу. Крім того, для учнів, які досягли високого рівня роботи за методикою взаємопередачі тем, можна пропонувати тексти без запитань і завдань, оскільки вони самі в стані скласти такі запитання, і які вони запропонують при навчанні своїх партнерів.



Наприкінці даються питання та завдання другої групи, вони більш складні та стосуються всього тексту.

**• Об'єм тіла обертання**

- Будь-яке тіло обертання можна уявити як суму дуже великої кількості пластин або циліндрів з дуже малими висотами  $\Delta x$ .
- Радіус кожного такого циліндра буде залежати від змінної  $x$  та дорівнюватиме  $f(x)$
- Як знайти об'єм циліндра?  
( $V = \pi R^2 h$ )
- Так як об'єм циліндра  $V = \pi R^2 h$ , то об'єм циліндра, що відповідає змінній  $x$ , буде дорівнювати  $\pi f^2(x) \Delta x$
- Що потрібно зробити, щоб знайти увесь об'єм тіла обертання?  
(Об'єму усього тіла обертання буде відповідати інтегральна сума  $\pi f^2(x_1) \Delta x + \pi f^2(x_2) \Delta x + \dots + \pi f^2(x_n) \Delta x$ )

Отже, об'єм усього тіла обертання можна знайти за формулою:

$$V = \int_0^a \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^a f^2(x) dx$$

**ПРИКЛАД.** Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі  $x$  фігури, обмеженої заданими лініями:

- 1)  $y = 2x + 1, x = 1, x = 4, y = 0$
- 2)  $y = -x^2 + 2x, y = 0$

**РОЗВ'ЯЗОК:**

- 1)  $y = 2x + 1, x = 1, x = 4, y = 0$

$$V = \pi \int_1^4 (2x + 1)^2 dx = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + 1)^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{\pi \cdot (2x + 1)^3}{6} \Big|_1^4$$

$$= \frac{\pi \cdot (2 \cdot 4 + 1)^3}{6} - \frac{\pi \cdot (2 \cdot 1 + 1)^3}{6} = \frac{729}{6} \pi - \frac{27}{6} \pi = \frac{702}{6} \pi = 117\pi \text{ (куб.од.)}$$

**ВІДПОВІДЬ:**  $117\pi$  (куб.од.)

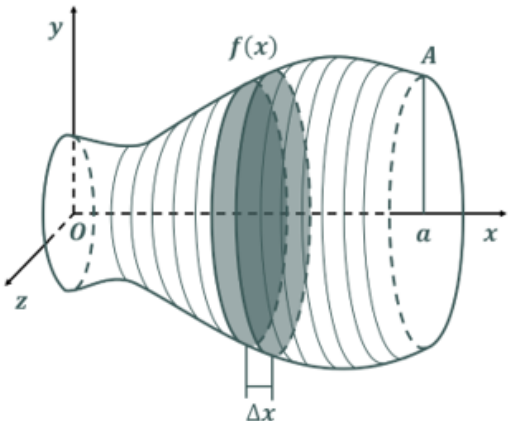


Рис. 2.4. Текст для вивчення теми за методикою взаємопередачі тем

При індивідуальному вивченні теми учень виконує над кожним фрагментом наступні операції: вивчає теоретичну частину, робить заголовки, виконує завдання першої групи.

Опрацювавши таким чином усі пункти, учень переходить до завдань другої групи. Після чого самостійно вивчену тему він в обов'язковому

порядку здає вчителю, який дає допуск до передачі її іншим учням. Тепер завдання учня – навчити партнера.

Він відтворює зміст першого фрагмента, перевіряє рівень розуміння (задає запитання, пропонує вирішити завдання першої групи), просить партнера відтворити текст і формує свої запитання на розуміння абзацу, а потім записати заголовок цієї частини. У результаті спільної роботи у партнера у зошиті з'являється детальніший план теми. Після цього партнери змінюються ролями. Той, хто був у ролі "вчителя", стає тепер "учнем" і отримує від партнера нову тему за таким же алгоритмом. Навчивши один одного, партнери міняються картками та індивідуально виконують завдання другої групи. Перевіривши один одного, вони роблять позначки в табло обліку, переходять в інші пари, щоб навчити цю тему інших учнів.

Для забезпечення ефективної навчальної діяльності на основі методики взаємопередачі важливо не тільки перевірити рівень знань, але й готувати учнів до ролі вчителя, формувати вміння ставити запитання партнеру, контролювати його, дотримуватися алгоритму взаємодії, бути вимогливим.

Проведення колективних навчальних занять вимагає від вчителя додаткового часу на підготовку відповідного організаційного та методичного забезпечення, але, безсумнівно, забезпечує інтерактивність навчання, що істотно підвищує пізнавальну активність учнів і ефективність освітнього процесу.

### **2.3. Використання сучасних цифрових технологій для обчислення інтегралів**

Процес знаходження інтегралів можна урізноманітнити застосуванням цифрових технологій, зокрема:

1. **Matlab** – пакет прикладних програм для чисельного аналізу, а також мова програмування, що використовується в даному пакеті.

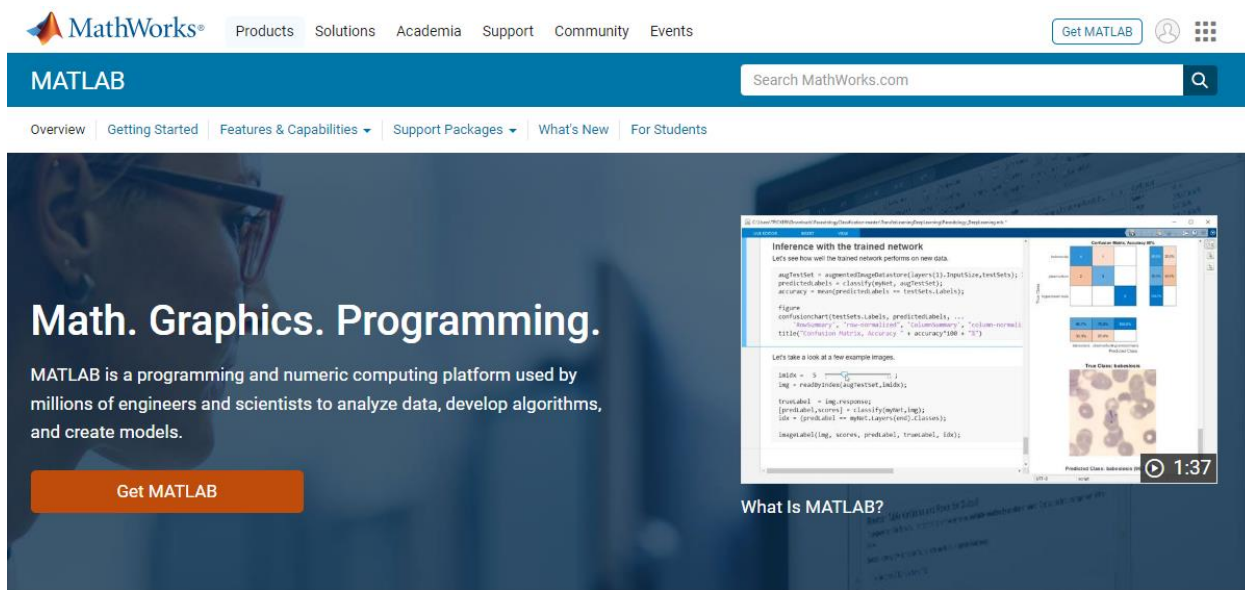
2. **Wolfram Mathematica** – це потужна система символьних обчислень та обчислювального середовища, розроблена компанією Wolfram Research.
3. **Maple** - це інтерактивна система символьних та чисельних обчислень.
4. **Python** – мова програмування високого рівня.

**MATLAB** є потужним інструментом для чисельних обчислень. Вона створена компанією The MathWorks і є зручним засобом для роботи з математичними матрицями, малювання функцій, роботи з алгоритмами, моделювання з можливістю створення графічного інтерфейсу.

MATLAB надає користувачеві велику кількість функцій для аналізу даних, які покривають майже всі області математики, зокрема:

- Матриці та лінійна алгебра — алгебра матриць, лінійні рівняння, власні значення і вектори, сингулярності, факторизація матриць та інше.
- Многочлени та інтерполяція — корені многочленів, операції над многочленами та їх диференціювання, інтерполяція та екстраполяція кривих...
- Математична статистика та аналіз даних — статистичні функції, статистична регресія, цифрова фільтрація, швидке перетворення Фур'є та інші.
- Обробка даних — набір спеціальних функцій, включаючи побудову графіків, оптимізацію, пошук нулів, чисельне інтегрування та інше.
- Диференційні рівняння — вирішення диференційних і диференційно-алгебраїчних рівнянь, диференційних рівнянь із запізнюванням, рівнянь з обмеженнями, рівнянь в часткових похідних та інше.
- Розріджені матриці — спеціальний клас даних пакету MATLAB, що використовується у спеціалізованих додатках.

- Цілочисельна арифметика — виконання операцій цілочисельної арифметики в середовищі MATLAB [43].



## Designed for the way you think and the work you do.

MATLAB® combines a desktop environment tuned for iterative analysis and design processes with a programming language that expresses matrix and array mathematics directly. It includes the Live Editor for creating scripts that combine code, output, and formatted text in an

### Professionally Built

MATLAB toolboxes are professionally developed, rigorously tested, and fully documented.

### With Interactive Apps

Рис. 2.5. Головна сторінка MatLab

**Wolfram Mathematica** – це потужна система, яка надає широкий набір функцій для аналізу, моделювання, візуалізації та обчислення математичних об'єктів, таких як функції, рівняння, графи та інтеграли.

Mathematica володіє потужними символними можливостями, що дозволяють виконувати аналітичні обчислення та отримувати точні результати з урахуванням символних змінних. Вона також має чисельні методи для обчислення значень функцій, розв'язування рівнянь та виконання інтегрування чисельними методами.

Mathematica пропонує зручне інтерактивне середовище, в якому користувач може виконувати обчислення, вводити математичні вирази та

взаємодіяти з результатами. Вона також має багатий набір графічних можливостей для візуалізації даних та математичних об'єктів.

Mathematica використовується в багатьох галузях, включаючи математику, фізику, інженерію, комп'ютерні науки та інші наукові дисципліни. Вона є потужним інструментом для виконання складних обчислень, проведення досліджень та моделювання різних математичних задач.

Mathematica має вбудовані функції для символного та чисельного обчислення інтегралів. Ви можете використовувати функції, такі як **Integrate**, **NIntegrate**, **Integrate** з умовами та багато інших.

View pricing Available with Premier Service Plus and Personal License Service Plus for Mathematica or as a separate subscription. Already a Mathematica Online user? [Sign in](#)

Рис. 2.6. Головна сторінка Wolfram Mathematica

**Maple** є символно-числовою математичною програмою, розробленою компанією Maplesoft. Вона надає потужні можливості для символних обчислень, чисельного аналізу, векторного обчислення, розв'язування

диференціальних рівнянь, символного та чисельного розв'язування інтегралів, графічного візуалізації та багато іншого.

Maple є інтерактивною системою обчислень, що дозволяє користувачеві працювати з математичними виразами, використовуючи символну математику. Вона має зручне інтерфейсне середовище, де користувач може вводити математичні вирази, виконувати обчислення, створювати скрипти для автоматизації обчислень та виконувати аналіз математичних моделей.

Основні особливості Maple включають:

1. **Символьні обчислення.** Maple може працювати з символьними виразами, виконувати алгебраїчні операції, спрощувати вирази, розв'язувати рівняння та нерівності, обчислювати похідні та інтеграли.
2. **Чисельні обчислення.** Maple надає можливості для чисельних обчислень, включаючи чисельне інтегрування, розв'язування систем лінійних та нелінійних рівнянь, чисельні методи оптимізації та чисельний аналіз.
3. **Графічна візуалізація.** Maple дозволяє візуалізувати математичні об'єкти, будувати графіки функцій, поверхонь, векторних полів та інших об'єктів.
4. **Робота з диференціальними рівняннями.** Maple має вбудовані функції для розв'язування диференціальних рівнянь, включаючи звичайні та часткові рівняння.
5. **Розширені можливості програмування.** Maple підтримує мову програмування з синтаксисом схожим на мову C, що дозволяє користувачеві створювати скрипти, функції та програми для виконання складних обчислень.

Загалом, Maple є потужним інструментом для математичних обчислень і досліджень, який використовується в академічному середовищі, наукових дослідженнях та інженерних задачах.

MapleSoft

Contact Maplesoft Request Quote

Products Solutions Purchase Support & Resources Company

# The Essential Tool for Mathematics

Maple is math software that combines the world's most powerful math engine with an interface that makes it extremely easy to analyze, explore, visualize, and solve mathematical problems.

Try Maple free for 15 days with no obligation.

[Start your free trial](#)

Maple

Pricing & Purchase Upgrade to Maple 2023

What's New | Features | Online Demos | Compare | Training | Community | Free Trial | Buy Maple

Рис. 2.7. Головна сторінка Maple

**Python** — це інтерпретована, інтерактивна, об'єктно-орієнтована та високорівнева мова програмування загального призначення з динамічною суворою типізацією та автоматичним управлінням пам'яттю, орієнтована на підвищення продуктивності розробника, читабельність коду, а також на забезпечення сортування написаних на ній програм. У мові **Python** існує кілька бібліотек, які дозволяють обчислювати інтеграли, зокрема:

**scipy.integrate.** Бібліотека містить функції для чисельного обчислення інтегралів. Для обчислення одновимірних інтегралів можна використовувати функцію **quad**.

**numpy.** Бібліотека має функцію **numpy.trapz**, яка дозволяє обчислювати інтеграл за допомогою методу трапецій.

**Sympy.** Бібліотека використовує символічне обчислення і дозволяє виконувати аналітичні обчислення, включаючи інтегрування. За допомогою sympy можна обчислювати символічні інтеграли з точністю до символів.

Залежно від конкретних потреб та вимог завдання можна вибрати відповідну бібліотеку та метод обчислення інтегралу. Для більш складних обчислень або символічного аналізу рекомендується використовувати бібліотеку **sympy**. Для чисельних обчислень, які не потребують аналітичної точності, можна використовувати **scipy** або **numpy**.

The image shows the Python.org homepage. At the top, there are navigation links for Python, PSF, Docs, PyPI, Jobs, and Community. Below this is the Python logo and a search bar with a 'GO' button and a 'Socialize' button. A secondary navigation bar contains links for About, Downloads, Documentation, Community, Success Stories, News, and Events. The main content area features a code editor showing a Python 3 script for calculating the Fibonacci series up to n, with the output displayed below. To the right of the code is a section titled 'Functions Defined' with a brief explanation of function programming in Python. Below the code and text are several small buttons labeled 1 through 5. At the bottom of the main content area, there is a text block: 'Python is a programming language that lets you work quickly and integrate systems more effectively. >>> [Learn More](#)'. The footer contains four columns of quick links: 'Get Started' (with a power icon), 'Download' (with a download icon), 'Docs' (with a document icon), and 'Jobs' (with a briefcase icon). Each column contains a short description and a link to the relevant page.

Рис. 2.8. Головна сторінка PYTHON



## 2.4. Використання MatLab для обчислення визначених інтегралів

Обчислення визначених інтегралів в MAtLab можливо кількома способами:

### 1 спосіб. Обчислення інтегралів методом трапецій.

Для обчислення інтегралів методом трапецій у системі MATLAB передбачено функцію *trapz*:

```
Integ = trapz ( x, y ) ;
```

Одновимірний масив *x*(вектор) містить дискретні значення аргументів підінтегральної функції. Значення підінтегральної функції у цих точках зосереджені у одномірному масиві *y*.

Найчастіше для інтегрування вибирають рівномірну сітку, тобто значення елементів масиву *x* розміщені один від одного на одну й ту саму величину (крок інтегрування). Точність обчислення інтеграла залежить від величини кроку інтегрування: чим менший цей крок, тим вища точність.

Обчислимо простий інтеграл методом трапецій із кроком інтегрування  $\pi/10$ .

$$\int_0^{\pi} \cos(x) dx$$

```
>> dx = pi/10;
```

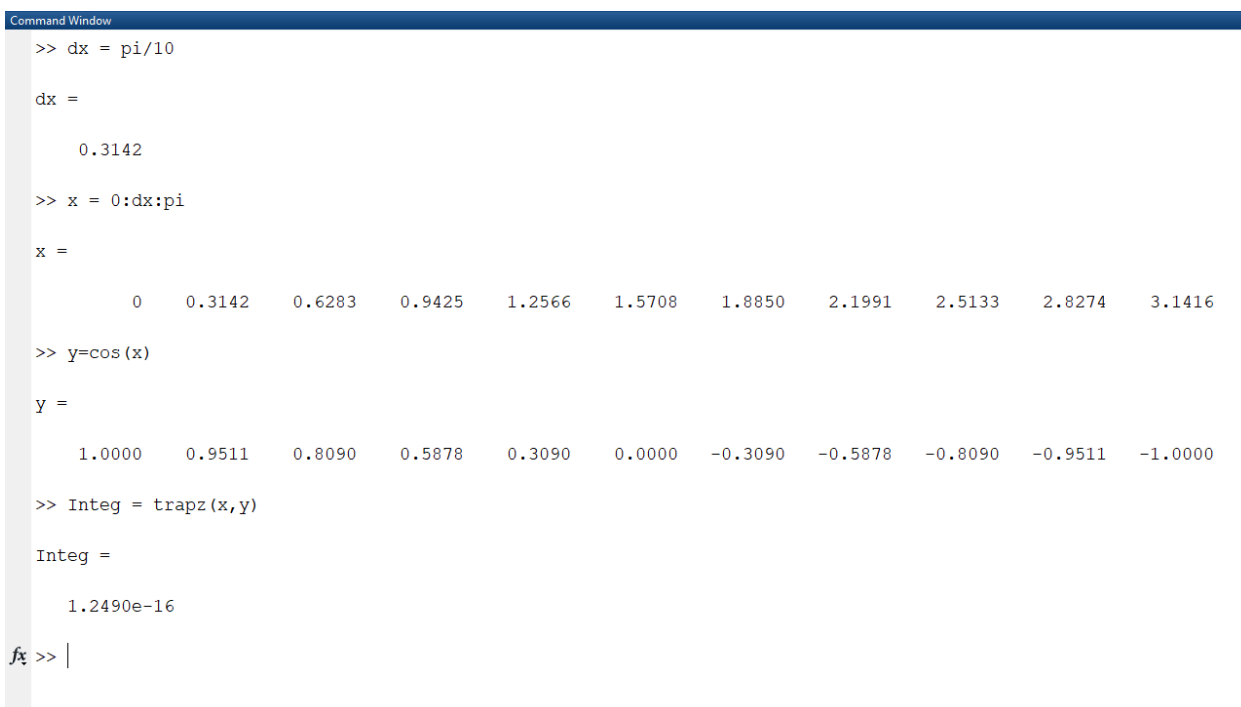
```
>> x = 0:dx:pi;
```

```
>> y=cos (x) ;
```

```
>> Integ = trapz(x,y)
```

```
Integ =
```

```
1.2490e-16
```



```
Command Window
>> dx = pi/10
dx =
    0.3142
>> x = 0:dx:pi
x =
    0    0.3142    0.6283    0.9425    1.2566    1.5708    1.8850    2.1991    2.5133    2.8274    3.1416
>> y=cos(x)
y =
    1.0000    0.9511    0.8090    0.5878    0.3090    0.0000   -0.3090   -0.5878   -0.8090   -0.9511   -1.0000
>> Integ = trapz(x,y)
Integ =
    1.2490e-16
fx >> |
```

Рис. 2.9. Порядок знаходження визначеного інтегралу в MATLAB

Зазвичай досягнення високої точності потрібно виконувати інтегрування з дуже малими кроками, а контроль досягнутої точності здійснювати шляхом порівняння послідовних результатів. При тому самому етапі інтегрування методи вищих порядків точності досягають точніших результатів.

Приклад 1. Знайти визначений інтеграл:

$$\int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{10}} \sin\left(10x + \frac{\pi}{3}\right) dx$$

```
>> dx=0.001

dx =

    1.0000000000000000e-03

>> x=pi/20:dx:pi/10;

>> y=sin(10*x+pi/3);

>> trapz(x,y)

ans =

   -0.036533287868621
```

Приклад 2. Знайти визначений інтеграл:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$$

```
>> dx=0.00000001

dx =

    1.0000000000000000e-08

>> x=-pi:dx:pi;

>> y=x.*cos(x);

>> trapz(x,y)

ans =

    2.255532649542147e-08
```

## 2 спосіб. Обчислення інтегралів методом за допомогою функції *integral*.

Функція *integral* використовується для обчислення одновимірних інтегралів. Синтаксис цієї функції наступний:

```
I = integral(fun, a, b)
```

де *fun* - функція, яка визначає інтегранд, *a* та *b* - межі інтегрування, а *I* - значення обчисленого інтегралу.

Наприклад, для обчислення інтегралу функції  $\cos(x)$  від  $0$  до  $\pi$  можна використати наступний код:

```
fun = @(x) sin(x);  
  
a = 0;  
  
b = pi;  
  
I = integral(fun, a, b);  
  
disp(I);
```

```

>> fun=@(x) cos(x)

fun =

    function_handle with value:

    @(x) cos(x)

>> a = 0
|
a =

    0

>> b = pi

b =

    3.1416

>> I = integral(fun, a, b)

I =

    1.2490e-16

```

Рис. 2.10. Результати виконання програми 2 способом

### 3 спосіб. Обчислення інтегралів за допомогою функції *integral2*.

Функція *integral2* використовується для обчислення **двовимірних інтегралів**. Синтаксис цієї функції наступний:

$$I = \text{integral2}(\text{fun}, \text{xmin}, \text{xmax}, \text{ymin}, \text{ymax})$$

де *fun* - функція, яка визначає інтегранд, *xmin* та *xmax* - межі інтегрування по осі *x*, *ymin* та *ymax* - межі інтегрування по осі *y*, а *I* - значення обчисленого інтегралу.

Наприклад, для обчислення інтегралу функції  $x^2 + y^2$  від -1 до 1 по осі *x* і від -2 до 2 по осі *y* можна використати наступний код:

$$\text{fun} = @(x, y) x^2 + y^2;$$

```
xmin = -1;  
  
xmax = 1;  
  
ymin = -2;  
  
ymax = 2;  
  
I = integral2(fun, xmin, xmax, ymin, ymax);  
  
disp(I);
```

#### **4 спосіб. Обчислення інтегралів методом Сімпсона.**

У MATLAB є вбудована функція для чисельного обчислення інтегралів методом Сімпсона - *quad*. Ця функція дозволяє визначити значення інтегралу шляхом апроксимації його під кривою за допомогою методу Сімпсона.

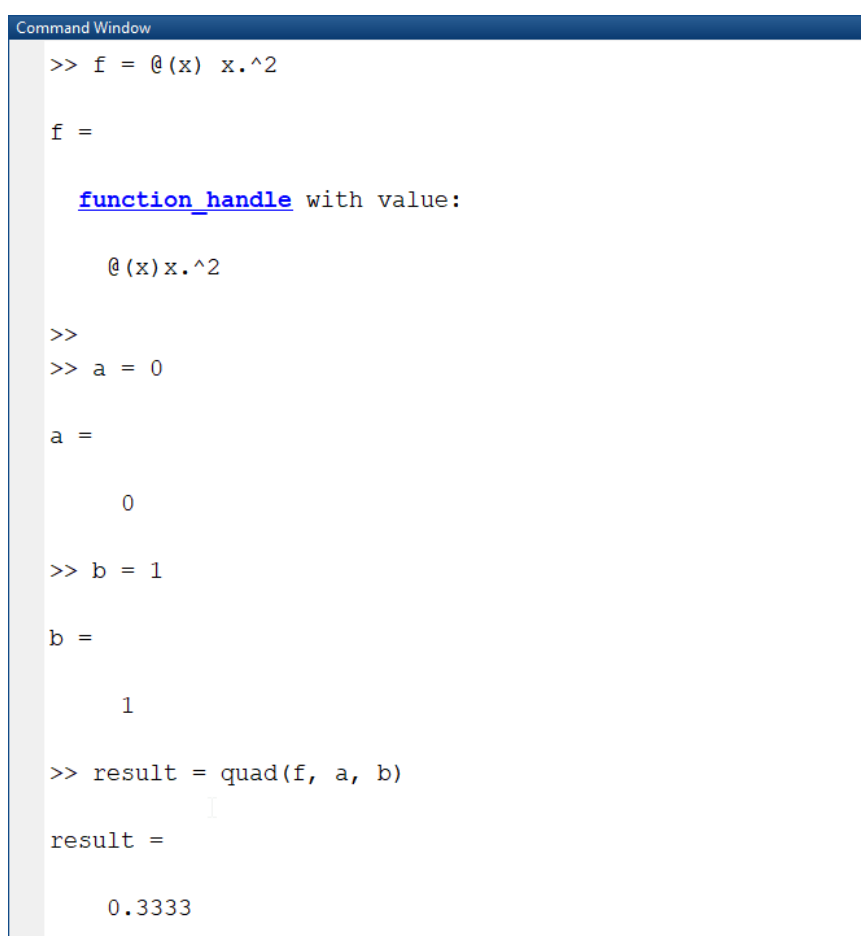
Ось приклад використання функції *quad* для обчислення інтегралу методом Сімпсона:

```
% Визначення функції, яку потрібно інтегрувати  
  
f = @(x) x.^2;  
  
% Визначення меж інтегрування  
  
a = 0; % нижня межа  
  
b = 1; % верхня межа  
  
% Обчислення інтегралу методом Сімпсона  
  
result = quad(f, a, b);
```

```
disp(result);
```

У цьому прикладі функція  $f$  визначена як  $x^2$ , а межі інтегрування встановлені від 0 до 1. Функція *quad* виконує чисельне обчислення інтегралу методом Сімпсона за заданою функцією та межами інтегрування. Результат обчислення зберігається у змінну *result* і виводиться на екран за допомогою функції *disp*.

Використання функції *quad* дозволяє зручно та швидко обчислити значення інтегралу методом Сімпсона у MATLAB.



```
Command Window
>> f = @(x) x.^2

f =

function_handle with value:

    @(x)x.^2

>>
>> a = 0

a =

    0

>> b = 1

b =

    1

>> result = quad(f, a, b)

result =

    0.3333
```

Рис. 2.11. Результати виконання програми обчислення інтегралу методом Сімпсона

Використання MATLAB для обчислення інтегралів є потужним і зручним інструментом. Застосування MATLAB дозволяє легко і швидко

обчислювати чисельні значення інтегралів за допомогою вбудованих функцій і методів.

Один з основних методів для обчислення інтегралів у MATLAB - це використання функції *quad*. Ця функція дозволяє визначити значення інтегралу шляхом чисельного інтегрування за допомогою різних методів, таких як метод Сімпсона або метод трапецій.

Переваги використання MATLAB для обчислення інтегралів включають наступне:

1. **Простота використання.** MATLAB має зручний і інтуїтивно зрозумілий синтаксис, що дозволяє легко визначити функцію, встановити межі інтегрування і отримати чисельне значення інтегралу.

2. **Гнучкість.** MATLAB надає можливість використовувати різні методи чисельного інтегрування, що дозволяє підібрати найбільш ефективний метод для конкретного інтегралу.

3. **Швидкість.** MATLAB є мовою програмування, спеціально оптимізованою для чисельних обчислень. Це дозволяє отримувати швидкі результати при обчисленні складних інтегралів.

4. **Розширені можливості.** MATLAB має велику кількість додаткових інструментів і пакетів, які дозволяють виконувати розширені обчислення, включаючи чисельне розв'язування диференціальних рівнянь, моделювання систем та інші.

Отже, використання MATLAB для обчислення інтегралів є ефективним і зручним підходом, що дозволяє отримати точні чисельні значення інтегралів швидко і надійно. Використання вбудованих функцій і методів MATLAB спрощує процес обчислення інтегралів і дозволяє фокусуватися на самій математичній проблемі.



## **2.5. Методичні рекомендації для вчителів щодо використання інтерактивних технологій та цифрових інструментів**

У процесі вивчення теми "Інтеграл та його застосування" в 11-му класі під час використання інтерактивних технологій та цифрових інструментів рекомендуємо акцентувати увагу вчителів на таких аспектах:

### **1. Планування уроку.**

- Визначте основні цілі та завдання уроку з використанням інтерактивних технологій. Розробіть конкретний план дій, який включатиме послідовність активностей та використання певних цифрових інструментів.
- Зверніть увагу на структуру уроку, поєднання теоретичних пояснень, демонстраційних матеріалів, інтерактивних вправ та практичних завдань.
- Передбачте можливості для самостійної роботи учнів з цифровими інструментами та експериментування з математичними концепціями.

### **2. Використання цифрових інструментів.**

- Ознайомтеся з різними цифровими інструментами, які підходять для вивчення інтегралів, наприклад, комп'ютерні програми, веб-додатки, символічні обчислювальні системи тощо. Оберіть ті, які найбільше відповідають потребам учнів та мають зручний інтерфейс.
- Навчіться використовувати обрані цифрові інструменти, щоб ефективно демонструвати математичні концепції, проводити обчислення, виконувати графічну візуалізацію і створювати інтерактивні вправи.

### **3. Різноманітність активностей.**

- Включайте різноманітні активності у процес вивчення, такі як інтерактивні презентації, відеоуроки, віртуальні експерименти, демонстрації на екрані, групові проекти та дослідження.
- Стимулюйте учнів до активної участі, ставте запитання, пропонуйте обговорення та спільну роботу над завданнями. Використовуйте цифрові інструменти для залучення учнів до колективної роботи та спільного вирішення завдань.

### **4. Індивідуалізація навчання:**

- Використовуйте цифрові інструменти, які дозволяють персоналізувати навчання, наприклад, програми з адаптивним навчанням, онлайн-курси, інтерактивні додатки. Забезпечте можливість учням працювати власним темпом і отримувати індивідуальну підтримку.

### **5. Оцінювання:**

- Розробіть методи оцінювання, які враховують інтерактивний характер навчання та використання цифрових інструментів. Враховуйте якість виконання практичних завдань, активність учнів у процесі роботи з цифровими інструментами, а також їх розуміння та застосування математичних концепцій.

### **6. Продовження навчання.**

- Після закінчення теми з інтегралами, надайте учням можливість подальшого застосування вивчених навичок та знань у контексті інших математичних тем, зокрема у геометрії, фізиці, економіці, інженерії тощо.

## **7. Професійний розвиток.**

- Продовжуйте вдосконалювати свої навички використання цифрових інструментів та інтерактивних технологій. Беріть участь у професійних семінарах, вебінарах та інших навчальних заходах, де можна поглибити свої знання та навички у цій галузі.

Урахування цих методичних рекомендацій допоможе вчителям ефективно впроваджувати інтерактивні технології та цифрові інструменти у освітній процес з математики, забезпечуючи активну, цікаву та пізнавальну навчальну ситуацію для учнів.

## ВИСНОВКИ

У процесі виконання магістерського дослідження на тему "Методика вивчення теми «Інтеграл та його застосування» з використанням інтерактивних технологій" були проведені дослідження та впроваджені методи та підходи для покращення методики навчання теми "Інтеграл та його застосування" з використанням інтерактивних та сучасних цифрових технологій. На основі проведених досліджень і практичної роботи можна зробити такі висновки:

У роботі ми розглянули місце теми "Інтеграл та його застосування" у шкільному курсі алгебри і початків аналізу і виявили, що вивчення інтегралів у закладах загальної освіти дозволяє учням отримати поглиблені знання та навички в області математики, що створює підґрунтя для подальшого вивчення математики не тільки у школі, а й у закладах вищої освіти.

Аналіз традиційних та альтернативних методів навчання показує, що використання інтерактивних методів навчання, математичного програмного забезпечення та віртуальних середовищ допомагає учням краще зрозуміти та застосувати складні математичні поняття на практиці. Це сприяє активній участі здобувачів освіти у навчальному процесі та покращує їхні навички.

Використання інтерактивних технологій, таких як комп'ютерні програми, веб-додатки, інтерактивні презентації у процесі вивчення теми "Інтеграл та його застосування" має значний позитивний вплив на засвоєння матеріалу учнями. Інтерактивність сприяє активній участі здобувачів освіти у процесі навчання, поглибленому розумінню концепцій інтегралу, а також розвитку їх аналітичних і проблемно-орієнтованих навичок.

Використання інтерактивних технологій дозволяє створити динамічне навчальне середовище, де учні можуть експериментувати з різними значеннями, вводити власні дані і спостерігати за змінами в графіках і

результатів обчислень. Це сприяє більш глибокому розумінню матеріалу та забезпечує залучення учнів до активного пізнання.

Використання інтерактивних технологій дозволяє індивідуалізувати процес навчання, оскільки учні можуть працювати з матеріалом у своєму власному темпі, зосереджуючись на власних потребах і рівні засвоєння. Це сприяє покращенню результатів навчання і задоволеності студентів від процесу навчання.

Використання інтерактивних технологій у вивченні теми "Інтеграл та його застосування" дозволяє створити позитивну мотивацію до навчання. Візуалізація математичних концепцій, можливість самостійно експериментувати та отримувати миттєвий зворотний зв'язок стимулює студентів до активного навчання і допомагає зберегти їх інтерес протягом всього процесу.

Упровадження програмного забезпечення, зокрема Matlab, у освітній процес може створити інтерактивне середовище, в якому учні можуть співпрацювати, обмінюватися ідеями та спільно вирішувати проблеми, покращити розуміння та застосування диференціації, зробити навчальний процес цікавішим та доступнішим для учнів, а також сприяти розвитку навичок спілкування та роботи в команді.

Використання інтерактивних технологій у вивченні інтегралів сприяє розвитку не тільки математичних навичок, але й цифрової грамотності та комп'ютерної освіченості учнів. Вони набувають практичних навичок роботи з програмними засобами, а також вміння аналізувати інформацію та розв'язувати завдання з використанням цифрових інструментів.

Таким чином, використання інтерактивних технологій у вивченні теми "Інтеграл та його застосування" є ефективним і перспективним підходом, який сприяє покращенню якісного засвоєння матеріалу учнями, розвитку їхніх аналітичних навичок та підготовці до подальшого вивчення математики і суміжних наук.

Запропонована система практичних завдань та її застосування може бути використана вчителями у своїй практичній роботі.

Це дослідження не охоплює всіх аспектів цієї багатоаспектної проблеми. Перспективним напрямком подальших досліджень є розробка завдань та програмного забезпечення для підтримки інших розділів і тем математики враховуючі інтерактивні та сучасні цифрові технології.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексєєва І. В. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федеорова. К.: НТУУ «КПІ», 2012. 176 с.
2. Алілуйко А.М. Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб. / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. Тернопіль: ТНЕУ, 2017. 148 с.
3. Бєвз Г.П. Методи навчання математики: навч. метод. посіб. К.: Генеза, 2010. 117 с.
4. Бєвз Г.П. Методика викладання математики: Навч.посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. К. : Вища шк., 1989. 367 с.
5. Бубняк Т.І. Вища математика / Т.І. Бубняк Навчальний посібник.- Львів: «Новий Світ-2000», 2007. 436 с.
6. Вища математика в прикладах і задачах [Текст] : навч. посіб. для студ. ВНЗ: у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа [та ін.]. Національний технічний ун-т "Харківський політехнічний ін-т". Х., 2009. 432 с.
7. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навчальн. посіб. Курпа Л.В., Кашуба Ж.Б., Лінник Г.Б.; за ред. проф. Л.В. Курпи Х.: НТУ "ХПІ", 2008. 528 с.
8. Вища математика. Диференціальне та інтегральне числення [Текст] : навч. посіб. для студ., які навч. за напрямом підготов. 6.050101 "Комп'ютерні науки" / О. Г. Мартинюк, Н. І. Полтораченко ; Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. К. : КНУБА, 2010. - 64 с.
9. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння.

- Прикладні задачі. Навч. посіб. - К.: Книги України ЛТД, 2010. 470 с.
10. Вища математика: Зб. задач: У 2 ч / за заг. ред. д-ра техн. наук, проф. П. П. Овчинникова. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / 2-ге вид., стереотип. К.: Техніка, 2004. 279 с.
  11. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 1 / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. К.: Либідь, 2003. 400 с.
  12. Горчакова І. А. Роль і місце моделювання та наочності у формуванні евристичної діяльності учнів // Математика в шк. 2002. № 1. С. 37-39.
  13. Грохольська А. В., Яценко С. Є. Методика навчання математики в старшій та вищій школах. Частина І.: К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. 310 с.
  14. Державний стандарт базової середньої освіти [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti>
  15. Державні стандарти загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti>
  16. Диференціальне та інтегральне числення [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. техн. навч. закл. / [Є. З. Могульський та ін.] ; Укр. держ. акад. залізн. трансп. Х. : УкрДАЗТ, 2011. - 312 с. : рис., табл. Бібліогр.: с. 308.
  17. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студентів, які навчаються за скороч. терміном / Є. Ю. Неделько, Н. О. Романчук, С. В. Резнік ; Нац. ун-т кораблебудування ім. адмірала Макарова. - Електрон. вид. комбін. використання на DVD-ROM. - Електрон. дані (об'єм даних 1525 кб.). Миколаїв : НУК, 2015. 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM).



18. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної [Текст] : навч.-метод. посіб. / [О. Я. Мильо та ін.] ; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. Л. : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. 267 с.
19. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (І курс І семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний. К: НТУУ «КПІ», 2013. 104 с.
20. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології : навч. посіб. / І.М. Дичківська. К. : Академвидав, 2004. 352 с.
21. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. К: А. С. К., 2006. 647 с.
22. Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (Алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб, для підготовч. від-нь. К.: МАУП, 2003. 304 с.
23. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: посібник для вчителів. К.: Техніка, 1997. 304 с.
24. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. 3-тє вид. К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. 315 с.
25. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики : 11-й кл. : у 2-х ч. Ч. 1./ А.Г. Мерзляк [та ін.]; за ред. М.І. Бурди. К. : Центр навч.-метод. л-ри, 2014. 224 с.
26. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики : 11-й кл. : у 2-х ч. Ч.2./ А.Г. Мерзляк [та ін.]; за ред. М.І. Бурди. К. : Центр навч.-метод. л-ри, 2014. 208 с.
27. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: Алгебра і початки аналізу. 11 кл. / За ред. З. І. Слєпкань. Х.: Гімназія, 2003. 176 с.
28. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і

- доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL: [http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/3315/14\\_11\\_2019\\_new\\_IKTN\\_2009.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/3315/14_11_2019_new_IKTN_2009.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
29. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. К.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
  30. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 304 с.
  31. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-о кл. закл. заг. серед. освіти/ Олександр Істер. Київ : Генеза, 2019. 304 с.
  32. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х. : Гімназія, 2019. 208 с.
  33. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.
  34. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx>
  35. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx>
  36. Овчинников П.П. Вища математика/ Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного

аналізу: Диференціальне і інтегральне числення/ П.П.Овчинников, Яремчук Ф.П., Михайленко В.М; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. 3-тє вид., випр.. К.: Техніка, 2003. 600 с.

37. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти. Постанова Кабінету міністрів України. від 30 вересня 2020 р. № 898. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>.
38. Про затвердження Порядку конкурсного відбору підручників (крім електронних) та посібників для здобувачів повної загальної середньої освіти та педагогічних працівників. Наказ МОН Укераїни №1001 від 21.09.2021 р. [Електронний ресурс]. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/z1483-21#n17>
39. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. – К.: Вища школа, 2006. 512 с.
40. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. К.: Вища шк., 2006. 582 с.
41. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.-метод. посібн. / О.І.Пометун, Л.В.Пироженко. За ред.. О.І.Пометун. К.: Видавництво А.С.К., 2004. 192 с.
42. MAPLE. URL: <https://www.maplesoft.com/products/Maple/>
43. MATLAB. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/MATLAB>
44. MATLAB. URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
45. PYTHON. URL: <https://www.python.org/>
46. WOLFRAM. URL: <https://www.wolfram.com/?source=nav>

## Картки-завдання

| К1  | К2  |
|---|---|
| <p>Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:</p> <p>1) <math>f(x) = \sqrt{x}</math> на проміжку <math>[1; +\infty)</math></p> <p>2) <math>f(x) = x^{-5}</math> на проміжку <math>(0; +\infty)</math></p> | <p>Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:</p> <p>1) <math>f(x) = \frac{6}{x} - x^3</math> на проміжку <math>(-\infty; 0)</math></p> <p>2) <math>f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}</math> на проміжку <math>(-\infty; 0)</math></p> |

**Розв'язок К1:**

$$1) F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$2) F(x) = \frac{x^{-4}}{-4} + C$$

**Розв'язок К2:**

$$1) F(x) = 6 \ln|x| - \frac{x^4}{4} + C$$

$$2) F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C - 3 \frac{1}{3x^3} + C = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} + C$$

| К3                                       | К4                               |
|--|----------------------------------|
| Обчисліть визначений інтеграл:           | Обчисліть визначений інтеграл:   |
| 1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx$ | 1) $\int_0^6 (3x^2 - x) \, dx$   |
| 2) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$       | 2) $\int_{-2}^1 (x - 3)^2 \, dx$ |
| 3) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$          |                                  |

**Розв'язок К3:**

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos \frac{\pi}{3} - (-\cos 0) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

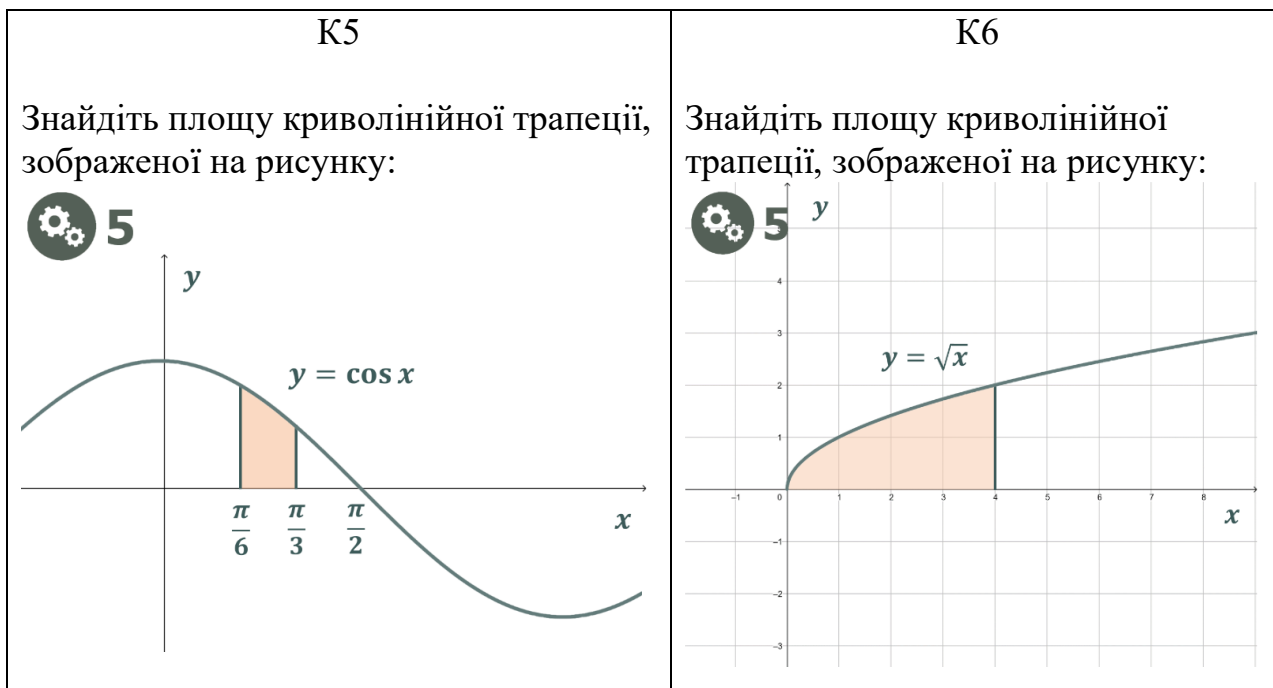
$$2) \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{e^2}^{e^3} = \ln e^3 - \ln e^2 = 3 - 2 = 1$$

$$3) \int_1^{10} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = \frac{9}{10}$$

**Розв'язок К4:**

$$1) \int_0^6 (3x^2 - x) \, dx = \left( \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^6 = (6^3 - 6^2) - 0 = 216 - 36 = 180$$

$$2) \int_{-2}^1 (x - 3)^2 \, dx = \frac{(x - 3)^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \left( \frac{(1 - 3)^3}{3} \right) - \left( \frac{(-2 - 3)^3}{3} \right) = -\frac{8}{3} + \frac{125}{3} \\ = \frac{117}{3} = 39$$



**Розв'язок К5:**

Первісна:

$$F(x) = \sin x$$

Межі інтегрування:

$$a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3}$$

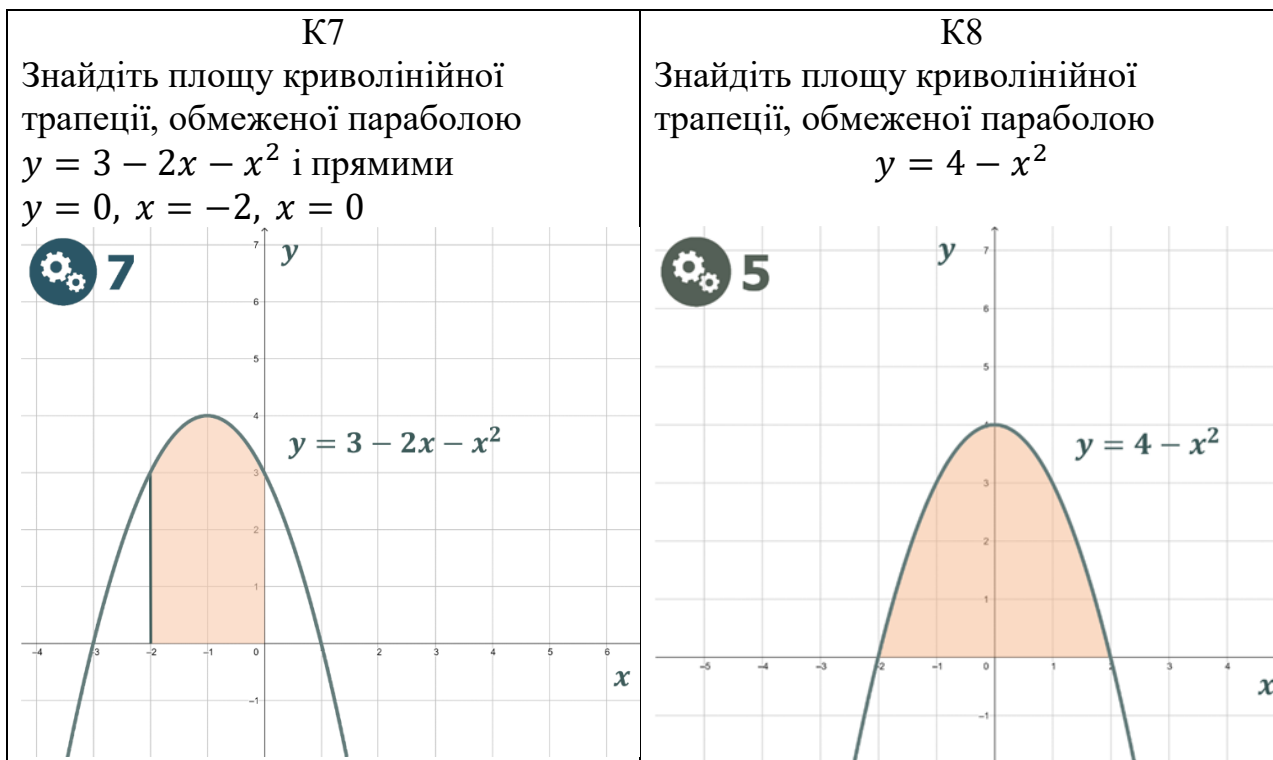
$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Відповідь:  $S = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  (кв.од)

**Розв'язок К6:**

$$S = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \sqrt{4^3} - \frac{2}{3} \sqrt{4^0} = \frac{2}{3} \sqrt{64} - \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Відповідь:  $S = \frac{16}{3}$  (кв.од)



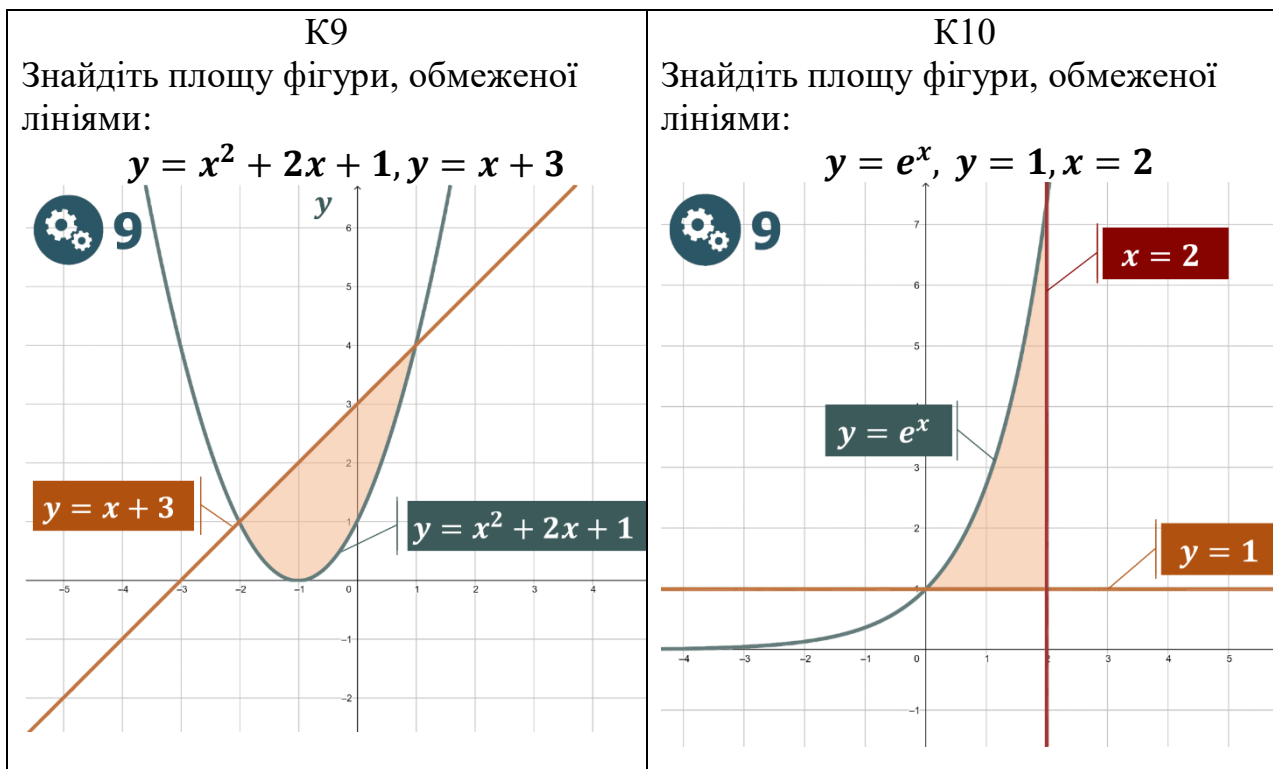
**Розв'язок К7:**

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^0 (3 - 2x - x^2) dx = \left( 3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^0 \\
 &= \left( 3 \cdot 0 - 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) - \left( 3 \cdot (-2) - (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\
 &= 0 - \left( -10 + \frac{8}{3} \right) = 10 - \frac{8}{3} = \frac{30 - 8}{3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**Розв'язок К8:**

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \left( 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\
 &= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $S = 10\frac{2}{3}$  (кв.од)



**Розв'язок К9:**

Знайдемо межі інтегрування:

$$x^2 + 2x + 1 = x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

За теоремою Вієта  $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (x + 3) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \int_{-2}^1 (x + 3 - x^2 - 2x - 1) dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx \\ &= \left( 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \left( 2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( 2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= \left( 2 - \frac{5}{6} \right) - \left( -6 + \frac{8}{3} \right) = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = 4\frac{3}{6} = 4\frac{1}{2} = 4,5 \end{aligned}$$

Відповідь:  $S = 4,5$  (кв.од)

**Розв'язок К10:**

\*Від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції  $y = e^x$ , віссю  $Oy$ , віссю  $Ox$  та прямою  $x = 1$  відніmemo площу прямокутника утвореного віссю  $Oy$ , віссю  $Ox$  та прямими  $y = 1$  і  $x = 1$

$$S = \int_0^2 e^x dx - 1 \cdot 2 = e^x \Big|_0^2 - 2 = (e^2 - e^0) - 2 = e^2 - 3$$

Відповідь:  $S = e^2 - 3$



**Розв'язок K11:**

Знайдемо межі інтегрування:

$$2x^2 = 2x$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 (2x) dx - \int_0^1 (2x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left( \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left( x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \left( 1^2 - \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right) - \left( 0^2 - \frac{2 \cdot 0^3}{3} \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Відповідь:  $S = \frac{1}{3}$  (кв.од)

**Розв'язок K12:**

Знайдемо межі інтегрування:

$$-x^2 + 2x = x^2$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1 - x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx - \int_0^1 (x^2) dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx \\
 &= \left( \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left( x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left( 1^2 - \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right) - 0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Відповідь:  $S = \frac{1}{3}$  (кв.од)

**Підсумкова контрольна робота з теми  
"Інтеграл та його застосування"**

**Варіант 1**

*Початковий рівень*

- 1. (1 б) Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:**

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + 3 \cos x$$

*Розв'язок:*

$$F(x) = -\frac{4}{x} + 3 \sin x + C$$

- 2. (2 б) Установіть, чи є функція  $F$  первісною функції  $f$  на множині  $\mathbb{R}$ :**

А)  $F(x) = x^4 - 3, f(x) = 4x^3$

Б)  $F(x) = 5x - \cos x, f(x) = 5 + \sin x$

*Розв'язок:*

**А)  $F(x) = x^4 - 3, f(x) = 4x^3$**

$F'(x) = 4x^3 \Rightarrow$  функція  $F$  є первісною функції  $f$  на множині  $\mathbb{R}$ , так як  $F'(x) = 4x^3 = f(x)$

**Б)  $F(x) = 5x - \cos x, f(x) = 5 + \sin x$**

$F'(x) = 5 + \sin x \Rightarrow$  функція  $F$  є первісною функції  $f$  на множині  $\mathbb{R}$ , так як  $F'(x) = 5 + \sin x = f(x)$

- 3. (3 б) Обчисліть інтеграл:**

А)  $\int_{0,25}^{0,5} \frac{dx}{x^2}$

Б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

*Розв'язок:*

А)  $\int_{0,25}^{0,5} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{0,25}^{0,5} = -2 + 4 = 2$

Б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

4. (3 б) Для функції  $f(x) = 3 - \frac{4}{\sin^2 2x}$  знайдіть первісну, графік якої проходить через точку  $A) \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$

*Розв'язок:*

$$f(x) = 3 - \frac{4}{\sin^2 2x}$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = 3x + 2\text{ctg } 2x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\text{ctg } \frac{\pi}{2} + C$$

$$C = -2\text{ctg } \frac{\pi}{2} = 0$$

*Відповідь:*  $F(x) = 3x + 2\text{ctg } 2x$

5. (1 б) Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями  $y = 2 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$

*Розв'язок:*

$$S = \int_{-1}^0 (2 - x^2) dx = 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 = 0 - \left(-2 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$$

6. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями  $y = 3x^2$  та  $y = 12x$

*Розв'язок:*

Знайдемо точки перетину  $y = 3x^2$  та  $y = 12x$ :

$$3x^2 = 12x$$

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

(Межі інтегрування)

$$S = \int_0^4 12x dx - \int_0^4 3x^2 dx = \int_0^4 (12x - 3x^2) dx = \frac{12x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} \Big|_0^4 = 6x^2 - x^3 \Big|_0^4$$

$$= 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 96 - 64 = 32 \text{ (кв. од.)}$$

## Варіант 2

Початковий рівень

1. (1 б) Знайдіть загальний вигляд первісної для функції:

$$f(x) = \frac{6}{x^3} + 2 \sin x$$

Розв'язок:

$$F(x) = -\frac{6}{2x^2} - 2 \cos x + C = -\frac{3}{x^2} - 2 \cos x + C$$

2. (2 б) Установіть, чи є функція  $F$  первісною функції  $f$  на множині  $\mathbb{R}$ :

А)  $F(x) = x^5 - 2x, f(x) = 5x^4 - 2$

Б)  $F(x) = 2x + 5 \operatorname{ctg} x, f(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x}$

Розв'язок:

А)  $F(x) = x^5 - 2x, f(x) = 5x^4 - 2$

$F'(x) = 5x^4 - 2 \Rightarrow$  функція  $F$  є первісною функції  $f$  на множині  $\mathbb{R}$ ,  
так як  $F'(x) = 5x^4 - 2 = f(x)$

Б)  $F(x) = 2x + 5 \operatorname{ctg} x, f(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x}$

$F'(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x} \Rightarrow$  функція  $F$  є первісною функції  $f$  на множині  $\mathbb{R}$ ,  
так як  $F'(x) = 2 - \frac{5}{\sin^2 x} = f(x)$

3. (3 б) Обчисліть інтеграл:

А)  $\int_{-1}^2 2x^3 dx$

Б)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx$

Розв'язок:

А)  $\int_{-1}^2 2x^3 dx = \frac{2x^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \frac{2 \cdot 2^4}{4} - \frac{2 \cdot (-1)^4}{4} = 8 - \frac{2}{4} = 7\frac{2}{4} = 7,5$

Б)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{1}{2} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -2 \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4}$

$$= -2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

4. (3 б) Для функції  $f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 1$  знайдіть первісну, графік якої проходить через точку  $A) \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$

Розв'язок:

$$f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 1$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = 2\operatorname{tg} 3x + x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + C$$

$$C = -2\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = 2$$

Відповідь:  $F(x) = 2\operatorname{tg} 3x + x + 2$

5. (1 б) Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями  $y = 1 - x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$

Розв'язок:

Знайдемо точку перетину графіку функції  $y = 1 - x^3$  з віссю  $Ox$ :

$$1 - x^3 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$x = 1$  (Верхня межа інтегрування)

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^3) dx = x - \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 2 \text{ (кв. од.)}$$

6. (2 б) Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями  $y = 3x^2$  та  $y = 30x$

Розв'язок:

Знайдемо точки перетину  $y = 3x^2$  та  $y = 30x$ :

$$3x^2 = 30x$$

$$3x^2 - 30x = 0$$

$$3x(x - 10) = 0$$

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \end{array} \Big| \text{ (Межі інтегрування)}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{10} 30x dx - \int_0^{10} 3x^2 dx = \int_0^{10} (30x - 3x^2) dx = \frac{30x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} \Big|_0^{10} \\ &= 15x^2 - x^3 \Big|_0^{10} = 15 \cdot 10^2 - 10^3 = 1500 - 1000 = 500 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$