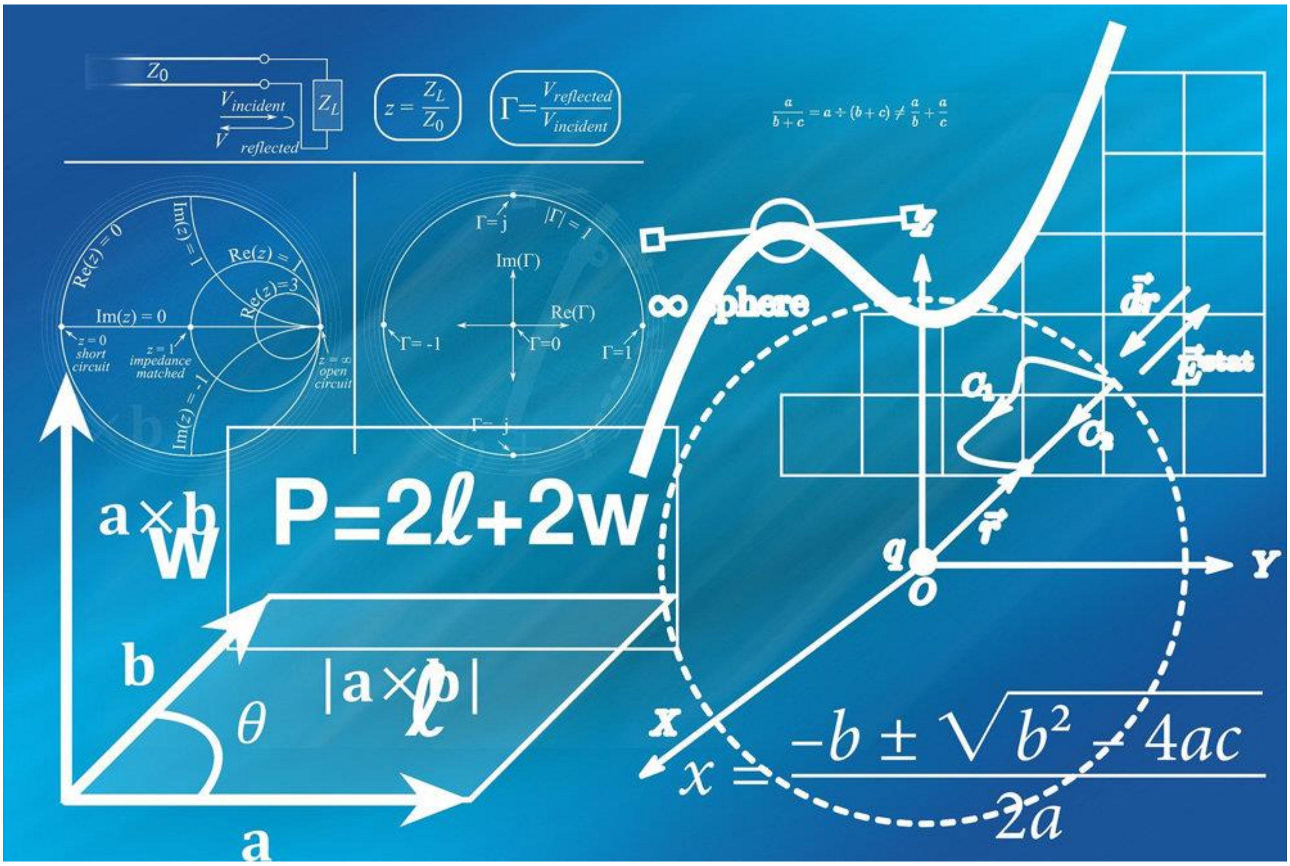


А. Литвинов

«МАТЕМАТИКА»

Навчальний посібник

Глухів
2022

А. Литвинов

«МАТЕМАТИКА»

Навчальний посібник

Глухів
2022

УДК 51(075.8)
Л 64

Рекомендовано Вченою радою
Глухівського національного педагогічного університету
імені Олександра Довженка протокол № 6 від 29.12.2021

Рецензенти:

Борисов В.В. – доктор педагогічних наук, професор кафедри педагогіки та методик навчання Хортицької національної навчально-реабілітаційної академії

Бурчак С.О. – доктор педагогічних наук, доцент, проректор з науково-педагогічної роботи Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

Лодатко Є.О. – доктор педагогічних наук, професор кафедри освітнього і соціокультурного менеджменту та соціальної роботи Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

Литвинов А.С.
Л 64 Математика: навч. посібник / уклад. А. С. Литвинов. – Глухів : Глухівського НПУ ім. О.Довженка, 2022. – 384 с.

ISBN 978-966-376-087-2

Навчальний посібник охоплює теми, передбачені програмою навчальної дисципліни «Математика». Посібник містить визначення, теореми, правила і формули, які виражають основні співвідношення елементарної математики, елементи теорії множин, методи обчислень і тотожних перетворень математичних виразів, методи вирішення і дослідження основних типів рівнянь і нерівностей, систем рівнянь і нерівностей, побудови графіків елементарних функцій, основні властивості плоских і просторових геометричних фігур, приклади розв’язування задач, а також завдання для самостійного опрацювання. Посібник може бути використаний викладачами під час підготовки до занять та стати основою для організації самостійної роботи студентів з даної дисципліни. Розраховано на викладачів та студентів закладів вищої освіти педагогічних спеціальностей, а також на всіх, хто цікавиться математикою.

Передмова

Успішне навчання математики молодших школярів вимагає від учителя не тільки методичної майстерності, але й глибокого розуміння суті математичних понять і фактів. У початковій школі закладаються основи таких важливих понять, як «число» і «величина», відбувається ознайомлення з елементами алгебри і геометрії, розвиваються логічні уміння, учні навчаються прийомам розумової діяльності.

Прищепити молодшим школярам любов до математики, зацікавити їх цим предметом зможе тільки вчитель, який сам захоплений математикою і свою захопленість може передати дітям, сприяючи розвитку їх пізнавальної активності, вихованню культури мислення, формуванню особистості та основ наукового світогляду.

Усе це висуває особливі вимоги до математичної підготовки вчителя початкової школи, а саме потребує від нього: володіння поняттям натурального числа і величини, знань різних означень арифметичних дій над числами, їх властивостей, уміння виконувати і пояснювати усні і письмові обчислення, обґрунтовувати вибір дій і встановлювати вид залежності між величинами в процесі розв’язування текстових задач, а також уміння поєднувати виховний процес під час вивчення математики.

Підготовка майбутнього вчителя початкових класів до успішного розв’язування цих завдань покладається, насамперед, на навчальний предмет «Математика».

Цей навчальний посібник укладений відповідно до програми і спрямований на розв’язування проблеми забезпечення майбутнього вчителя початкових класів математичною підготовкою, необхідною йому для грамотного творчого навчання і виховання молодших школярів, для подальшої роботи з поглиблення і розширення математичних знань.

Структура посібника: два розділи, кожен розділ поділений на теми.

Кожна тема закінчується вправами, призначеними як для більш глибокого засвоєння теорії, так і для формування в майбутнього вчителя низки професійних умінь, зокрема розв’язувати задачі й аналізувати математичний зміст завдань, які виконуються учнями.

Розгляд у посібнику теоретичних питань і практичних завдань з різних позицій в їх діалектичній єдності, використання алгоритмічного підходу сприяють розкриттю світоглядного значення математики, поглибленню уявлень студентів про роль і місце математики у вивченні навколишнього середовища, розвитку логічного мислення, самостійних роздумів, умінню творчо працювати з навчальними посібниками та іншою математичною літературою. Все це надає нові можливості майбутньому вчителю для імпровізації в процесі математичної підготовки учнів молодших класів як на уроках, так і в позакласній роботі.

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 1. АЛГЕБРА 11
ТЕМА 1. ВИСЛОВЛЕННЯ. ОСНОВНІ ЛОГІЧНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВИСЛОВЛЕННЯМ. 12
1.1. Висловлення. 12
1.2. Логічні операції над висловленнями. 13
1.3. Кон'юнкція. 15
1.4. Імплікація. 15
1.5. Еквіваленція. 17

ТЕМА 2. МНОЖИНИ І ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ 18
2.1. Множини, їх види і способи задання. 18
2.2. Підмножина. Рівність множин. 20
2.3. Універсальна множина. 21
2.4. Операції над множинами. Закони операцій. 22
Приклади розв'язування задач 29
2.5. Декартів добуток множин. Кортеж. 30
2.6. Розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються. Класифікація. 34
Вправи 37

ТЕМА 3. ВІДПОВІДНОСТІ 40
3.1. Граф і графік відповідності. 40
3.2. Відображення 42
Приклади розв'язування задач 44
Вправи 46

ТЕМА. 4. ВІДНОШЕННЯ НА МНОЖИНІ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ. 48
4.1. Бінарні відношення між елементами однієї множини 48
4.2. Способи задання відношень 49
4.3. Відношення обернене і протилежне даному. 49
4.4. Властивості бінарних відношень. 52
Приклади розв'язування задач 53
4.5. Відношення еквівалентності і відношення порядку. 55
Приклади розв'язування задач 56
Вправи 57

ТЕМА 5. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ 59
5.1. Зміст комбінаторики. 59
5.2. Розміщення без повторень. 61
5.3. Розміщення з повтореннями. 64
5.4. Перестановки без повторень. 65
5.5. Перестановки з повтореннями. 66

5.6. Комбінації.. 67
5.7. Трикутник Паскаля.. 69
Приклади розв'язування задач 70
Вправи 74

ТЕМА 6. ПРЕДИКАТИ 76
6.1. Одномісні предикати.. 77
6.2. Двомісні і n-місні предикати.. 78
6.3. Предикати відношення. 79
6.4. Операції алгебри висловлень над предикатами. 80
6.5. Квантори.. 80
6.6. Застосування логіки предикатів до запису тверджень, означень тощо. 83
6.7. Зв'язок між кванторами існування і загальності, його застосування. 85
6.8. Поняття логічного слідування для предикатів. 86
Приклади розв'язування задач 87
Вправи 90

ТЕМА 7. НАТУРАЛЬНІ І ЦІЛІ НЕВІД'ЄМНІ ЧИСЛА. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ НАД ЦІЛИМИ НЕВІД'ЄМНИМИ ЧИСЛАМИ 92
7.1. Поняття про натуральне число і нуль. 92
7.2. Сума натуральних чисел. Закони додавання 93
7.3. Віднімання цілих невід'ємних чисел... 96
Приклади розв'язування задач 98
7.4. Множення цілих невід'ємних чисел.. 101
7.5. Ділення на множині цілих невід'ємних чисел.................................. 105
7.6. Ділення з остачею.. 109
Приклади розв'язування задач 110

ТЕМА 8. ВІДНОШЕННЯ ПОДІЛЬНОСТІ НА МНОЖЕННІ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ... 112
8.1. Основні властивості подільності 112
8.2. Ознаки подільності... 113
Приклади розв'язування задач 117
Вправи 118

ТЕМА 9. ПРОСТІ І СКЛАДЕНІ ЧИСЛА. РЕШЕТО ЕРАТОСФЕНА. ДІЛЬНИКИ І КРАТНІ ЧИСЛА. НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК І НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ ЧИСЕЛ.. 120
9.1. Прості і складені числа. 120
9.2. Решето Ератосфена. Розподіл простих чисел.................................. 121
9.3. Найменше спільне кратне.. 123
9.4. Найбільший спільний дільник. 123
9.5. Зв'язок між НСК І НСД двох чисел. Властивості НСД і НСК. 124
9.6. Деякі теореми про взаємно-прості числа.. 126

9.7. Основна теорема арифметики. 126
9.8. Канонічний розклад числа 127
9.9. Загальний вигляд дільників натурального числа. 127
9.10. Знаходження НСД та НСК за допомогою канонічного розкладу. 129
9.11. Ознаки подільності на складені числа. 129
9.12 Алгоритм Евкліда 130
Приклади розв’язування задач 132
Вправи 135

ТЕМА 10. ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ. МНОЖИНА ДОДАТНІХ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ. 136
10.1. Поняття дробу 136
10.2. Поняття додатного раціонального числа 139
10.3. Додавання додатних раціональних чисел 141
10.4. Віднімання додатних раціональних чисел 144
10.5. Множення і ділення додатних раціональних чисел 144
10.6. Зчисленність множини додатних раціональних чисел 146
Вправи 147

ТЕМА 11. ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ. 148
11.1. Десяткові дроби 148
11.2. Порівняння десяткових дробів. 149
11.3. Дії над десятковими дробами. 150
11.4. Перетворення звичайних дробів у десяткові. 152
11.5. Періодичні десяткові дроби. Довжина періоду. 154
11.6. Перетворення періодичних дробів у звичайні. 154
Вправи 155

ТЕМА 12. ПОНЯТТЯ ВІДСОТКА. ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА ВІДСОТКИ. 157
12.1. Поняття відсотка. Розв’язування задач на застосування основних понять про відсотки 157
12.2. Розв’язування задач на поняття «процентний вміст», «процентний розчин», «концентрація», «%-й розчин» 159
12.3. Розв’язування задач з використанням поняття коефіцієнта збільшення 160
12.4. Розв’язування задач на сушіння 161
12.5. Розв’язування задач на переливання 161
12.6. Способи розв’язування задач на відсотки 162
12.7. Задачі на складання рівнянь 165
12.8. Задачі на знаходження наближеного значення числа 166
Вправи. 167

ТЕМА 13. МНОЖИНА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ 168
13.1. Аксіоматика множини дійсних чисел. 168

13.2. Властивість неперервності множини дійсних чисел. 169
13.3. Поняття верньої і нижньої граней числової множини, їх існування і властивості. 170
13.4. Порівняння дійсних чисел. 172
Вправи. 173

ТЕМА 14. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ 174
14.1. Наближені обчислення.. 174
14.2. Тотожні перетворення виразів 177
14.3. Тотожні перетворення цілих виразів. Одночлени і многочлени. 179
14.4. Ірраціональні вирази. Квадратний корінь і його властивості. 186
14.5. Степінь з раціональним показником і його властивості. 188
Вправи. 191

ТЕМА 15. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ 193
15.1. Числові рівності і нерівності. 193
15.2. Рівняння. Нерівності зі змінною. Рівняння і системи рівнянь. 196
15.3. Розв'язування нерівностей і систем нерівностей. 198
15.4. Метод інтервалів.. 205
Вправи. 207

ТЕМА 16. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАГІЧНИХ РІВНЯНЬ 208
16.1. Основні означення 208
16.2. Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Формули Крамера 209
16.2. Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Формули Крамера 212
16.3. Визначники вищих порядків 217
16.4. Дії над матрицями 218
16.5. Властивості добутку матриць 219
16.6. Ранг матриці 220
16.7. Система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими 221
16.8. Система однорідних лінійних рівнянь 221
16.9. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса 222
Вправи 225

ТЕМА 17. ФУНКЦІЇ. 225
17.1. Означення функції. Зростаючі, спадні, парні і непарні функції............ 225
17.2. Властивості функцій. Лінійна функція. 228
17.3. Квадратична функція. 233
17.4. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень графіків відомих функцій. 235
Вправи. 239

ТЕМА 18. ПОНЯТТЯ МОДУЛЯ ЧИСЛА 240
18.1. Означення модуля числа та його властивості 240
18.2. Рівняння з модулем 242
18.3. Розв'язування нерівностей з модулем 250
18.4. Побудова графіків функцій з модулями 258
Вправи 268

ЧАСТИНА 2. ГЕОМЕТРІЯ 270
ТЕМА 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ 271
1.1. Будова курсу геометрії 271
1.2. Основні властивості найпростіших геометричних фігур 273
Приклади розв'язування задач 285
Вправи 288

ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ НА ПЛОЩИНІ 295
2.1. Креслярські інструменти 295
2.2. Найпростіші задачі на побудову 296
2.3. Геометричне місце точок на площині 298
Приклади розв'язування задач 299
Вправи 302

ТЕМА 3. ЧОТИРИКУТНИКИ 304
3.1. Опуклі чотирикутники 304
3.2. Паралелограм 304
3.3. Прямокутник. Ромб. Квадрат 305
3.4. Трапеція 306
Приклади розв'язування задач 306
Вправи 309

ТЕМА 4. БАГАТОКУТНИКИ 312
4.1. Ламана 312
4.2. Опуклі багатокутники 312
4.3. Правильні багатокутники 313
4.4. Довжина кола 315
Приклади розв'язування задач. 315
Вправи 317

ТЕМА 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИКУТНИКІВ 318
5.1. Косинус, синус і тангенс 318
5.2. Теорема косинусів. Теорема синусів 320
Приклади розв'язування задач 322
Вправи 326

ТЕМА 6. ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР ... 327
6.1. Поняття площі простих фігур ... 327
6.2. Площі подібних фігур ... 330
Приклади розв'язування задач. ... 332
Вправи ... 334

ТЕМА 7. ПРЯМІ Й ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРІ ... 340
7.1. Аксіоми стереометрії та деякі висновки з них ... 340
Приклади розв'язування задач. ... 342
7.2. Паралельність прямих і площин ... 342
Приклади розв'язування задач ... 345
7.3. Перпендикулярність прямих і площин ... 346
Приклади розв'язування задач ... 348

ТЕМА 8. ТІЛА В ПРОСТОРІ ... 350
8.1. Багатогранники ... 350
Приклади розв'язування задач ... 355
Вправи ... 357
8.2. Тіла обертання ... 358
Приклади розв'язування задач ... 362
Вправи ... 363
8.3. Зображення просторових фігур на площині ... 364
Приклади розв'язування задач ... 367
Вправи ... 368
8.4. Об'єми тіл ... 368
Приклади розв'язування задач ... 371
Вправи ... 373

ТЕМА 9. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ ... 374
9.1. Координати на площині та в просторі ... 374
9.2. Рівняння фігур на площині ... 377
9.3. Рівняння фігур в просторі ... 381

Література ... 384

Частина 1
АЛГЕБРА

ТЕМА 1. ВИСЛОВЛЕННЯ. ОСНОВНІ ЛОГІЧНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВИСЛОВЛЕННЯМ.

1.1. Висловлення.

Свої судження і висновки в повсякденному житті, в науці люди передають і фіксують за допомогою речень, як правило, усно або письмово (термін «письмово» включатиме й різні технічні види записів). Особливу роль у процесі спілкування, у фіксації якихось фактів, відіграють ті розповідні, стверджувальні речення, які містять певну інформацію про щось і відносно яких можна поставити запитання: істинні вони чи хибні. Такі речення називають **висловленнями**, вони є основним об’єктом вивчення математичної логіки.

Висловлення – це розповідне речення, про яке можна сказати, що воно істинно або хибно. Істинність або хибність, приписувані висловленню, називаються його істинностним значенням.

Наприклад, речення “*Сонце – це зірка*”, “*Балаклея – обласний центр України*” є висловленнями, причому перше – істинно, а друге – хибно. А речення “*котра година?*”, “*вивчите вірш*” не є висловленнями.

У математичних міркуваннях і повсякденній мові часто зустрічаються речення, утворені видозміною деякого речення за допомогою слова *не*, або складені із простих речень за допомогою сполучників: *і, або, якщо ... то, тоді і тільки тоді, коли*. Які називаються *сентенційними сполучниками*. На відміну від повсякденної мови, у математичній логіці зміст таких висловлень може бути визначений однозначно.

Висловлення, що не містить сполучників, називається простим; висловлення, що містить сполучники, називається складним.

Наведемо приклади.

1. Якщо кожний з трьох доданків ділиться на 5, то їхня сума також поділиться на 5.

2. 5 > 8.

3. Числа 9 і 37 взаємно прості.

4. Архімед – англійський математик.

5. Діагональ квадрата несумірна з його стороною.

6. О котрій годині ти повернувся вчора з університету?

7. Дай мені хвилинку над цим подумати.

Наші знання дають нам підставу твердити, що висловлення 1, 3 і 5 правильні або істинні, а висловлення 2 і 4 – хибні. Терміни «висловлення», «істинне висловлення», «хибне висловлення» належать до неозначуваних понять, їх розуміння дається нам досвідом, суспільною практикою. Не будуть висловленнями 6 і 7, бо не має смислу ставити питання про те, істинні вони чи хибні, вони не мають значень істинності.

Відомо, що геометрія, вивчаючи просторові фігури, абстрагується від таких фізичних властивостей цих фігур, як колір, температура, густина матеріалу, з якого вони виготовлені, тощо. Геометрію цікавить лише форма. За допомогою аналогічної абстракції утворилося в свій час поняття про натуральне число (як інваріант класу рівнопотужних скінченних множин) в арифметиці. Такий, на перший погляд, «збіднений» підхід до вивчення реальних фізичних об’єктів виявився досить ефективним: геометрія і арифметика стали могутній засобом вивчення матеріальної дійсності.

Аналогічну абстракцію здійснюють і в математичній логіці: висловлення вивчають тільки з точки зору того, істинні вони чи хибні, зовсім не цікавлячись їхнім конкретним змістом.

Висловлення вважають своєрідною величиною, яка може мати лише два значення: «істинне» або «хибне» і тільки одне з двох. Тільки такий підхід дає змогу створити ефективну теорію, яку потім можна використати в багатьох питаннях.

З висловлень 2 – 5 не можна виділити більш коротші, їх називатимемо елементарними (або атомарними, неподільними) і позначатимемо малими латинськими буквами *a, b, c*, ... (або $a_1, a_2, \ldots$). Висловлення 1 неелементарне, бо з нього можна виділити два самостійних висловлення: «кожний з трьох доданків ділиться на 5» і «їхня сума також ділиться на 5». Висловлення 1 утворене з цих двох висловлень за допомогою словосполучення «Якщо…, то…»

Якщо певне конкретне висловлення: «число 2 просте» хочемо позначити буквою a, то записуємо так: a = «число 2 просте». В цьому разі говоримо, що a – це ім’я висловлювання «число 2 просте». Якщо висловлювання a істинне, то: $a = 1$; якщо a хибне, то $a = 0$. Зауважимо, що в даному випадку 1 і 0 – це не числа, а просто символи для позначення істинності і хибності.

1.2. Логічні операції над висловленнями.

Якщо придивитись до синтаксичної будови речень природної мови, то можна помітити, що при утворенні висловлень, складених з елементарних, найчастіше вживають сполучники «і», «або» (у виключаючому і не виключаючому розумінні), «якщо ..., то ...», «тоді і тільки тоді, якщо ...» і частку «не». Це особливо стосується математичних текстів, які характеризуються простотою і одноманітністю своєї будови.

Візьмемо, наприклад, такі два висловлення: a = «запис натурального числа m закінчується нулем» b – «натуральне число m ділиться на 5» (m – назва якогось конкретного числа). За допомогою згаданих сполучників з них можна утворити чимало інших висловлень, істинних і хибних. **Наприклад:** «Якщо запис натурального числа m закінчується нулем, то натуральне число m ділиться на 5», «натуральне число m закінчується нулем і натуральне число m не ділиться на 5» і т. д.

Оскільки в математичній логіці формалізують найважливіші фрагменти природної мови, то після формалізації поняття висловлення слід формалізувати і способи утворення висловлень, складених з елементарних, «копіюючи» згадані вище найпоширеніші сполучники.

Але на шляху такої формалізації виникають істотні перешкоди. Річ у тім, що наша природна мова, з арсеналу якої математична логіка бере висловлення, створювалась тисячоліттями стихійно як засіб спілкування і не організована так точно, як, наприклад, мова математична, вона певною мірою відображує складність усього процесу мислення. Тому неможливо повністю математизувати різноманітну практику оперування з висловленнями: така математизація має досить наближений характер.

Розглянемо логічні операції, які дають змогу з одних висловлень утворювати інші, більш складні висловлювання. Нас цікавить тільки значення істинності висловлень, тому означення логічних операцій і дає метод висловлення значення істинності його складових частин (компонентів).

Заперечення. Цю операцію позначатимемо на письмі знаком – (в літературі зустрічаються й інші позначення для цієї операції, наприклад такі: $\sim, \neg$). У звичайній мові цій операції відповідає частка «не». Запис $\overline{a}$ читається: «не *a*», «неправильно, що *a*».

Запереченням висловлювання a напивається таке висловлення $\overline{a}$, яке буде істинним тоді, коли a хибне, і хибним тоді, коли a істинне, тобто

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Нехай, ***наприклад***, *a* = «5 ⋮ 3», *b* = «7 – просте число». Очевидно, що *a = 0*, b = 1. Тоді $\overline{a}$ = «неправильно, що 5 ⋮ 3» (або $\overline{a}$ = «5 не: 3») і $\overline{a}$ = 1. Аналогічно $\overline{b}$ «неправильно, що 7 – просте число» (або $\overline{b}$ = «7 не просте число») і $\overline{b}$ = 0.

Операція заперечення майже адекватно передає смисл вживання частки «не» в практиці розмовної і письмової мови.

Диз’юнкція. На письмі операція диз’юнкція позначається знаком $\vee$. У звичайній мові їй відповідає сполучник «або» в невиключаючому розумінні. Запис $a \vee b$ читається як *«a* диз’юнкція *b*», чи «*a* або *b*».

Диз'юнкцією двох висловлень a, b називається таке висловлення $a \vee b$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли хоча б одне із висловлень a, b істинне, тобто

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Наприклад.

1. $a =$ «$10 = 10$» , $b =$ «$10 < 10$» , $a \vee b =$ «$10 = 10$ або $10 \leq 10$» = «$10 \leq 10$» – істинне висловлення, бо $a = 1$.

2. $a =$ «$15 > 18$» , $b =$ «$15 = 18$» , $a \vee b =$ «$15 \geq 18$» – хибне висловлення, бо $a = 0$ і $b = 0$.

3. $a =$ рівняння $x^2 + y^2 = z^2$ має розв’язки в цілих числах. $b =$ «від'ємне число може бути розв’язком нерівності $5x > 6$, $a \vee b = 1$, бо $a = 1$ (наприклад, $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$ є розв’язок рівняння $x^2 + y^2 = z^2$).

Очевидно також, що, маючи складене висловлення, утворене за допомогою операції диз’юнкції, можна виділити в ньому елементарні частини (компоненти).

4. Висловлення «Я сьогодні піду в театр або дочитаю художню книжку» містить елементарні компоненти: a = «Я сьогодні піду в театр», $b =$ «я сьогодні дочитаю художню книжку». Його можна символічно записати у вигляді $a \vee b$.

Операцію диз'юнкція іноді називають логічним додаванням, а результат цієї операції – логічною сумою.

1.3. Кон'юнкція.

На письмі цю операцію позначають здебільшого знаком $\wedge$ (є й інші позначення цієї операції, наприклад, &, ·). *У* звичайній мові їй відповідає сполучник «і». Запис $a \wedge b$ читається як «*a* кон'юнкція *b»* або як «*a* і *b*».

Кон'юнкцією двох висловлень a, b називається таке висловлення $a \wedge b$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення a, b істинні, тобто

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Наприклад:

1. $a =$ «7 є просте число», $b =$ «23 є складне число». Тоді $a \wedge b$ = «7 є просте число і 23 є складне число» – хибне висловлення, бо $a = 1,\ b = 0$.

2. $a =$ «Степан навчається в 10-му класі» = 1, $b =$ «Степан бере участь в художній самодіяльності» = 1. Тоді $a \wedge b$ = «Степан навчається в 10-му класі і бере участь в художній самодіяльності» = 1.

3. Складне висловлювання «настала осінь і дні стають коротшими» можна подати у вигляді кон'юнкції $a \wedge b$ елементарних висловлень: $a =$ «настала осінь», $b =$ «дні стають коротшими».

Операцію кон'юнкція іноді називають логічним множенням, а результат цієї, операції – логічним добутком.

Логічні операції диз'юнкція і кон'юнкція поширюють на довільне скінчене число *n* > 2 компонентів за такими означеннями:

$$a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = (\dots((a_1 \vee a_2) \vee a_3) \vee \dots) \vee a_n,$$
$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = (\dots((a_1 \wedge a_2) \wedge a_3) \wedge \dots) \wedge a_n.$$

1.4. Імплікація.

Важливу роль у логіці (а в математиці особливо) відіграє операція імплікація, яку на письмі найчастіше позначають знаком $\Rightarrow$ (зустрічаються також.позначення: $\rightarrow$, $\supset$). Запис $a \Rightarrow b$ читається як: *a* імплікує *b*. Часто для читання цієї операції вживають словосполучення: «Якщо *a,* то *b*», «з *a* випливає *b*», «*b* є наслідком з *a*». Висловлення *a* називають умовою (антицедентом) імплікації $a \Rightarrow b$, а висловлення *b* – наслідком (консеквентом).

Імплікацією двох висловлень a, b називається висловлення $a \Rightarrow b$, яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли a = 1, b = 0, тобто

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операція $\Longrightarrow$ тільки частково відображує смисл сполучника «якщо ..., то ...». У звичайній розмовній мові цей сполучник вживається в найрізноманітніших значеннях. Наприклад, для вираження причинної залежності: «Якщо тіло вільно падає, то воно набуває прискорення 9,81 м/с^2», для вираження мети і засобів: «Якщо хочеш вступити до інституту, потрібно сумлінно готуватися до ЗНО» тощо. Отже, в буденному розумінні висловлення «якщо a, то b» передбачає смисловий зв'язок між висловленнями a і b. Але в математичній логіці зміст висловлення не беруть до уваги, ним нехтують, а оцінюють висловлення лише двома значеннями: «істинне» і «хибне», а засобами цих оцінок неможливо відобразити всю різноманітність смислових зв'язків, які можуть бути між поняттями.

Наприклад:

1. $a =$ «сьогодні добра погода» = 1, $b =$ «сьогодні на пляжі багато відпочиваючих» = 1. Тоді складене висловлення $a \Longrightarrow b$ «якщо сьогодні добра погода, то на пляжі багато відпочиваючих» – істинне.

2. $a =$ «число $36 \vdots 24$», $b =$ «число $36 \vdots 6$», $a \Longrightarrow b = 1$, бо a = 0; значення істинності висловлення b тут ролі не відіграє. Водночас $b \Longrightarrow a = 0$, бо $b = 1$, a = 0.

3. Складене висловлення «якщо я стомлений, то я не можу працювати» можна подати у вигляді імплікації $a \Longrightarrow \overline{b}$, де a= «я стомлений», b = «я можу працювати».

Якщо означення операцій –, ∨, ∧, в цілому сприймаються як такі, що достатньою мірою узгоджуються повсякденною практикою вживання відповідних сполучників, то означення операції імплікації на перший погляд може викликати певне непорозуміння. Як це з хибного висловлення може випливати і хибне і істинне висловлення? Хоч на це запитання можна було відповісти досить коротко: так прийнято за означенням, проте всі означення мають під собою якусь підставу. Підставою для наведеного вище означення імплікації є те, що воно добре узгоджується з математичною практикою. Розглянемо деякі приклади:

1) нехай $a =$ «$8 \vdots 5$ і $17 \vdots 5$»; $b =$ «$(8 + 17) \vdots 5$». Очевидно, що $a = 0$, $b = 1$, але з того, що обидва доданки не діляться на 5, матимемо, що їхня сума ділиться на 5, тобто із хибного твердження дістали істинне. Якщо тепер $a =$ «$8 \vdots 5$ і $6 \vdots 5$» = 0; $b =$«$(8 + 6) \vdots 5$»= 0, то в цьому випадку з того що кожний з доданків не ділиться на 5, матимемо, що їхня сума теж не ділиться на 5, тобто із хибного твердження дістаємо, хибне;

2) нехай тепер $a =$ «обидві частини рівності можна ділити на будь-яке число», b = «4 = 4». Покажемо, що з a випливає b. Для цього розглянемо очевидну рівність 4 · 0 = 4 · 0 і скористаємось висловленням a, тобто поділимо обидві її частини на 0. Дістанемо висловлення b.

Аналогічним способом з висловлення a можна мати таке, наприклад, хибне висловлення, як c = «4 = 5» і взагалі скільки завгодно істинних і хибних висловлень. Останній приклад характеризує важливу рису математики: із хибного можна дістати все що завгодно.

1.5. Еквіваленція.

Операцію еквіваленція позначатимемо символом $\Leftrightarrow$. Запис $a \Leftrightarrow b$ читається так: «a еквівалентне b». У звичайній мові цій операції відповідають словосполучення «a тоді і тільки тоді, коли b», «a необхідно й достатньо для b», «a, якщо і тільки якщо b».

Еквіваленцією двох висловлень a і b називається таке висловлення $a \Leftrightarrow b$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти a і b мають однакові значення істинності, тобто

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Наприклад:

1. $a =$ «число $3231 \vdots 9$», $b =$ «сума цифр числа 3231 ділиться на 9». Висловлення $a \Leftrightarrow b =$ «число $3231 \vdots 9$ тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа 3231 ділиться на 9» – істинне, бо $a = 1,\ b = 1$.

2. Нехай $[AB]$ – перпендикуляр відрізка CD. Позначимо $a =$ «кожна точка перпендикуляра AB рівновіддалена від кінців $[CD]$», $b =$ «перпендикуляр AB проходить через середину $[CD]$». Тоді висловлення $a \Leftrightarrow b$ буде істинним.

3. Складне висловлення: «добуток двох чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю» можна подати у вигляді еквіваленції $a \Leftrightarrow b$ двох висловлень: $a =$ «добуток двох чисел дорівнює нулю», $b =$ «хоча б один із співмножників дорівнює нулю». Очевидно, що в цьому прикладі $a \Leftrightarrow b = 1$.

Зауваження. Ілюструючи на прикладах застосування логічних, операцій –, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ми добирали компоненти так, щоб вони були спорідненими за змістом.

І в цьому разі складені висловлення в результаті формального застосування логічних операцій дістаємо осмисленими. Таким висловленням суто механічно, згідно з означенням, приписувались відповідні значення істинності Але поняття «споріднені за змістом висловлення» не точне, розпливчасте, значною мірою суб'єктивне. Тому в математичній логіці однаково застосовують логічні операції до всіх висловлень, оскільки всі висловлення розглядаються тільки з погляду їхньої істинності, без урахування змісту. Це означає, що в результаті застосування логічних операцій можна, наприклад, дістати таке беззмістовне висловлення: «Якщо число 78 ділиться на 5, то Архімед – англійський математик». Згідно з означенням, цьому складеному висловленню надамо значення «істинне»: навряд чи таке висловлення в практиці систематичного міркування коли-небудь зустрінеться – від нього немає ніякої шкоди, це наслідок, уніфікованого підходу в математичній логіці до поняття висловлення. Те саме можна сказати і про всі висловлення, складені з не споріднених за змістом компонентів.

ТЕМА 2. МНОЖИНИ І ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

2.1. Множини, їх види і способи задання.

Поняття про множину. *Поняття множини* є одним з основних, неозначуваних понять. Під множиною розуміють сукупність тих чи інших об'єктів, об'єднаних за деякими ознаками (клас, загін, бригада, зграя, рій, колекція, набір тощо).

Можна сказати, що множина є сукупність певних елементів (предметів, об’єктів), об’єднаних якоюсь спільною властивістю; сукупність, яка мислиться як одне ціле. Можна, наприклад, розглядати множину навчальних тижнів даного навчального року, множину студентів даного факультету, множину молекул в даному об’ємі речовини, тощо. В математиці здебільшого розглядаються множини чисел, точок, фігур, функцій і т.д. Конкретна множина вважається визначеною, якщо є можливість для всякого елемента дати цілком однозначну відповідь – належить даний елемент до множини, чи не належить. Елементами множини можуть бути множини. Множини позначають великими, а їхні елементи – малими буквами латинського алфавіту. Наприклад, запис $a \in A$ означає, що a належить множині A; запис $a \notin A$ означає, що a не належить A.

Методи задання множин. Є два загальних методи, за допомогою яких можна задавати множини:

1. *Переліком елементів.* Наприклад, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Причому порядок елементів у запису множини значення не має. Вважається, що всі елементи множини різні.

Якщо в записі множини той самий елемент повторюється кілька разів, то його вважають за один елемент цієї множини і в позначенні множини записують один раз. Наприклад, множина $\{a, b, b, c, c, c, d, m, n\}$ – це те саме, що й множина $\{a, b, c, d, m, n\}$. Наводимо ще кілька прикладів задания множин переліком їхніх елементів: $M_1 = \{\triangle, \ast\}$, $M_2 = \{\text{Коля}, \text{Вася}, \text{Юра}, \text{Валя}, \text{Оля}\}$, $M_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. *За допомогою характеристичних властивостей.*

Метод опису характеристичної властивості елементів полягає в тому, що множину M задають як множину тих і тільки тих об’єктів, що мають певну, чітко окреслену характеристичну властивість, Яку в загальному вигляді позначатимемо через P. Запис $P(x)$ означатиме, що «x має властивість P». Тоді множину M, всі елементи якої (і тільки вони) мають властивість P, на письмі задають так $M = \{x \mid P(x)\}$.

Розглянемо приклади задания множин за допомогою опису характеристичної властивості.

1) $\{x \mid x \in \mathcal{N} \wedge x = 2k = 1\}$ – множина всіх непарних натуральних чисел. Властивість P тут означає «бути непарним числом»;

2) $\{x \mid x \in R \wedge x > 0\}$ – множина всіх додатних дійсних чисел. P тут означає «бути додатним дійсним числом»;

3) $\{x \mid x \in Q \wedge 2x^2 + 5x - 3 = 0\}$ – множина всіх раціональних коренів квадратного рівняння $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Тут P означає «бути раціональним коренем рівняння $2x^2 + 5x - 3 = 0$».

Окремі найважливіші числові множини мають загальноприйняті позначення і назви.

Наприклад:

$\mathcal{N}$ – множина натуральних чисел;
$\mathcal{N}_0$ – множина цілих невід'ємних чисел;
$\mathcal{Z}$ – множина цілих чисел;
$\mathcal{R}$ (або Q) – множина раціональних чисел;
$\mathcal{D}$ (або $\mathcal{R}$ – множина дійсних чисел;
$[a;\ b]$ – числовий відрізок $\{x \mid a \le x \le b\}$;
$(a;\ b)$ – відкритий числовий відрізок $\{x \mid a < x < b\}$;
$(a;\ b]$, $[a;\ b)$ – числовий відрізок, відкритий зліва $\{x \mid a < x \le b\}$
{x | або справа $\{x \mid a \le x < b\}$;
$(-\infty;\ a]$, $[a;\ \infty)$ – числові промені $\{x \mid x \le a\}$, $\{x \mid x \ge a\}$;
$(-\infty;\ a)$, $(a;\ \infty)$ – відкриті числові промені $\{x \mid x < a\}$, $\{x \mid x > a\}$;
$(-\infty;\ \infty)$ – числова пряма $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$.

Множини поділяються на дві великі групи: **скінченні і нескінченні**. Поняття «скінченна множина», «нескінченна множина» засвоюємо інтуїтивно, на основі розгляду конкретних множин. Ці поняття настільки різні, що за змістом відмінність між ними вгадується безпомилково. Так, множина всіх людей на землі, всіх книг у бібліотеках світу, всіх атомів у Сонячній системі хоча й уявляються нам з надто великою кількістю елементів, але все ж таки вони скінченні. Скінченні множини інтуїтивно розуміємо як множини, елементи яких у принципі можна «перерахувати», «перебрати». Поняття про нескінченні множини засвоюються з розгляду числових множин – *N, Z, Q, R,* множин всіх різноманітних геометричних фігур на площині і в просторі тощо. Процес утворення таких множин не є завершеним.

Порожня множина. Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається символом $\varnothing$. Наприклад, множина

$\mathcal{B} = \{x \mid x \in \mathcal{N} \wedge x < 0\} = \varnothing$, множина раціональних коренів рівняння $x^2 - 3 = 0$ є порожня, тобто $\{x \mid x \in Q \wedge \ x^2 - 3 = 0\} = \varnothing$. Аналогічно $\{x \mid x^2 + 3 = 0 \wedge \in R\} = \varnothing$. Введення поняття про порожню множину є деяким узагальненням поняття про скінченну множину.

Однолелементна множина. Розглянемо одноелементні множини,, тобто такі, які містять лише по одному елементу.

Наприклад, $M_1 = \{25\}$, $M_2 = \{x \mid x \in N \wedge x^2 - 9 = 0)\}$.

Між одноелементною множиною $\{25\}$ і єдиним елементом цієї множини числом 25 є істотна відмінність. 25 – це насамперед натуральне число, воно непарне і є квадратом простого числа 5. Множина $\{25\}$ – це зовсім інше поняття, відносно неї не можна ставити запитання, чи є вона парною, чи є квадратом парного числа і т. д. Вона є носієм зовсім інших властивостей. Цей простий приклад свідчить про те, що множини – це своєрідні об'єкти з властивими їм основними поняттями, відношеннями між ними, операціями тощо.

2.2. Підмножина. Рівність множин.

З елементів якої-небудь непорожньої множини можна утворювати нові множини, які є частинами початкової множини, або її підмножинами. Наприклад, розглядаючи множину учнів школи, можна виділити такі її частини: окремі класи, множину відмінників школи, множину учасників художньої самодіяльності.

Множина В називається підмножиною множини А, якщо кожний елемент множини В належить множині А, тобто $a \in B \Rightarrow a \in A$ *для кожного* $a \in B$.

Скорочено це позначається так: $B \subset A$, $A \supset B$ (читається: *B* включається в *A, A* включає *B).* Якщо *B* не включається в *A,* то позначатимемо це так: $B \not\subset A$ (існує і таке позначення: $\overline{B \subset A}$).

Для множини $M = \{a, b, c\}$ випишемо всі її підмножини: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ = M. В шкільному курсі математики доводять теорему про те, що число всіх підмножин множини, яка містить n елементів, дорівнює 2^n. Множину всіх підмножин множини *M* позначають через $P(M)$ і називають булеаном, множини *M* (на честь англійського математика Д. Буля). Таким чином, якщо $M = \{a, b, c\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Нехай дано множини: $A = \{a, b, c, d, m, n\}$, $B = \{m, n, d, c\}$. Множина B є частиною множини *A* або її **підмножиною**. Записують $B \subseteq A$, читають «*B* міститься в *A*» або «*B* – підмножина *A*». $\subseteq$ знак нестрогого включення, $\subset$ – знак строгого включення, який означає, що $B \subseteq A$ і *B* не збігається з *A* ($A \neq B$). В цьому разі *B* називають **правильною частиною** або **власною підмножиною** *A*.

Підмножина В множини А називається власною підмножиною (або правильною частиною множини А), якщо В не порожня множина і в А знайдеться хоча б один елемент, якого немає в В.

Так, наприклад, власними підмножинами множини $M = \{a, b, c\}$ є всі її підмножини. Очевидно, що $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq A$. $\varnothing$ і A називаються невласними підмножинами A.

Слід чітко відрізняти смисл знаків $\in$ (належить) і $\subset$ (включається). Так, для множини $M = \{a, b, c\}$ маємо: $\{a\} \subset M$, але $\{a\} \in M$, бо множина M не містить елемента $\{a\}$ (але елемент $a \in M$). Аналогічно: $\{a, b\} \in P(M)$, але $\overline{\{a, b\} \not\subset P(M)}$ бо $\{a, b\}$є елемент множини $P(M)$, а не її підмножина. В той же час $\{\{a, b\}\} \subset P(M)$, бо $\{\{a, b\}\}$ уже є підмножиною множини $P(M)$.

Одним з найважливіших є поняття рівності двох множин.

Якщо $B \subseteq A$ і $A \subseteq B$, то $A = B$. **Рівні множини** складаються із одних і тих самих елементів.

Дві множини A і B називаються рівними тоді ї тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки, тобто коли $B \subset A$ і *$A \subset B$.*

Якщо множини A і B не дорівнюють одна одній, то позначатимемо це так $\overline{A = B}$ або так: $A \neq B$.

Наприклад:

1. Якщо $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, a, b, c, e\}$, то $A = B$.
2. Якщо $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, $B = \{x \mid x \in N \wedge 6 \leq x \leq 14\}$, то $A = B$.
3. Якщо $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c, e\}$, то $A \neq B$, бо $d \in A$, але $\overline{d \in A}$.

Відношення нестрогого включення має такі *властивості*:

1) $A \subseteq A$ (*рефлексивність*) ;
2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$ (*антисиметричність*);
3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (*транзитивність*).

Відношення рівності має такі *властивості*:

1) $A = A$ (*рефлексивність*);
2) якщо $A = B$, то $B = A$ (*симетричність*);
3) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$ (*транзитивність*).

2.3. Універсальна множина.

Маючи справу з множинами, нас кожного разу цікавлять множини, які певним чином споріднені між собою, наприклад, певні числові множини, множини геометричних фігур на площині чи в просторі, множини людей у межах села, району чи області і т. д. Домовимось, що розглядувані множини є підмножинами деякої більш об'ємної множини, її називають **універсальною множиною** і позначають – *U*. Універсальна множина складається з елементів якого-небудь певного типу (числа, геометричні фігури, назви творів, імена людей, абстрактні об'єкти тощо), тобто ця множина є «постачальником» елементів для тієї сукупності множин, які розглядаються. Вживаючи термін «множина *М*», завжди слід пам'ятати про те, що *М* є підмножиною певної універсальної множини. Це поняття має відносний характер і стабільне тільки для певної ситуації в певний час. Та сама множина M в одному випадку може бути підмножиною однієї універсальної множини U_1, а в другому — іншої U_2. Наприклад, для множини M парних додатних чисел в одних випадках універсальною множиною є множина N, в других – Z, в третіх множина Q і т. д.

Наприклад:

1. Множини: M_1 – простих чисел, M_2 – парних невід'ємних чисел, M_3 – невід'ємних чисел, кратних 5, M_4 – членів арифметичної прогресії із першим членом 3 і різницею 12 є підмножинами множини N_0 цілих невід'ємних чисел, яка в цьому разі буде універсальною для перелічених множин.

2. Якщо розглядатимемо множини дійсних розв’язків всіх квадратних рівнянь з цілими коефіцієнтами, то універсальною множиною буде множина дійсних чисел R.

Для наочного зображення множин і відношень між ними користуються **діаграмою Венна** (або **діаграмою Ейлера**). На рис. 1 показано відношення включення, на рис. 2 – **універсальну множину** $\mathcal{U}$.

Наприклад, множина трикутників є підмножиною множини. многокутників, яка розглядається як універсальна, і в той же час вона сама є універсальною по відношенню до різних видів трикутників.

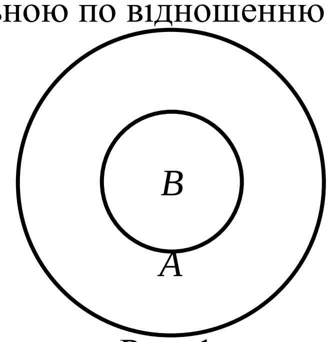


Рис. 1

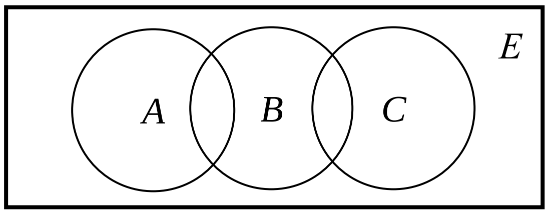


Рис. 2

2.4. Операції над множинами. Закони операцій.

Об'єднання (додавання множин). Інтуїтивним поняттям операції користуватимемося так, як воно було засвоєно в курсі математики середньої школи на основі операцій додавання, множення, віднімання, ділення над числами, многочленами тощо.

Об'єднанням A у B двох множин A і B називається така третя множина, яка містить всі ті і тільки ті елементи, що належать хоча б одній з множин A або B.

Згідно з прийнятою домовленістю, якщо множини A і B мають спільні елементи, то в об'єднання $A \cup B$ вони входять по одному разу. Означення коротко можна записати так: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$, тобто $a \in (A \cup B) \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$.

За означенням множину $A \cup B$ дістаємо приєднанням елементів множини

B, яких немає в A, до елементів множини A (чи навпаки); порядок розміщення елементів тут не відіграє ніякої ролі, тобто $A \cup B = B \cup A$.

Під об'єднанням скінченної кількості множин (більше двох) розумітимемо результат послідовного об'єднання: другої множини з першою, третьої – з об'єднанням перших двох і т. д.

Наприклад:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = (((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup A_4) \cup A_5$$

В загальному вигляді це можна записати так:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (\dots((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots) \cup A_n$$

1. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{m, n, l, s\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, m, n, l, s\}$.

2. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, k, n, l, s\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, k, n, l, s\}$.

3. A – множина парних натуральних чисел, B – множина непарних натуральних чисел, $A \cup B$ – множина всіх натуральних чисел.

4. $A = \{x | x = 2n \wedge n \in N\}$, $B = \{x | x = 3n \wedge n \in N\}$, $A \cup B = \{x | x = 2n \vee x = 3n\}$, $n \in N$.

На діаграмі Венна об'єднання двох множин *A* і *B* зображено заштрихованою частиною прямокутника (рис. 3). Аналогічно зображується об'єднання будь-якої скінченної кількості компонентів. На рис. 4 зображено об'єднання чотирьох множин *A*, *B*, *C*, *D*.

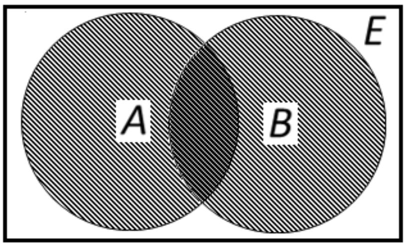


Рис. 3

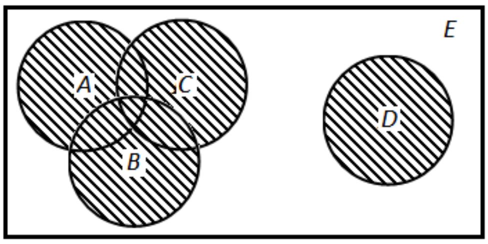


Рис. 4

Наприклад:

1. Множиною *M* розв'язків рівняння $(x^2 - 2)(x^2 + 5x - 6) = 0$ є об'єднання множин M_1 і M_2, де $M_1 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ – множина розв'язків рівняння $x^2 - 2 = 0$, а $M_2 = \{1, -6\}$ – множина розв'язків рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$. Отже, $M = M_1 + M_2 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -6\}$.

2. Знайдемо множину розв'язків нерівності $|x - 3| > 4$ в множині *R*. Поскільки твердження «$|x - 3| > 4$» рівносильне такому: «$x - 3 > 4$» або «$x - 3 < -4$», то множина розв'язків нерівності $|x - 3| > 4$ є об'єднанням множин розв'язків нерівностей $x - 3 > 4$ і $x - 3 < -4$, тобто (рис. 5): $|7, +\infty| \cup |-\infty б - 1|$.

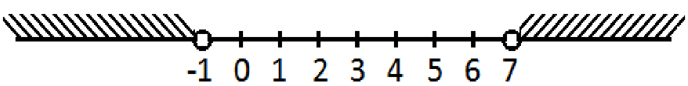


Рис. 5

3. Візьмемо два натуральних числа: $120 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Нехай $M_1 = \{2, 3, 5\}$ – множина простих множників числа 120, а $M_2 = \{3, 5, 7\}$ – числа 315. Тоді множина M простих множників найменшого спільного кратного чисел 120 і 315 (тобто числа $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$) є об'єднанням множин M_1 і M_2, тобто

$M = M_1 \cup M_2 = \{2, 3, 5\} \cup \{3, 5, 7\} = \{2, 3, 5, 7\}$.

У математиці часто використовують операцію об'єднання множин .

Переріз (перетин) множин. *Перерізом $A \cap B$ двох множин A і B називається така третя множина, яка містить усі , ті і тільки ті елементи, які належать одночасно кожній з множин A і B, тобто*

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\},$$

отже,

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

З нього означення випливає, що $A \cap B = B \cap A$. За аналогією об'єднанням скінченної кількості множин, більше двох, матимемо:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = (\dots((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cap \dots) \cap A_n.$$

Наприклад:

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 6, 9\}$, $A \cap B = \{2, 6\}$.

2. $A = \{a, b, c, k, l\}$, $B = \{m, n, d\}$, $A \cap B = \varnothing$.

3. $A = \{x | x \in N \wedge x = 3n \wedge n \in N\}$, $A = \{x | x \in N \wedge x = 5n \wedge n \in N\}$, $A \cap B = \{x | x \in N \wedge x = 15n \wedge n \in N\}$, тобто переріз множини натуральних чисел, кратних трьом з множиною натуральних чисел, кратних п'яти, є множина натуральних чисел, кратних п'ятнадцяти.

4. A – множина правильних многокутників, B – множина паралелограмів, $A \cap B$ – множина квадратів.

Якщо $A \cap B = \varnothing$, то кажуть, що множини A і B не перетинаються (рис. 6). Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то множини перетинаються (рис. 7, 8).

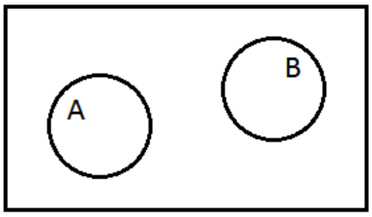


Рис. 6

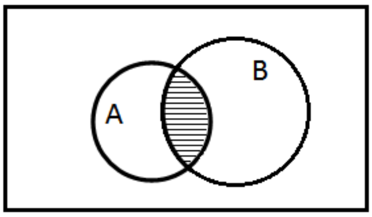


Рис. 7

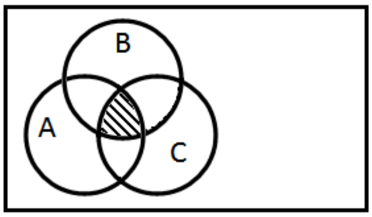


Рис. 8

Закони операцій над множинами

1. $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$ *(комутативність).*
2. $A \cup A = A,\ A \cap A = A$.
3. $A \cup U = U,\ A \cap U = A$.
4. $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$.

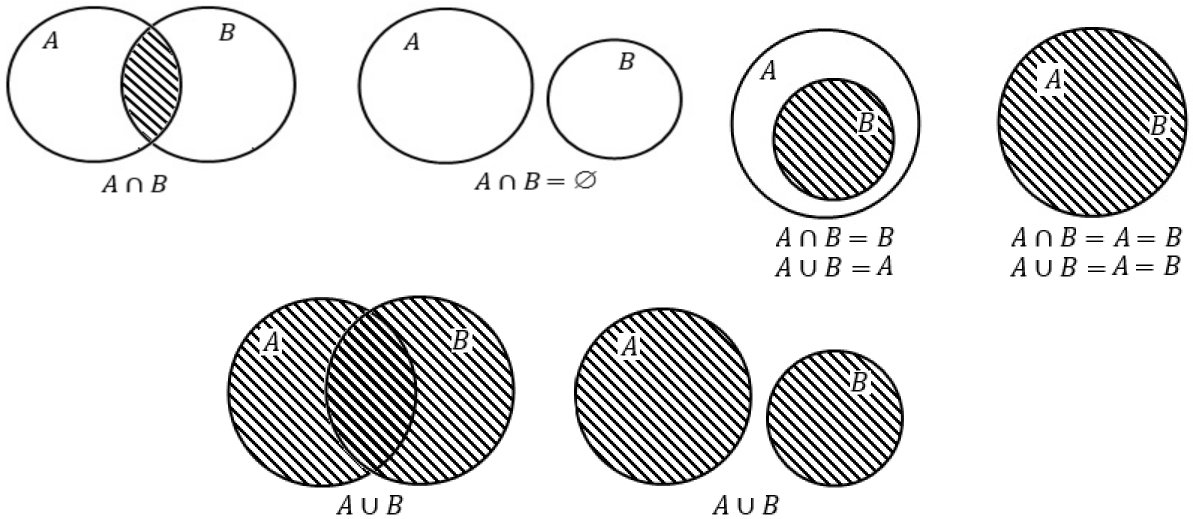


Рис. 9

5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(асоціативність).*

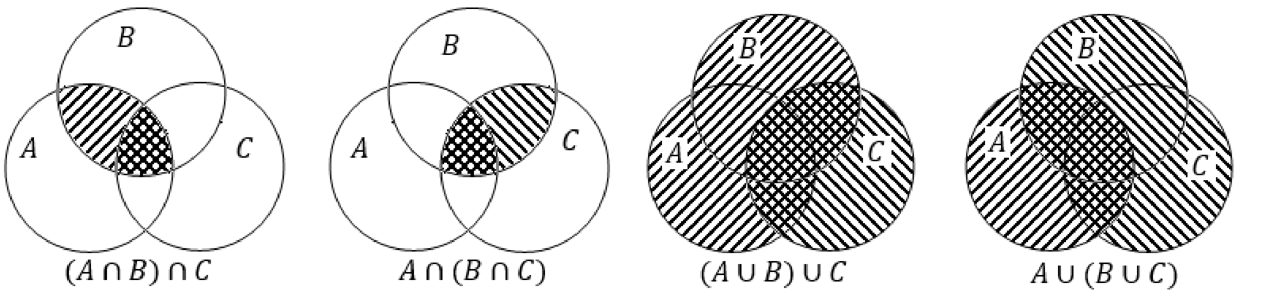


Рис. 10

6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(розподільний закон об'єднання відносно перерізу множин і перерізу відносно об'єднання множин).*

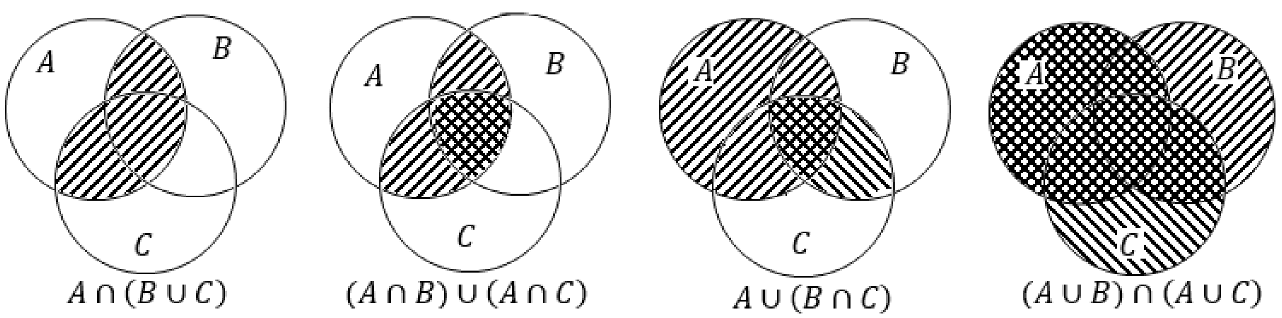


Рис. 11

Операцію перерізу також часто використовують у математиці, наприклад, при розв'язуванні нерівностей та їхніх систем, систем рівнянь тощо.

Наприклад:

1. Розглянемо систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$ у множині R.

Кожне з рівнянь цієї системи є неозначеним рівнянням з двома змінними x і y, має безліч розв'язків. Деякі з них можемо знайти, надаючи, наприклад, певних значень для змінної x і дістаючи відповідні значення для y .Позначимо через M_1 множину роз'язків $x^2 + y^4 = 5$, а через M_2 – рівняння $xy^2 = 2$. Деякі з цих розв'язків випишемо в явному вигляді. Матимемо:

$$M_1 = \{(1; \sqrt{2}), (1; -\sqrt{2}), (2; 1), (2; -1), (-2; 1), (-2; -1), (3; \sqrt[4]{3}) \dots\};$$
$$M_2 = \left\{(1; \sqrt{2}), (1; -\sqrt{2}), (2; 1), (2; -1), \left(\frac{1}{2}; 1\right), \left(\frac{1}{2}; -1\right), \dots\right\}.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо, що множина M її розв'язків є перерізом множин M_1 і M_2: $M = \{(1; \sqrt{2}), (1; -\sqrt{2}), (2; 1), (2; -1)\} = M_1 \cap M_2$.

2. Множина M простих дільників найбільшого спільного дільника чисел 120 і 315 є перерізом M_1 і M_2 простих дільників чисел 120 і 315: $M = M_1 \cap M_2 = \{2, 3, 5\} \cap \{3, 5, 7\} = \{3, 5\}$.

3. Множина M розв'язків системи нерівностей R.

$$x^2 + y^2 \leq 4,$$
$$x + y \geq 0$$

є переріз множин: $M_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ і $M_2 = \{(x, y) | x + y \geq 0\}$. Геометрично ця множина зображується напівкругом радіуса 2 (рис. 12).

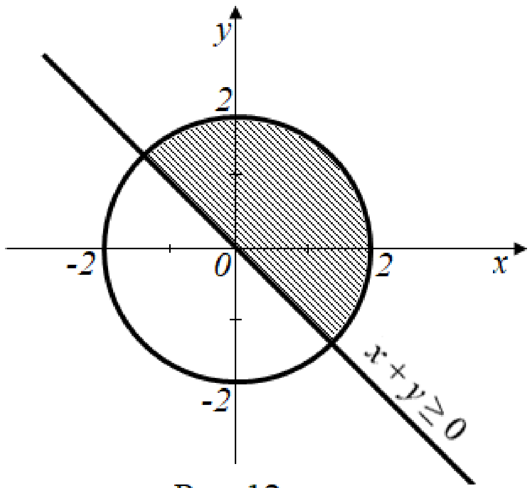


Рис. 12

Наведемо ще прості формули, які можна дістати з діаграми Вена і застосувати до розв'язання деяких задач.

Нехай множини A, B, і C містять скінченне число елементів, а запис $n(A)$ означає кількість елементів у множині A. Тоді, за діаграмою Вена, не важко пересвідчитись у справедливості таких формул:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$$
$$-n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Наприклад:

Кожний студент однієї з академічних груп бере участь у роботі хоча б одного з таких гуртків: спортивного, методичного, музичного. Скільки студентів у цій групі, якщо відомо, що в спортивному гуртку 10 студентів, в методичному 18, в музичному – 12, в спортивному і методичному гуртках – 4, в спортивному і музичному – 8, в методичному і музичному – 6, в усіх трьох гуртках – 2 студенти.

Позначимо через A множину учасників спортивного гуртка, через B – методичного і через C – музичного гуртків. Тоді множину всіх студентів групи позначимо через $A \cup B \cup C$. Згідно з умовою задачі маємо: $n(A) = 10$,

$n(B) = 18$, $n(C) = 12$, $n(A \cap B) = 4$, $n(A \cap C) = 8$, $(B \cap C) = 6$, $n(A \cap B \cap C) = 2$.

Тоді за формулою дістанемо

$$n(A \cup B \cup C) = 10 + 18 + 12 - 4 - 8 - 6 + 2 = 24.$$

Віднімання множин. Доповнення. *Під різницею двох множин A і B розуміють таку третю множину C (позначають $A \setminus B = C$, яка містить ті і тільки ті елементи множини A, що не належать множині B, тобто*

$A \setminus B = \{x | x \in A, \ \overline{x \in B}$, отже $x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A, \ \overline{x \in B}$.

Операцію знаходження різниці двох множин називають відніманням.

Наприклад:

1. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{c, f, k, l\}$, $A \setminus B = \{a, b, d, e\}$.

2. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{k, l, s, m\}$, $A \setminus B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

3. Якщо Z^- – множина всіх від'ємних чисел, то $Z \setminus N = \{0\} \cup Z^-$.

4. Якщо $A = \{x | x = 2n, n \in N\}$, $B = \{x | x = 3n, n \in N\}$, то $A \setminus B = \{x | x = = 2n, \ x \neq 6n, \ n \in N\}$Аналогічно $B \setminus A = \{x | x = 3n, x \neq 6n, n \in N\}$.

Зображення можливих випадків віднімання множин на діаграмі Венна показують на рис. 13, 14, 15, 16.

На рис. 15 зображено той випадок знаходження різниці $A \setminus B$, коли $B \subset A$, тобто множина $A \setminus B$ є доповненням множини *B* до множини *A*.

Оскільки певні сукупності множин ми розглядаємо у рамках відповідної універсальної множини *U*, то операція знаходження доповнення множин набуває самостійного значення, хоч вона і є окремим випадком операції віднімання множин.

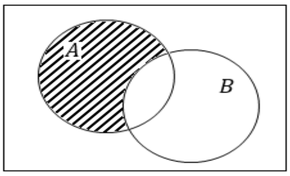


Рис. 13

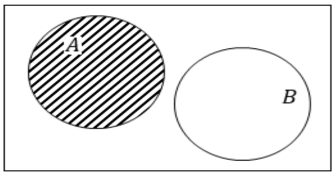


Рис. 14

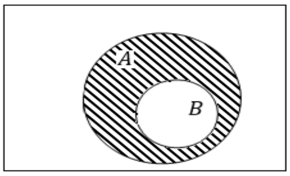


Рис. 15

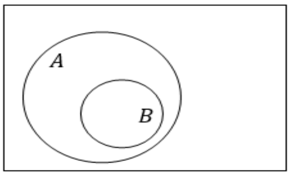


Рис. 16

Доповненням даної множини $A \subset U$ до універсальної множини U називається різниця, $U \setminus A$, тобто така множина,. яка містить усі ті і тільки ті елементи множини U, що не належать A.

Доповнення множини *A* до *U* позначатимемо через A' або $\overline{A}$, де символ ' є позначення операції доповнення. Таким чином, $A' = \{x | x \in U, \ \overline{x \in A}\}$ або $a \in A' \Leftrightarrow = a \in U, \ \overline{a \in A}$.

Різниця універсальної множини *U* і її будь-якої підмножини *A* називається доповненням підмножини *A* до універсальної множини і позначається $U \setminus A = \overline{A_U}$.

Можливі такі випадки:

1) $A \cap B \neq \varnothing$, $A \not\subset B$ і $B \not\subset A$, тоді $A \setminus B \neq B \setminus A$ (рис. 17, *а*, *б*);

2) $B \subset A$, тоді $A \setminus B \neq \overline{B_{\mathrm{A}}}$ – доповнення B до A (рис. 17, *в*, заштрихована частина, $B \setminus A = \varnothing$);

3) $A \cap B \neq \varnothing$, тоді $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$ (рис. 17, *г*);

4) $A = B$, тоді $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$ (рис. 17, *д*);

5) $A \subset B$ – аналогічний випадку, коли $B \subset A$.

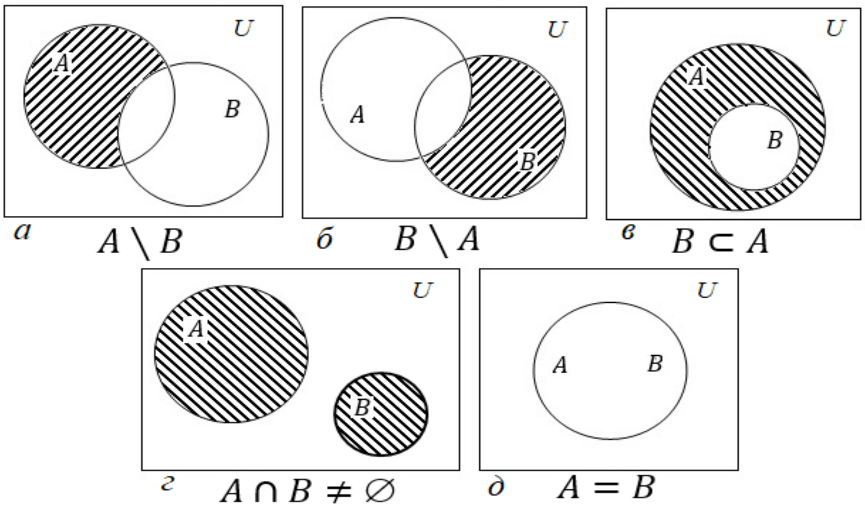


Рис. 17

На діаграмі Венна множину A' позначено заштрихованою частиною прямокутника (рис. 18).

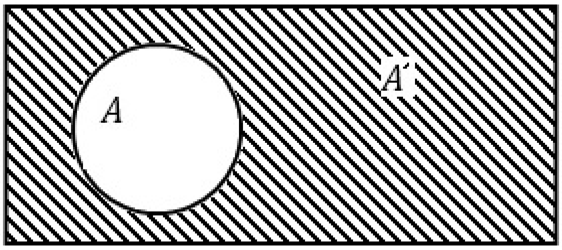


Рис. 18

В результаті виконання операцій об'єднання, перерізу і віднімання (а отже, і доповнення) над елементами із U знову матимемо елементи із U. В цьому разі кажуть, що множина U замкнена відносно цих операцій. За допомогою символів розглянутих операцій можна скорочено записувати деякі твердження про множини. Наприклад, нехай U означає множину всіх людей якоїсь області X, A – множину учнів даної школи, B – множину учнів-юнаків цієї школи, C – множину людей, які мають спортивний розряд. Тоді:

а) C' – множина людей, які не мають спортивного розряду;

б) $A \cup C'$ – множина, що складається з учнів школи і всіх інших людей, які не мають спортивного розряду (очевидно, що учні даної школи, у яких є спортивний розряд, увійдуть до складу цієї множини);

в) $B \cup C$ – множина, що складається з усіх учнів-юнаків школи та інших людей, які мають спортивний розряд;

г) $A' \cap C$ – множина людей, які не є учнями даної школи і мають спортивний розряд.

Аналогічно можна дістати запис і інших підмножин даної універсальної множини U.

Властивості віднімання і доповнення множин:

1) $\overline{A} \cap A = \varnothing$.
2) $\overline{A} \cup A = U$.
3) $\overline{\overline{A}} = A$.
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap B,\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(закони де Моргана)*.
5) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
6) $(A \setminus B) \cup C = A \cup B$.
7) $A \setminus A = \varnothing,\ A \setminus \varnothing = A,\ A \setminus U = \varnothing$.
8) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A),\ (B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$ *(дистрибутивні закони)*.
9) $A \setminus B = A \cap \overline{B};\ B \setminus A = B \cap \overline{A}$.
10) Якщо $A = B$, то $\overline{A} = \overline{B}$.
11) Якщо $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$.

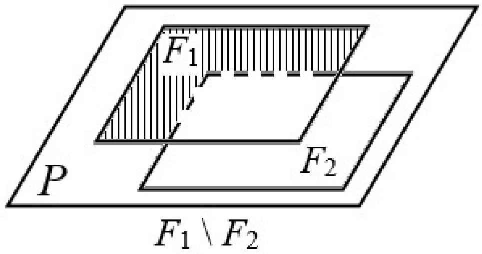


Рис. 19

Множина усіх точок, які належать фігурі F_1 і не належать фігурі F_2, називається різницею фігур F_1 і F_2. Наприклад, різницею двох чотирикутників, зображених на рис. 19, є заштрихована фігура $F_1 \setminus F_2$.

Поняття об'єднання множин, віднімання і доповнення множини до універсальної використовують у початковому курсі математики як основу для додавання і віднімання натуральних чисел.

Множина $P(U)$ всіх підмножин даної універсальної множини U разом з визначеними на ній операціями $\cup$, $\cap$, $'$ і основними властивостями цих операцій утворює алгебру множин, яка має багато застосувань, наприклад, при каталогізації документів, книг тощо.

Якщо зіставити елементи 1, 0 і операції –, $\vee$, $\wedge$ алгебри висловлень з елементами $\varnothing$, U і операціями $\cup$, $\cap$, $'$ алгебри множин таким способом (тобто скласти «словник»):

$$\begin{matrix} 1 & 0 & - & \vee & \wedge \\ | & | & | & | & | \\ U & \varnothing & ' & \cup & \cap \end{matrix},$$

то бачимо, що основні властивості логічних операцій над висловленнями відповідно збігаються з основними властивостями операцій $\cup$, $\cap$, $'$ над множинами. В цьому розумінні ці дві алгебри схожі між собою, але мають деякі відмінності від звичайної шкільної числової алгебри.

Приклади розв'язування задач

1. Знайти $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$, якщо:

а) $A = \{1, 2, 3, 7\},\ B = \{8, 7, 3, 1\}$;
б) $A = \{\{1, 2\}, 1, 2, 3\},\ B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, 2\}$;
в) $A = \{a, b, c\},\ B = \{c, b, a\}$.

Розв'язання.

а) $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 3, 7\}$, $A \setminus B = \{2\}$;

б) $A \cup B = \{\{1, 2\}, 1, 2, 3, \{1, 3\}\}$, $A \cap B = \{\{1, 2\}, 2\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$;

в) $A \cup B = A \cap B = \{a, b, c\}$, $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$.

2. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}_B$, $\overline{B}_A$, якщо:

$A = \{x | x \in D \text{ і } x^x = x\}$, $B = \{x | x \in D \text{ і } x^{10} = x^{20}\}$.

Розв'язання. Задано множини A і B переліком елементів, розв'язавши відповідні їм рівняння.

1) $x^x = x$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $A = \{-1, 1\}$.

2) $x^{10} = x^{20}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $B = \{-1, 0, 1\}$.

Тоді: $A \cup B = B = \{-1, 0, 1\}$, $A \cap B = A = \{-1, 1\}$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = 0$, $\overline{A}_B = B \setminus A = 0$, $\overline{B}_A$ не має смислу, бо $A \subset B$.

3. Довести за допомогою кругів Ейлера, що $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Розв'язання. Див. рис. 20.

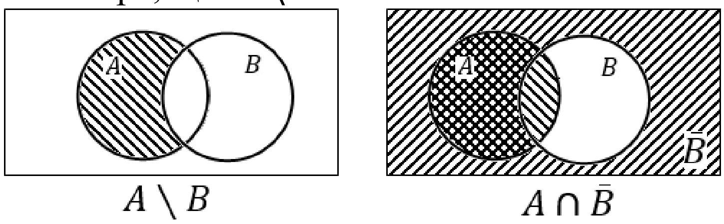


Рис. 20

4. Знайти різницю множин P і S та S і P, якщо:

а) $P = \{x | x \in Z, -4 \leq x \leq 6\}$, $S = \{x | x \in N, 3 \leq x \leq 10\}$;

б) $P = \{x | x \in D, -7 \leq x \leq 0\}$, $S = \{x | x \in D, -3{,}5 \leq x \leq 3\}$;

Розв'язання.

а) Задамо множини переліком елементів:

$P = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Тоді $S \setminus P = \{7, 8, 9, 10\}$; $P \setminus S = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

б) Зобразимо множини на числовій прямій (рис. 21).

Тоді $P \setminus S = \{x | x \in D, -7 \leq x \leq -3{,}5\}$; $S \setminus P = \{x | x \in D, 0 \leq x \leq 3\}$.

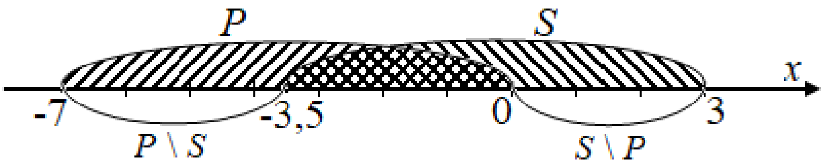


Рис. 21

2.5. Декартів добуток множин. Кортеж.

Два елементи a і b, розміщені в певному порядку, називають упорядкованою парою (a, b). Елементи упорядкованої пари називаються її компонентами або координатами.

Пари (a_1, b_1) і (a_2, b_2) називаються **рівними** тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.

Упорядковану пару ще називають **кортежем довжин 2** і позначають (*a, b*) або $\langle a, b \rangle$.

Маючи поняття кортежу довжини 2, можна визначити поняття кортежу будь-якої скінченної довжини m, де під довжиною кортежу розуміють кількість його компонентів.

Кортежем $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m)$ *довжини m називається такий кортеж довжини 2:* $((a_1, a_2, \dots, a_{m-1}), a_m)$, *де* $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1})$ *є кортеж довжини m – 1, тобто* $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m) = ((a_1, a_2, \dots, a_{m-1}), a_m)$.

Таким чином, дістаємо кортежі: $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$, $(a_1, a_2, a_3, a_4) == (((a_1, a_2), a_3), a_4)$ і т. д. Кортеж $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ довжини m називають ще упорядкованою m-ою.

Якщо компонентами кортежу $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ є елементи множини *M*, то його називають кортежем над множиною *M*. Поряд з кортежами довжин $1, 2, \dots, m$ розглядають також порожній кортеж. Його вважають кортежем довжини 0 і позначають символом $\Lambda = ()$.

Виходячи з означення, неважко довести, що

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_m = b_m.$$

Наприклад:

1. Кожне слово в українській мові є кортеж певної довжини над множиною всіх букв українського алфавіту. Так, слова «ліс», «підручник», «ромб» є, по суті, кортежі (л, і, с), (п, і, д, р, у, ч, н, и, к), (р, о, м, б) довжини відповідно 3, 9 і 4. Очевидно, це саме можна сказати про слова в будь-якій природній мові.

2. Запис кожного натурального числа в десятковій системі числення також є кортеж певної довжини над множиною $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Елементами цих кортежів є цифри. Так, кортежі (1, 3, 4), (3, 4, 1) і відповідні їм числа 134, 341 не дорівнюють одне одному.

Учні початкових класів розв'язують задачі на складання кортежів над Множинами цифр. Прикладом може бути така задача: використовуючи цифри 1, 3, 6 написати: *а*) три однозначних числа; *б*) п'ять двозначних; *в*) чотири тризначних; *г*) два п'ятизначних числа. По суті, це є задача побудови над множиною {1, 3, 6} прикладів кортежів довжин 1, 2, 3, 5.

3. Розв'язки систем рівнянь (лінійних і нелінійних) з трьома змінними в полі *R* є множина кортежів довжини 3 над полем R. Це саме можна сказати про розв'язки системи лінійних рівнянь і нерівностей з будь-якою скінченною кількістю змінних.

Розглянуті приклади показують, наскільки важливо усвідомити істотну відмінність між двома об'єктами: множиною $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ і кортежем $(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Прямий (декартів) добуток множин. Утворення упорядкованих m-ок (або кортежів довжини m) пов'язане з однією операцією над множинами, яку називають знаходженням прямого або декартового добутку m множин. Розглянемо спочатку випадок, коли m = 2.

Прямим (або декартовим) добутком двох множин A і B називається множина всіх пар (a, b) таких, що $a \in A \wedge b \in B$.

Прямий добуток множин A, B позначають через $A \times B$. Таким чином, це означення скорочено можна записати так:

$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Так, наприклад, прямим добутком множин $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$ є множина пар: $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$. Взагалі кажучи, $A \times B \neq B \times A$. Якщо $A = B$, то прямий добуток $A \times A$ позначають через A^2 і називають прямим (декартовим) квадратом множини *A*. Очевидно, що коли хоч одна із множин *A* або *B* нескінченна, то $A \times B$ – також нескінченна множина.

Розглянемо приклади, в яких використано поняття прямого добутку двох множин.

1. Розв'язування задачі «записати всі двозначні числа, цифри десятків яких належать множині $A = \{3, 6, 1\}$, а цифри одиниць – множині $B = \{0, 7\}$» зводиться до знаходження прямого добутку $A \times B = \{(3, 0), (3, 7), (6, 0), (6, 7), (1, 0), (1, 7)\}$ цих множин. Шуканими числами є: 30, 37, 60, 67, 10, 17.

2. Множина точок у прямокутній системі координат на площині є геометричною ілюстрацією прямого добутку $R \times R = R^2$ множини R дійсних чисел самої на себе, тобто прямого квадрата *R*.

3. Розв'язування задачі «знайти всі звичайні дроби, в яких чисельник і знаменник – однозначні прості числа, використовуючи цифри із множини $A = = \{1, 2, 4, 7\}$» зводиться до знаходження підмножин $A = \{(2, 7), (7, 2)\}$ прямого квадрата *M*.

За аналогією з прямим добутком двох множин можна розглядати прямі добутки довільного скінченного числа *m* множин. Надалі використовуватимемо лише випадки, коли *m* = 2 і *m* = 3.

Прямим добутком $A \times B \times C$ *трьох множин – A, B, C – називається множина всіх кортежів* (a, b, c)*, таких що* $a \in A,\ b \in B,\ c \in C$*, тобто*

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) | a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}.$$

Якщо $A = B = C$, то $A \times A \times A = A^3$ називають прямим кубом множини *A*.

Елементи декартового добутку двох скінченних множин можна зручно розмістити у вигляді прямокутної таблиці «з двома входами».

Наприклад. У початковій школі є по чотири паралельних класи. Скільки всіх початкових класів у даній школі?

R	*A*		
	1	2	3
а	1*а*	2*а*	3*а*
б	1*б*	2*б*	3*б*
в	1*в*	2*в*	3*в*
г	1*г*	2*г*	3*г*

Розв'язання. Занумеруємо паралельні класи за допомогою букв *а*, *б*, *в*, *г* відповідно: 1*а*, 1*б*, 1*в*, 1*г*, 2*а*, 2*б* і т. д. Кількість таких класів представимо прямокутною таблицею.

У даному випадку очевидно, що число всіх класів є $3 \cdot 4 = 12$. Число всіх елементів декартового добутку $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$. Якщо $A = B$, $n(A) = = n(B) = a$, то $n(A^2) = a^2$.

Властивості декартового добутку множин

1. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$ для будь якої множини A;

2. Якщо $A \neq B$, то $A \times B \neq B \times A$, тобто для декартового добутку не виконується комутативний закон;

3. а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

в) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$, тобто операція декартового добутку зв'язана з операціями об'єднання, перерізу і віднімання множин *дистрибутивним законом*.

Наприклад. Нехай $A = \{a, b\}$, $B = \{m, n\}$, $C = \{2, 1\}$.

Покажемо, що $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

1) $B \cup C = \{m, n, 1, 2\}$;

$$A \times (B \cup C) = \{(a, m), (a, n), (a, 1), (a, 2), (b, m), (b, n), (b, 1), (b, 2)\};$$

2) $A \times B = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)\}$;

$$A \times C = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

Отже, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Зображення декартового добутку на координатній площині. Якщо X і Y – числові множини, то декартів добуток $X \times Y$ зручно зобразити на координатній площині.

Наприклад.

1. $X = \{1, 2, 3\}$ і $Y = \{3, 4, 5\}$. Скласти множину $X \times Y$ і зобразити у вигляді точок площини.

Розв'язання. $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)\}$. Зобразимо елементи множин X і Y у вигляді точок на відповідних осях координат На рис. 22 декартів добуток $X \times Y$ зображено у вигляді дев'яти точок, абсциси яких належать множині X, а ординати – Y.

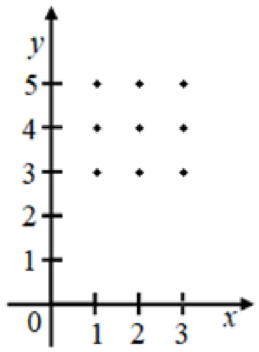


Рис. 22

2. Записати всі дроби, чисельники і знаменники яких – одноцифрові числа із множини $A = \{5, 7, 8, 9\}$. Скільки дістанемо дробів?

Розв'язання. Кожен дріб зображується упорядкованою парою чисел, перший компонент якої є чисельником, а другий – знаменником. Складемо декартів добуток.

$$A \times A = A^2 = \{(5, 5), (7, 5), (8, 5), (9, 5), (5, 7), (7, 7), (8, 7), (9, 7), (5, 8), (7, 8), (8, 8), (9, 8), (5, 9), (7,9), (8, 9), (9, 9)\}$$

Дістанемо такі дроби:

$$\frac{5}{5};\frac{7}{5};\frac{8}{5};\frac{9}{5};\frac{5}{7};\frac{7}{7};\frac{8}{7};\frac{9}{7};\frac{5}{8};\frac{7}{8};\frac{8}{8};\frac{9}{8};\frac{5}{9};\frac{7}{9};\frac{8}{9};\frac{9}{9}.$$

Число таких дробів дорівнює числу елементів декартового квадрата:

$$n(A^2)=n(A)\cdot n(A)=4^2=16.$$

3. Множина $M=\{(3;4;5),(5;12;13),(8,15,17),\ \dots\}$ цілочисельних натуральних розв'язків неозначеного рівняння $x^2+y^2=z^2$ є підмножиною N^3 (прямого куба множини *N* натуральних чисел).

2.6. Розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються. Класифікація.

Розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються, лежить в основі різних класифікацій Поняття «клас», «рід», «сімейство», «Вид», «сорт» тощо широко застосовуються в різних областях людської діяльності. Так, в біології всі живі організми розподіляють на класи і роди, слова у словниках розбивають на множини за алфавітом, множину всіх студентів університету можна розбити на підмножини студентів, які навчаються на одному курсі, в одній академгрупі.

Систему *T* непорожніх підмножин *X* даної множини *M* називають її **розбиттям**, якщо кожен елемент з *M* належить, одній і тільки одній підмножині з *T*. Це означає що система *T* повинна задовольняти такі умови:

1) кожна множина *X* із *T* є підмножина множини *M*;

2) кожна множина *X* із *T* є непорожня підмножина;

3) множини X з T не перетинаються: $X_i\cap X_j=\varnothing$ для всіх $X_i\in T$ і всіх $X_j\in T,\ i\neq j$.

4) об'єднання всіх елементів з *T* дорівнює множині *M*, тобто жоден елемент з множини *M* не знаходиться поза розбиттям

$$M=\bigcup_{i=1}^{n}X_i$$

для всіх $X_i\in T$.

Таке розбиття здійснює класифікацію.

Наприклад:

1. Нехай $A=\{x|x\in N,x\leq 20\}$. Виділимо із цієї множини числа, які при діленні на 5 дають рівні остачі. Дістанемо п'ять підмножин:

$A=\{5,10,15,20\}$, остача 0;

$A_1=\{1,6,11,16\}$, остача 1;

$A_2=\{2,7,12,17\}$, остача 2;

$A_3=\{3,8,13,18\}$, остача 3;

$A_4=\{4,9,14,19\}$, остача 4.

Система цих підмножин має такі властивості: 1) кожна з них є підмножиною *А;* 2) жодна з них не порожня; 3) ніякі дві підмножини не перетинаються; 4) об'єднання всіх підмножин складає множину *А*.

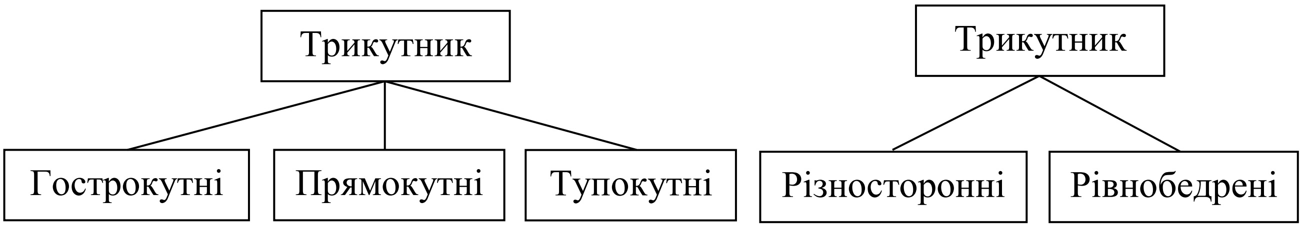
Таким чином, знайдено розбиття T множини A на п'ять класів, тобто здійснена класифікація.

2. Нехай множина M – множина всіх трикутників. За допомогою властивості «бути прямокутним трикутником» виділяємо підмножину A прямокутних трикутників і підмножину B непрямокутних трикутників:

1) $A \in M$ і $B \in M$; 2) $A \neq \varnothing$ і $B \neq \varnothing$; 3) $A \cap B = \varnothing$; 4) $A \cup B = M$.

Властивість «бути прямокутним трикутником» визначає розбиття множини всіх трикутників *М* на два класи *А* і *В*.

3. Розбиття множини трикутників, за основу поділу яких прийнято вид кутів, можна представити схемою, поданою на рис. 23, *а,* а за відношенням їхніх сторін – на рис. 23, *б.*



а *б*

Рис. 23

4. Множину натуральних чисел можна розбити на класи так, як показано на рис. 24.

Велике значення має правильність класифікації. Здійснюють класифікації, дотримуючись усіх умов розбиття (1 – 4). З цих умов виходить, що одну і ту саму класифікацію необхідно здійснювати за однією основою; поділ на підмножини повинен бути неперервним, тобто необхідно брати найближчий підклас і не «перестрибувати» в більш віддалений підклас.

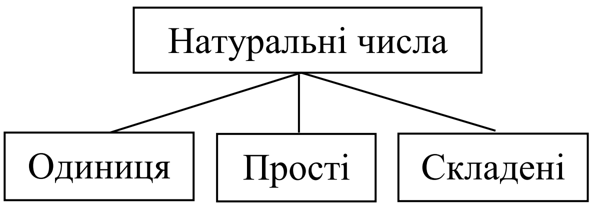


Рис. 24

Наприклад, недосконалу класифікацію чисел подано на рис. 25. Адже ірраціональні і дробові числа також можуть бути від'ємними і додатними.

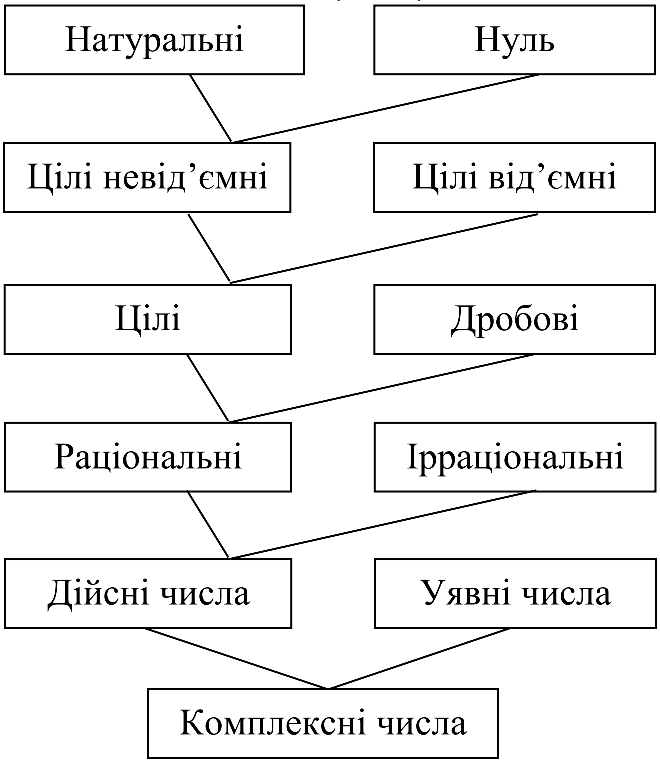


Рис. 25

Можливе розбиття множини за двома, трьома і більшим числом властивостей. *Наприклад*, «прямокутний рівнобедрений трикутник». При цьому сукупність усіх ознак береться за одну основу. *Наприклад*, розбиття множини паралелограмів за двома властивостями: «рівність сторін» і «рівність кутів» подано на рис. 26.

Особливим видом є розбиття, яке складається з двох підмножин: в першу вмішують клас об'єктів, які мають певну ознаку, а в другу – клас всіх інших об'єктів. Таке розбиття називається «дихотомічним поділом».

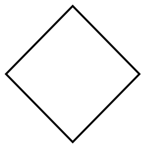
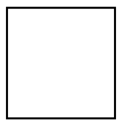
За сторонами / За кутами	Нерівносторонній	Рівносторонній
Нерівнокутний		
Рівнокутний		

Рис. 26

У початковому курсі математики явно не вводиться поняття розбиття множини на підмножини, які не перетинаються, проте розбивати множини на класи доводиться часто. Множину натуральних чисел розбиваємо на парні і непарні числа; на одноцифрові, двоцифрові, трицифрові тощо. Множину кутів розбиваємо напрямі і непрямі, множину многокутників – на трикутники, чотирикутники, п’ятикутники та ін., множину чотирикутників – на прямокутники і непрямокутники, множину прямокутників – на квадрати і неквадрати і т. д.

Приклади правильних і неправильних класифікацій

1. Множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ можна розбити на два класи парних і непарних чисел: $A_1 = \{2, 4\}$, $A_2 = \{1, 3, 5\}$. Виконуються умови: 1) $A_1 \neq \varnothing$, 2) $A_2 \neq \varnothing$; 3) $A_1 \cup A_2 = A$; 4) $A_1 \subset A$ і $A_2 \subset A$.

2. N – множина натуральних чисел. Виділимо підмножини n-значних натуральних чисел ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Тоді $T = \{N_1, N_2, N_3, \ldots N_n, \ldots\}$ є розбиттям множини *N* на підкласи, які не перетинаються.

3. P – множина кутів на даній площині. P_1 – множина гострих кутів, P_2 – множина прямих кутів, P_3 – множина тупих кутів. Чи є система $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ розбиттям множини *P*?

Розв'язання. Одна з умов розбиття не виконується: існують кути, які не є ні гострими, ні тупими, ні прямими (наприклад, кут в 200°). Значить система *S* не є розбиттям множини *P*. Це приклад неправильної класифікації.

4. B – множина трикутників площини. B_1 — множина рівносторонніх, B_2 – множина рівнобедрених, B_3 – множина різносторонніх трикутників. Чи є система $T = \{B_1, B_2, B_3\}$ розбиттям множини *B* на класи?

Відповідь. Система *T* не є розбиттям множини *B* на класи, бо $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ – рівносторонній трикутник завжди рівнобедрений. Не виконується друга умова. Класифікація виконана неправильно.

Вправи

1. Запишіть множину фруктів і множину овочів, якщо маємо яблука, огірки, груші, сливи, помідори, кавуни, капусту, вишні, переш..

2. Дано назви річок: Дніпро, Дунай, Волга, Дон, Дністер, Нева, Десна. Запишіть множину річок, що впадають у Чорне море.

3. М - множина многокутників. Які з перелічених фігур належать цій множині: 1) шестикутник; 2) паралелограм; 3) відрізок; 4) трикутник; 5) коло; 6) круг; 7) кут; 8) квадрат?

4. Запишіть множину, елементами якої є такі двоцифрові числа, що сума числа десятків і числа одиниць дорівнює 8.

5. Запишіть множину, елементами якої є такі двоцифрові числа, що різниця числа десятків і числа одиниць дорівнює 3.

6. Запишіть множину дільників числа 24.

7. Запишіть множину кратних числа 5.

8. Залишіть словами і зобразіть на числовій прямій множину

$$A = \{x \mid x \in R, -6{,}4 < x < 3{,}5\}.$$

9. Дано числові множини: Q - раціональних чисел, R - дійсні числа, N_5 - числа кратні 5, N - натуральні числа. Запишіть, використовуючи символ $\in$, яким з цих множин належать числа: 10; 15; 0; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{7}$; 0,25; -8; $\frac{4}{5}$; $-\frac{1}{2}$.

10. Доведіть, що множина розв'язків рівняння $5(x + 3) = 11 + 5x$ порожня.

11. Знайдіть множину розв'язків рівнянь:

1) $3x - 4 = 5(x - 7)$;
2) $6(5 - x) = 7x + 4$;
3) $12x - 5 = 7 + 6x$;
4) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
5) $x^2 - x + 3 = 0$.

12. Знайдіть та зобразіть на числовій прямій множини розв'язків нерівностей:

1) $2x - 3 < 5x - 6$;
2) $5 - x > 4x - 15$;
3) $7(x - 4) < 3x + 8$.

13. Запишіть множини літер, що входять до слів «множина», «сосна», «кактус», «паралелограм».

14. Прочитайте записи множин і запишіть їх переліком елементів:

1) $A = \{x \mid x \in N, 3(5x + 10) = 50 + 5x\}$;
2) $B = \{x \mid x \in N, x(x - 9) = 0\}$.

15. Запишіть символічно множини:

A - множина непарних одноцифрових чисел;
B - множина натуральних чисел, менших 8;
C - множина натуральних чисел, більших 2 та менших 10;
D- множина цілих чисел, більших -3, але менших 7.

16. Доведіть, що множини $A = \{x \mid x \in N, x < 0\}$; $B = \{x \mid x \in N, 8 < x < 9\}$;
$C = \{x \mid x \in R, x^2 + 1=0\}$ порожні.

17. Доведіть, що серед множин $A = \{x \mid x \in Q, 3x + 5 = 7\}$;
$B = \{x \mid x \in Q, -3x + 2 = 0\}$; $C = \{x \mid x \in Q, x(-3x + 2) = 0\}$ є порожні.

18. Доведіть рівність множин $A = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$;
$B = \{x \mid x \in N, x \le 20$, x при діленні на 3 дає остачу $2\}$.

19. Які з названих множин рівні між собою:

A - множина квадратів;
B - множина прямокутників;
C - множина чотирикутників з трьома прямими кутами;
D - множина прямокутників з рівними сторонами;
E - множина ромбів з прямим кутом?

20. Запишіть всі під множини множин 1) $M = \{2, 4, 6, 8\}$; 2) $K = \{(a, b), c, d\}$.

21. Вкажіть, у яких відношеннях між собою знаходяться множини чотирикутників, паралелограмів, прямокутників, ромбів, квадратів. Зобразіть ці відношення кругами Ейлера.

22. Дано множини: A - натуральних чисел; B – натуральних чисел, що діляться на 3, C – натуральних чисел, що діляться на 6. З'ясуйте, в яких відношеннях між собою знаходяться ці множини, і зобразіть кругами Ейлера.

23. T – множина всіх трикутників на площині. Назвіть декілька підмножин цієї множини і зобразіть їх кругами Ейлера.

24. У множині $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$ знайдіть підмножини чисел:

1) більших від 5;
2) менших 8;
3) більших від 4 і менших від 10;
4) більших від 12.

25. Запишіть елементи перерізу та об'єднання множин:

1) A = {2, 7, 5, 11, 15, 19} і B = {4, 3, 7, 11, 19, 21};
2) A = {м, а, л, ю, в, н, я} і B = {п, о, л, ю, в, а, н, я};
3) $A = \{x \mid x \in N, x < 8\}$ і $B = \{x \mid x \in N, 3 < x < 11\}$.

26. Зобразіть на координатній прямій елементи перерізу та об'єднання множин:

1) $A = \{x \mid x \in R, -2 \le x \le 9\}$і $B = \{x \mid x \in R, -4 < x < 7\}$;
2) $A = \{x \mid x \in R, -3{,}4 < x < 5\}$ і $B = \{x \mid x \in R, -2{,}3 \le x \le 6{,}2\}$.

27. Знайдіть та зобразіть на координатній прямій переріз та об'єднання множин розв'язків нерівностей:

1) $2x + 3 > 5x - 6$ і $4 - 5x < 2x - 10$;
2) $4x - 2 < x + 0{,}4$ і $3{,}5 + 2x > 2{,}5 + x$.

28. Дано множини:

$A = \{x \mid x \in Z, x < 25\}$; $B = \{x \mid x \in N, x < 25, x$ - парне число$\}$;

$C = \{x \mid x \in Z, x < 25. x \vdots 2\}$;$D = \{x \mid x \in Z, x < 25, x \vdots 3\}$.

Запишіть множини: $A\cap B$, $A\cap C$, $A\cap D$, $A\cup B$, $A\cup C$, $A\cup D$, $A\cap B\cap D$, $B\cup A\cup D$.

29. Запишіть множину спільних дільників чисел 12 і 18.

30. З яких елементів складається переріз і об'єднання множин літер слів:

1) "мама" і "лампа"; 2) "батько" і "багато"; 3) "водень" і "вода"?

31. Дано множини: A - множина трикутників; B - множина рівносторонніх трикутників; C - множина рівнобедрених трикутників; D - множина прямокутних трикутників. Які характеристичні властивості мають елементи множин: $B\cap C$, $B\cup C$, $B\cap D$, $B\cup B\cup D$, $B\cap C\cap D$, $B\cup C\cup D$?

32. Знайдіть $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ множин:

1) A = {2, 4, 5, 7, 9} і B = {1, 2, 3, 4, 5, 6};
2) $A = \{x \mid x \in N, x < 8\}$і $B = \{x \mid x \in N, 4 < x < 12\}$

33. Знайдіть переріз та об'єднання множин: 1) N і Z; 2) N і Q; 3) Z і Q; 4) Q і R.

34. Знайдіть переріз, об'єднання, різницю множин цифр чисел 2545210 і 1343061.

35. Запишіть елементи множин $C \cap D$, $C \cup D$, $C \setminus D$ і $D \setminus C$, якщо:

1) $C = \{x \mid x \in Z, -4 \le x \le 8\}$;
2) $D = \{x \mid x \in N, 3 \le x \le 9\}$.

36. Із 30 студентів академгрупи 25 осіб успішно склали екзамен з математики, а 27 – з української мови. Два студенти одержали незадовільні оцінки з обох дисциплін. Скільки студентів мають академзаборгованість?

37. На факультеті початкового навчання 420 студентів: з них грає на піаніно 180, на гітарі 120, на баяні 90, на піаніно та на баяні 60, на піаніно та гітарі 40, на гітарі та баяні 30, на трьох даних інструментах грає 14 студентів. Скільки студентів: 1) грає хоч би на одному інструменті; 2) грає лише на одному інструменті; 3) не грає на названих інструментах?

38. На вступному екзамені з математики було запропоновано три задачі, по одній з алгебри, геометрії, тригонометрії. Із 130 вступників задачу з алгебри розв'язали 80, з геометрії 90, з тригонометрії 70 вступників; з алгебри та геометрії розв'язали 60 вступників; з алгебри та тригонометрії – 40; з геометрії та тригонометрії – 50 вступників. Всі три задачі розв'язали 30 вступників. Скільки вступників не розв'язали жодної задачі?

39. Доведіть, що $X \cap Y \cup \overline{X} \cap Y \cup X \cap \overline{Y} \cup \overline{X} \cap \overline{Y} = U$.

40. Доведіть, що . $\overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A} \cap B$.

41. Доведіть, що $A \cap (A \cup B) \cup \overline{A \cap B} = U$.

ТЕМА 3. ВІДПОВІДНОСТІ

3.1. Граф і графік відповідності.

На практиці часто доводиться зустрічатися з відповідностями між елементами однієї або різних множин. *Наприклад*, при вимірюванні відрізків кожному відрізку ставиться у відповідність число, що виражає його довжину, при сталій ціні кожній певній кількості предметів ставиться у відповідність їхня вартість і т. д.

Приклад:

1. Між елементами множин $X = \{2, 3, 4\}$ і $Y = \{4, 9, 16, 25\}$ встановити відповідність *«у* є квадратом *х»,* де $x \in X$ $і$ $y \in Y$.

Із декартового добутку даних множин $X \times Y$ слід виділити тільки ті упорядковані пари (*x, y*), елементи яких знаходяться між собою в даній відповідності. Дістанемо підмножину декартового добутку: $G = \{(2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$. її називають графіком даної відповідності. Відповідність між елементами двох скінченних множин зручно зображати за допомогою графа.

Теорія графів виникла майже 250 років тому. Її основи заклав Л. Ейлер, розв'язавши так звану «задачу про сім мостів». Вперше термін «граф» увів угорський математик Денеш.

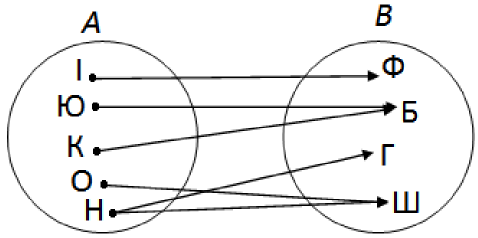


Рис. 27

Граф – це схема, на якій елементи множин зображено точками, що за законом відповідності з'єднані між собою стрілками.

2. Дано дві множини: множина учнів A = {Іван, Юра, Костя, Наталка, Оленка) і

множина спортивних секцій B = {футбол, баскетбол, шахи, гімнастика} і відповідність між елементами цих множин: «Учень a є учасником секції b».

Граф цієї відповідності зображено на рис. 27.

3. Відповідність «x менше y» між елементами множин $X = \{2, 3, 11, 12\}$ і $Y = \{1, 3, 4, 9, 10\}$ можна схематично зобразити графом (рис. 28, *а*) або графіком $G = \{(2,3), (2,4), (2,9),\ (2,10), (3,4), (3,9), (3,10)\}$ (рис. 28, *б*).

Поняття відповідності вважається одним із початкових понять, проте в теоретичних посібниках йому дають таке означення: *відповідністю φ між елементами множин A і B називається трійка множин (G, A, B), першим компонентом якої є певна підмножина декартового добутку $A \times B$, а другим і третім компонентами – самі множини A і B.*

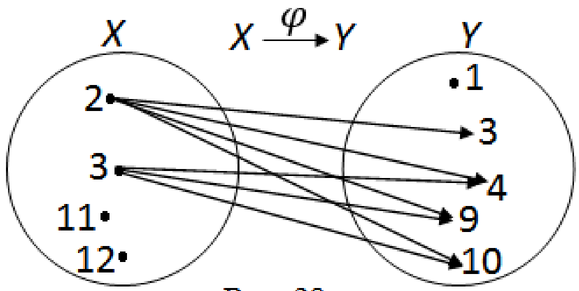


Рис. 28, *а*

Тобто: $\varphi = (G, A, B)$, де $G \subseteq A \times B$.

A – область відправлення, *B* – область прибуття. Область визначення – множина *X* перших компонентів *G*, область значень відповідності – множина *Y* других компонентів *G*. Якщо *X* = *A*, відповідність називається **всюди визначеною**.

У будь-якій відповідності φ між елементами множини *A* і *B*, зображеній графом, можна поміняти напрям стрілок, тоді дістанемо другу відповідність φ^{-1} між елементами множини *B* і *A*, яка називається **оберненою** до відповідності φ. Одночасно відповідність φ обернена до відповідності φ^{-1} (рис. 28, *в*). Це взаємно обернені відповідності: φ – «$x < y$», φ^{-1} – «$x > y$».

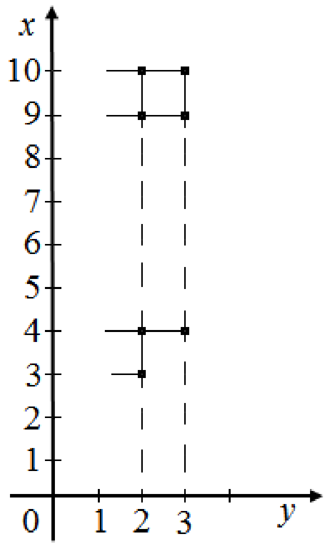


Рис. 28, *б*

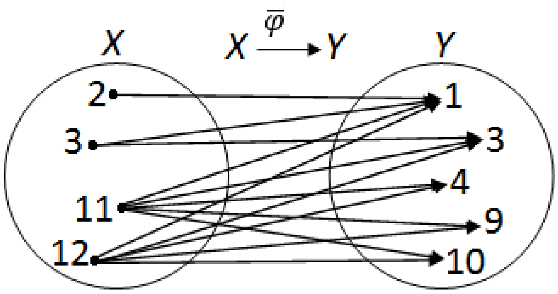


Рис. 28, *г*

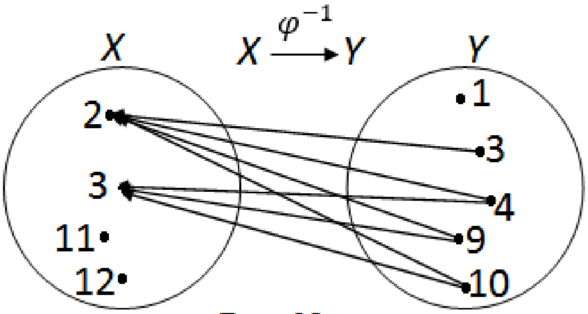


Рис. 28, *в*

Відповідність $\overline{\varphi}$ (не φ) називається **протилежною** відповідності φ, якщо вона задана твердженням, що заперечує твердження φ. В даному разі для множин A і B це буде твердження *«x* не менше *y»,* тобто «$x \geq y$». Графіком цієї відповідності буде множина $G_1 = \{(2,1),(3,3),(3,1),(11,1),(11,3),$ $(11,4),(11,9),(11,10)$ а граф подано на рис. 28, *г.* Очевидно, що $G \cup G_1 = A \times B$.

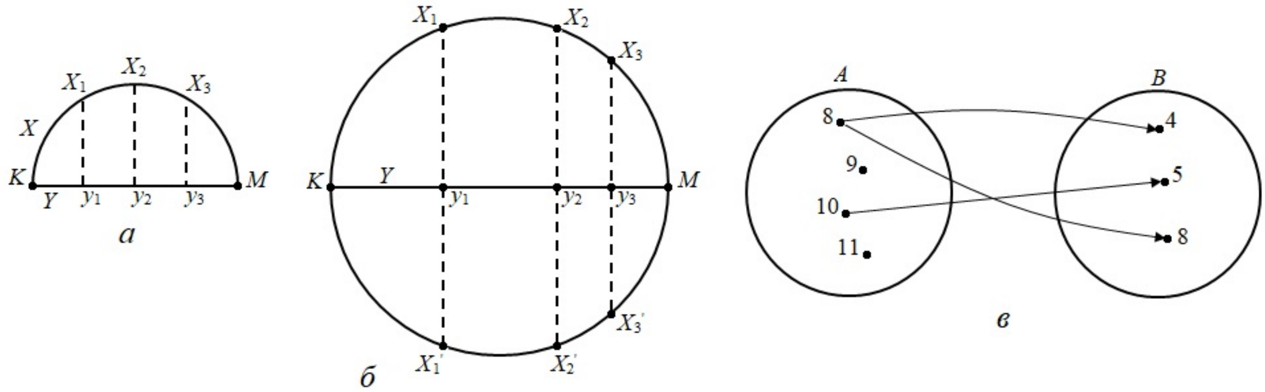


Рис. 29

Розрізняють відповідності одно-однозначні або взаємно однозначні (рис. 29, *а*), много-многозначні (наявність пар з однаковими першими компонентами і різними другими компонентами і, навпаки, з однаковими другими компонентами і різними першими), много-однозначні (наявність пар з різними першими компонентами і однаковими другими) (рис. 29, *б*) і одно-многозначні (наявність пар з однаковими першими і різними другими компонентами) (рис. 29, *в*). Останній граф зображає відповідність «a кратне b» між елементами множин $A = \{8,9,10,11\}$ і $B = \{4,5,8\}$, де $a \in A$, $b \in B$. Графіком цієї відповідності є підмножина декартового добутку $A \times B: G = \{(8,4),(8,8),\ (10,5)\}$. Елементам 9 і 11 множини *А* відповідних елементів *В* не має, елементу 8 множини *А* відповідає два різних елементи множини *В* (4 і 8). Областю відправлення даної відповідності є множина $A = \{8,9,10,11\}$, а областю визначення – її підмножина *X* = {8, 10}.

3.2. Відображення

Відображенням «множини *А* в множину *В»* називається така відповідність між елементами цих множин, при якій кожному елементу множини *А* відповідає один і тільки один елемент множини *В.* Позначають: $f: A \longrightarrow B$ (або $A \xrightarrow{f} B$). Якщо $f(a) = b$, де $a \in A$, $b \in B$, то b називають **образом** *a, a* – **прообразом** *b* при відображенні f, $X = A$ – множина прообразів, а $Y \subset B$ – множина образів при даному відображенні.

Якщо зобразити відображення множини *А* в множину *В* графом, то з кожної точки множини *А* виходить одна і тільки одна стрілка. Що ж до точок множини

B, то в деяких з них немає жодної стрілки, в деяких – одна стрілка, а в деяких можуть бути дві і більше стрілок (рис. 30).

Відображення, при якому жоден елемент множини *B* не може бути образом більше ніж одного елемента множини *A* (тобто в жодну точку множини *B* не входить більше як одна стрілка, рис. 31, *а*), називають **ін'єктивним** відображенням множини *A* в *B*.

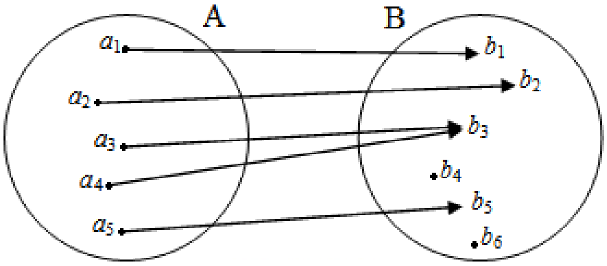


Рис. 30

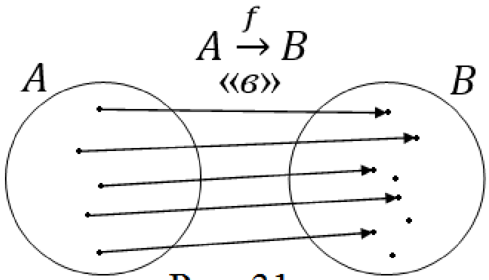


Рис. 31, *а*

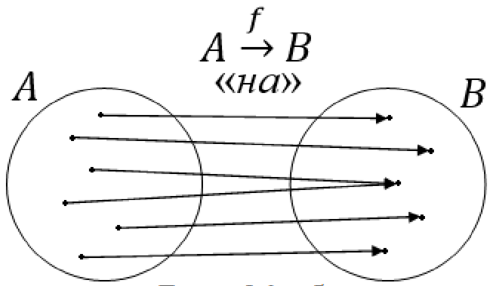


Рис. 31, *б*

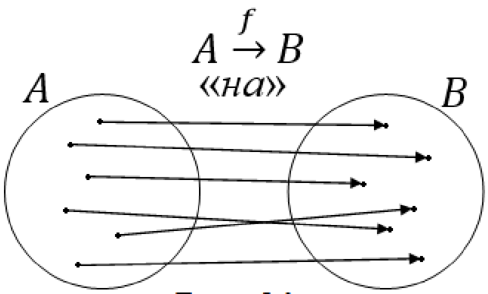


Рис. 31, *в*

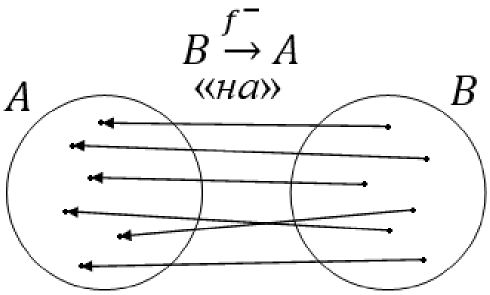


Рис.31, *г*

Якщо при відображенні *f* кожен елемент множини *B* є образом одного чи кількох елементів множини *A,* тобто *Y* = *B (A* відображується на всю множину *B),* то дане відображення називають «відображенням *A* **на** *B*» або **сюр'єктивним** відображенням» (рис. 31, *б).* Взаємно однозначне відображення множини *A* на *B* називають **бієктивним** відображенням (бієкція — від латинського bis – «двічі»). Якщо $A \xrightarrow{f} B$ взаємно однозначне відображення *A* на *B*, то і обернене відображення f^{-} *B* на *A* також буде взаємно однозначним (бієктивним), рис. 31, б, *г*.

Множини *A* і *B* називаються **рівнопотужними** (**еквівалентними**), якщо існує взаємно однозначне (бієктивне) відображення однієї з них на другу. Позначають: *A* ~ *B*.

Поняття рівнопотужності множин використовується для уточнення поняття скінченної і нескінченної множини, яке ми ввели на інтуїтивній основі.

Множина *A* є **скінченна**, якщо не існує взаємно однозначного відображення цієї множини на деяку свою підмножину A_1 таку, що $A_1 \neq A$.

Множину *A* називають **нескінченною**, якщо вона рівносильна деякій своїй власній підмножині, тобто якщо $A \sim A_1$, де $A_1 \subset A$ і $A_1 \neq A$. *Наприклад, A –*

множина додатних парних чисел, B – множина натуральних чисел, кратних 6, $B \subset A$, $A \sim B$ ($2 \longrightarrow 6$, $4 \longrightarrow 12$, $6 \longrightarrow 18$,...), тобто можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементами цих множин. A – нескінченна множина.

Кожна множина характеризується потужністю. Потужність скінченної множини дорівнює числу її елементів. *Наприклад*, множина $A = \{a, b, c, p, e\}$ має 5 елементів. Це і буде її потужністю. Позначається так: $n(A) = 5$. Ця множина рівнопотужна множині пальців руки. Множину, що має ту саму потужність, що і множина натурального ряду чисел, називають **зчисленною**.

Наприклад, зчисленними є множини:

а) множина всіх квадратів натуральних чисел, тобто множина $M = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$, тому що відображення $N \xrightarrow{f} M$, де $f(n) = n^2$, є взаємно однозначне;

б) множина $M = \{k, 2k, 3k, \dots, nk, \dots\}$ натуральних чисел, кратних $k \in N$, бо відображення $N \longrightarrow M$, де $f(n) = nk$ – взаємно однозначне;

в) множина Z, бо існує взаємно однозначне відображення $N \xrightarrow{f} Z$, наприклад

$$\begin{array}{l} \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots \\ f\colon \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \quad ; \\ \quad 0, -1, 1, -2, 2, -3, \cdots \end{array}$$

г) множина раціональних чисел R, бо ці числа певним способом можна перенумерувати.

Множина дійсних чисел не є зчисленною. Це вперше довів Г. Кантор. Він показав, що навіть множина дійсних чисел відрізка (0, 1) має більшу потужність, ніж множина натуральних чисел.

Потужність множини дійсних чисел називають **потужністю континуум**.

Приклади розв'язування задач

1. Розглянемо дві множини: $A = \{x | x - \text{країна Європейського Союзу}\}$, $B = \{y | y - \text{столиця країни Європейського Союзу}\}$ і відповідність $A \xrightarrow{f} B$ «крані *x* відповідає столиця *y*». Побудувати граф цієї відповідності. Чи буде ця відповідність відображенням? Яким?

Розв'язання. Дана відповідність є взаємно однозначним відображенням (бієктивним) множини *A* на *B*. Граф її подано на рис. 32.

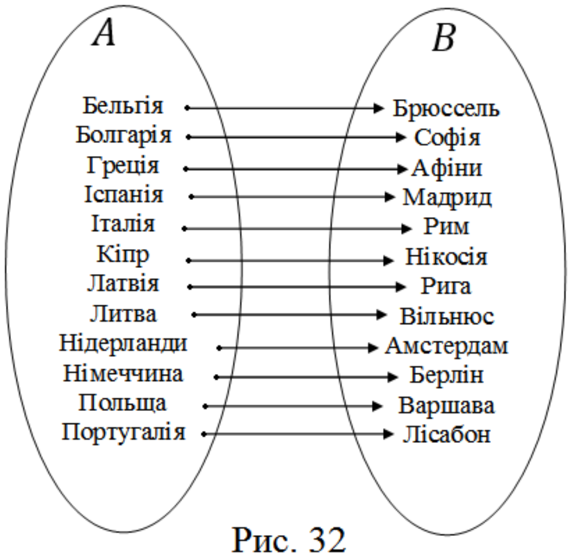


Рис. 32

2. Дано відповідності між $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ і $B = \{a, b, c\}$:

а) $\{(0, a), (1, a), (2, b), (3, c), (4, c)\}$;

б) $\{(0, b), (0, a), (2, c), (3, c), (4, c)\}$;

в) $\{(0, a), (1, a), (1, b), (2, c), (3, b)\}$.

Які з них є відображеннями? Якими?

Розв'язання.

а) Ця відповідність є много-, однозначним відображенням A на B. Відповідності б) і в) не є відображеннями, тому що є елементи з однаковими першими компонентами і різними другими.

3. Які з пар множин рівнопотужні:

а) $A = \{x | x \in N, x \leq 2\}$ і
$B = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$;

б) $A = \{x | x \in R, x^2 - 16 = 0\}$ і $B = \{x | x \in Z, |x| = 9\}$.

Розв'язання.

а) $A \sim B$, тому що: $A = \{1, 2\}$ і $B = \{-2, -1\}$
(корені рівняння $x^2 + 3x + +2 = 0$ знаходимо за теоремою Вієта);

б) $x^2 - 16 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 4$; $A = \{-4, 4\}$;
$|x| = 9$; $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; $B = \{-3, 3\}$.

Отже, $A \sim B$.

4. Складати можливі туристичні маршрути від міст Миколаїв, Львів, Київ до міст Берлін, Софія, Прага.

Розв'язання.

Нехай A = {*М*, *Л*, *К*} – множина, що складається з міст Миколаїв, Львів, Київ, і *В* = {*Б*, *С*, *П*} – множина міст Берлін, Софія, Прага. Тоді множина можливих маршрутів є декартовим добутком $A \times B$ = (*М*, *Б*), (*М*, *С*), (*М*, *П*), (*Л*, *Б*), (*Л*, *С*), (*Л*, *П*), (*К*, *Б*), (*К*, *С*), (*К*, *П*)}. Дана відповідність не є відображенням, оскільки в ній є пари з однаковими першими компонентами і різними другими. Граф її подано на рис. 33.

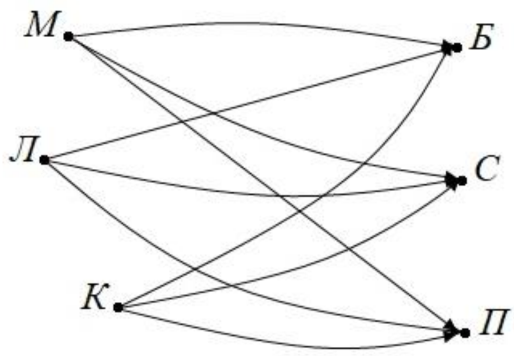


Рис. 33

5. Зобразити на координатній площині такі відповідності між елементами множин $X \in D$ і $Y \in D$:

а) $\varphi = \{(x, y) | (x, y) \in D^2, x + y = 1\}$;

б) $f = \{(x, y) | (x, y) \in D^2, y = x^2 + 2\}$;

в) $p = \{(x, y) | (x, y) \in D^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

г) $q = \{(x, y) | (x, y) \in D^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 4\}$.

Розв'язання.

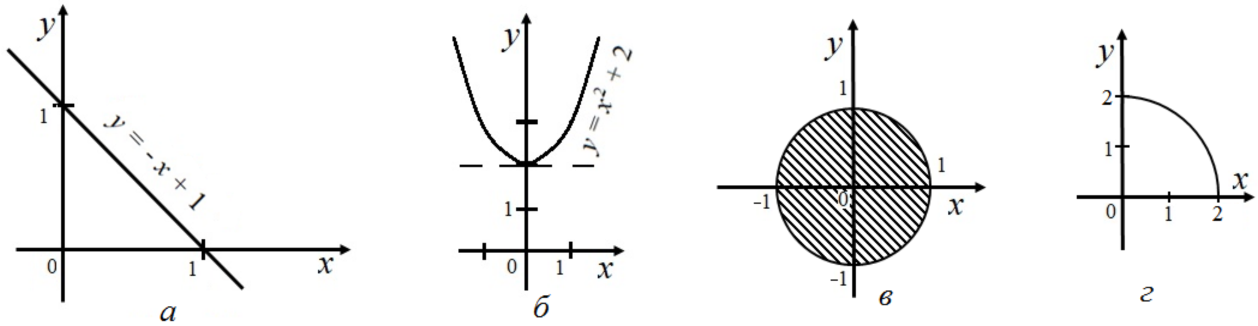


Рис. 34

а) Графіком відповідності φ на площині є множина точок прямої $y = -x + 1$ (рис. 34, *а);*

б) графіком відповідності f є множина точок параболи $y = x^2 + 2$ (рис. 34, б);

в) графіком відповідності p є круг з центром в точці $O(0, 0)$ і радіусом $r = 1$ (рис. 34, *в);*

г) графіком відповідності q є чверть кола радіуса 2 з цент ром $O(0, 0)$, розташованого у першій чверті (рис. 34, *г*).

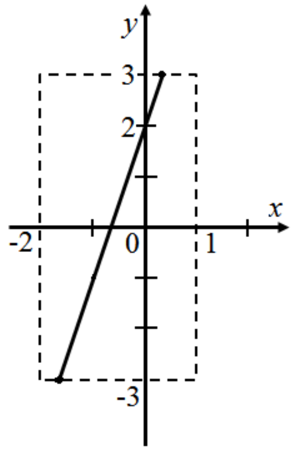


Рис. 35

6. Відповідність між елементами множин

$X = \{x | x \in R, -2 \leq x \leq 1\}$,

$Y = \{x | x \in R, -3 \leq x \leq 3\}$;

задана за допомогою рівняння $3x - y + 2 = 0$.

Побудувати графік цієї відповідності.

Розв'язання. Графіком цієї відповідності є відрізок прямої $y = 3x + 2$ (рис. 35).

Вправи

1. Між множинами $X = \{0, -5, 7, 15\}$ і $Y = \{A, B, C\}$ встановлено різні відповідності, графіки яких:

а) $\{(0, C), (-5, A), (7, B), (15, C)\}$;

б) $\{(-5, A), (7, C), (0, A), (-5, C), (15, C), (0, B)\}$;

в) $\{(-5, B), (0, C), (7, B), (15, B)\}$.

Які з цих відповідностей є відображеннями?

2. X – множина учнів у класі, Y – множина парт у класі. Поставимо у відповідність кожному учню класу парту, за якою він сидить. Чи буде ця відповідність відображенням, якщо за кожною партою сидять два учні і вільних парт у класі немає?

3. Відомо, що $X = \{0, 1, 2, 3, 5, 11\}$, Y – множина цілих чисел. Між елементами цих множин задана відповідність $f: y \to 3x + 1$. Доведіть, що f – відображення; визначте його вид. Яким буде графік цього відображення в прямокутній системі координат?

4. Дано множини: $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; Y – множина цілих чисел і відповідність між ними $f: y \to 5 - x^2$. Доверти, що f – відображення X в Y, і побудувати його графік в прямокутній системі координат, записати множину значень цього відображення.

5. Відповідність f між елементами множини X усіх трикутників і множини Y усіх дійсних чисел така: «трикутник x має площу, яка дорівнює y». Показати, що f – відображення. Вказати множину його значень.

6. Відповідність між елементами множин X і Y задана за допомогою нерівності $y > x + 3$. Побудувати графік цієї відповідності, якщо: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

7. Довести, що подані множини зчисленні:

а) множина непарних натуральних чисел;

б) множина цілих невід’ємних чисел;

в) множина кубів натуральних чисел.

8. Дано множину R. Назвати різні підмножини цієї множини, рівнопотужні з нею.

9. Показати, що подані множини нескінченні:

а) $A = \{x|\ x = 2n + 1,\ n \in N\}$;

б) $A = \{x|\ x = 7n,\ n \in N\}$;

в) $A = \{x|\ x = 2^n,\ n \in N\}$.

10. З’єднати пари множин знаком «=», якщо вони рівні, і знаком «~», якщо вони рівнопотужні:

а) A – множина сторін п’ятикутника; B – множина кутів п’ятикутника;

б) A – множина букв у слові «мир»; $B = \{\text{р}, \text{и}, \text{м}\}$;

в) A – множина коефіцієнтів многочлена $3x^2 + x^2 + 2x + 5$;
$B = \{x|\ x \in N, x < 4\}$;

г) A – множина натуральних чисел, кратних 10 і менших від 101;
B – множина натуральних чисел, які є точними квадратами і менші від 101.

11. $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 7, 10\}$. Записати такі відповідності φ:

а) $(a, b) \in A \times B$ і $(a - b) \vdots 3$;

б) $(a, b) \in A \times B$ і $(a + b) \vdots 2$;

в) $(a, b) \in A \times B$ і $a + b < 11$;

г) $(a, b) \in A \times B$ і b – просте число.

12. Виписати елементи множини $\{1, 2\} \times \{2, 3, 4\}$. Яка область визначення і множина значень цієї відповідності? Яким буде її графік?

13. Записати множину всіх правильних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in A$, $b \in B$ і $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 8\}$.

14. Дано множини $X = Y = Z$ і відповідність $f: x \to y = 5x^2$. Довести, що f – відображення, визначити його вид. Яким буде графік цього відображення в прямокутній системі координат? Порівняйте графік $y = 5x^2$ на множині Z з графіком $y = 5x^2$ на множині D.

15. Нехай $X = D$. Кожному $x \in X$ поставимо у відповідність його квадрат. Чи буде ця відповідність відображенням? Чи можна його назвати оборотним відображенням множини дійсних чисел на себе?

16. Між елементами множин $X = \{2, 3, 7\}$ і $Y = \{1, 4, 5\}$ відповідність задана переліком пар $R(f) = \{(3; 1), (2; 1), (7; 4), (3; 5), (7; 5)\}$. Знайдіть відповідність, обернену даній, протилежну даній, обернену до протилежної та побудуйте їх графіки.

17. До даних відповідностей сформулюйте протилежні, обернені і протилежні оберненим відповідності:

1) пряма a перетинає пряму b;

2) число a є дільником числа b;

3) Петров вищий за Іванова;

4) річка a впадає в море b.

18. Між елементами множин M = {-1; 0; 2; 5} і K = {a, b, c} відповідність задана переліком пар:

1) {(-1; a), (0; b), (2; c), (5; c)};
2) {(-1; b), (2; a), (0; c), (2; c), (5; a)};
3) {(0; a), (-1; c), (2; b)}.

Які з цих відповідностей є відображенням множини M на множину K?

19. Відповідність між множинами $X = \{x \mid x \in Z, -2 \le x \le 2\}$ і $Y = Z$ встановлена так, що кожному значенню $x \in X$ відповідає .$y \in Y$, який на дві одиниці більше цього X. Запишіть всі пари цієї відповідності та побудуйте її графік.

20. Елементи множин X = {6, 12, 13, 15, 17) і Y = {3, 2, 4, 7} знаходяться у відповідності f: «число x кратне числу y». Запишіть цю відповідність переліком пар, складіть таблицю (матрицю), побудуйте графік і запишіть область значень цієї відповідності.

ТЕМА. 4. ВІДНОШЕННЯ НА МНОЖИНІ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ.

4.1. Бінарні відношення між елементами однієї множини.

Основні відомості з теорії. Будь-яка відповідність між елементами даних множин A і B задає певне **відношення** між елементами цих множин. Якщо $B = A$, то відповідність задає **бінарне відношення** між елементами однієї множини A. Множину перших компонентів пар даного відношення ф називають областю визначення відношення φ, а множину других компонентів пар – **областю** його **значень**.

Приклад. Накреслити графи відношень:

а) «менше»;
б) «дорівнює»;
в) «менше або дорівнює» на множині A = {4, 6, 8, 10}.

Розв'язання. Зобразимо елементи множини A точками і стрілками задамо дані відношення: а) «менше» – рис. 36, a; б) «дорівнює» – рис. 36, *б* (тому, що кожен елемент дорівнює сам собі, то з кожної вершини графа виходить петля); в) «менше або дорівнює» – рис. 27, *в.*

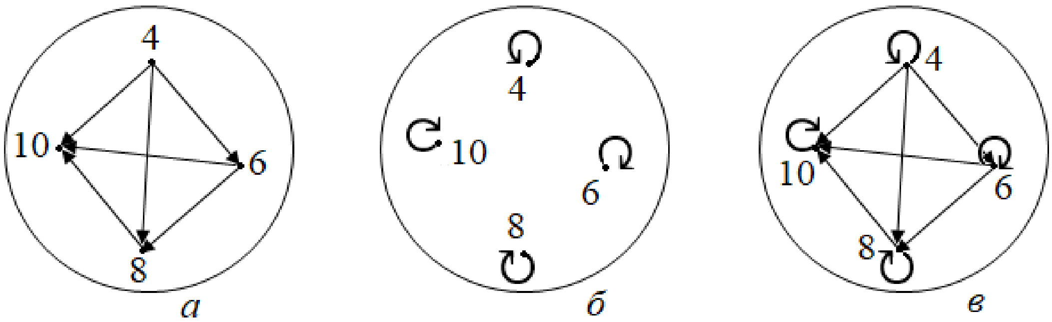


Рис. 36

4.2. Способи задання відношень

1. Відношення на скінченній множині можна задати переліком пар, які задає дана відповідність (графіком або таблицею).

2. Відношення можна задати, вказавши на характеристичну властивість усіх пар, які задає дана відповідність. Наприклад, «$x < y$» на множині чисел, «$a \perp b$» на множині прямих.

3. Відношення на числових множинах можна задати графіком на координатній площині. Коли графіком є не ізольовані точки і не лінія, а частина площини, її заштриховують.

Наприклад, на рис. 37 показано графіки відношень:

а) $\{(x,y) \in R^2 | y = x\}$;

б) $\{(x,y) \in R^2 | y \geq x\}$;

в) $\{(x,y) \in R^2 | 0 \leq x \leq 2 \text{ або } 0 \leq y \leq 1\}$;

г) $\{(x,y) \in R^2 | 0 \leq x \leq 2 \text{ і } 0 \leq y \leq 1\}$.

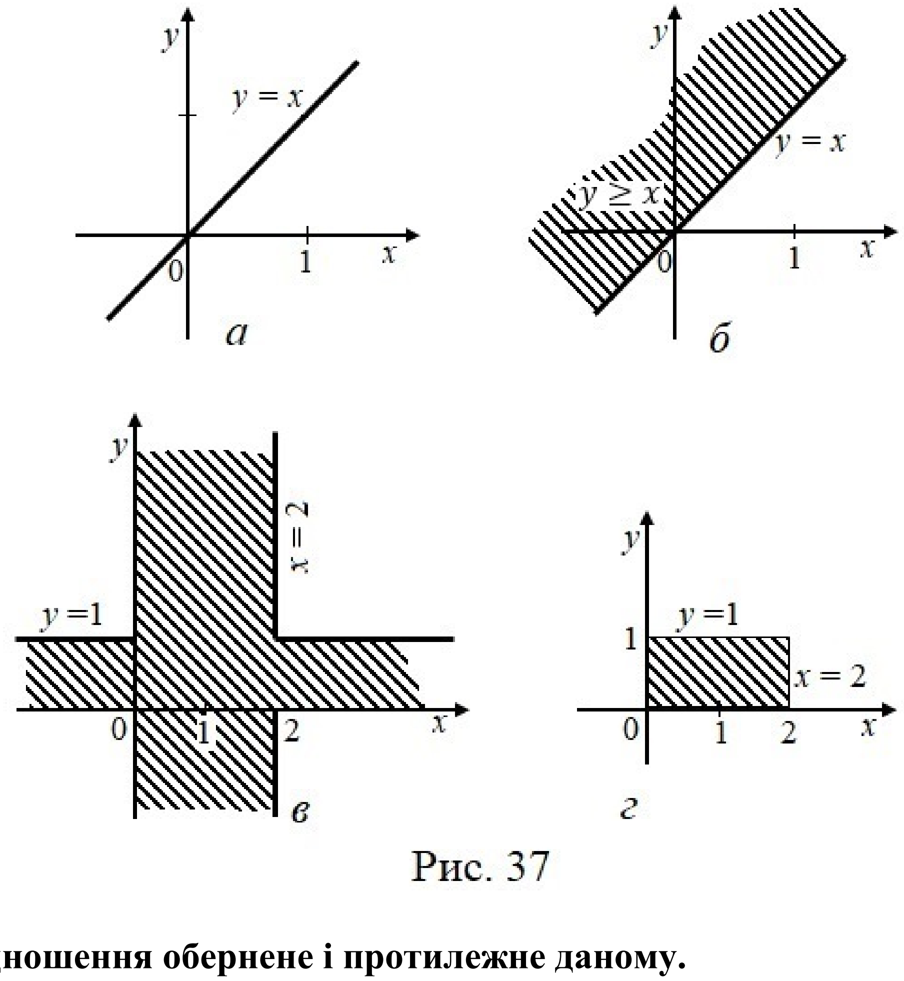


Рис. 37

4.3. Відношення обернене і протилежне даному.

Відношення $\overline{\varphi}$ між елементами множини X називається **протилежним** до відношення φ, якщо воно є доповненням відношення φ до декартового квадрата X^2. Відношення φ^{-1} називається **оберненим** до відношення φ, якщо $y\varphi^{-1}x$ тоді і тільки тоді, коли $y\varphi x$, де $x \in X$; $y \in Y$.

Приклад. Відношення φ «$x > y$», задане на множині $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Побудувати граф і графік цього відношення. Задати відношення $\overline{\varphi}$ (протилежне до даного), φ^{-1} (обернене до даного), побудувати графік і граф кожного з них.

Розв'язання. Зобразимо всі елементи множини X точками на площині і з'єднаємо стрілками пари чисел, які знаходяться у відношенні «$x > y$». Дістанемо граф даного відношення (рис. 38, *а)*.

Запишемо множину всіх пар чисел із X, які знаходяться між собою у відношенні φ: $\{(3, 1), (5, 1), (5, 3), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7)\}$. Це графік даного відношення. Побудуємо його на координатній площині (рис. 38, *б)*.

Відношення φ^{-1} можна задати нерівністю «$y > x$» або переліком всіх пар, помінявши в кожній парі відношення φ місцями перший і другий компоненти $\varphi^{-1} = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (1, 9), (5, 7), (5, 9), (7, 9)\}$. Щоб дістати граф відношення φ^{-1}, слід у графі відношення φ змінити напрям стрілок (побудуйте самі).

Відношення $\overline{\varphi}$, протилежне φ, є запереченням даного відношення «$\overline{x > y}$», тобто «$x \leq y$», його граф дано на рис. 38, *в,* а графік $\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (5, 5), (5, 7), (5, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\}$ – на рис. 29, *г.*

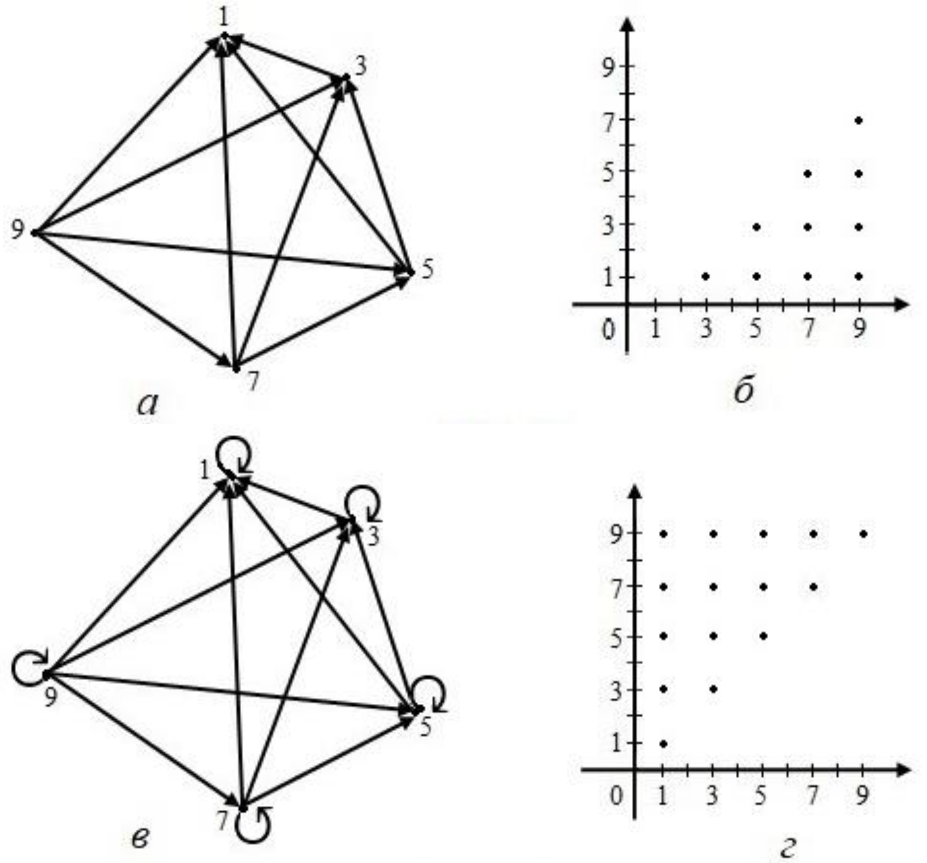


Рис. 38

Перетином двох відношень називається відношення, графіком якого є перетин графіків даних відношень, а **об'єднанням** – відношенням, графік якого є об'єднанням графіків даних відношень.

Приклад.

Представити відношення а) $x+y=4$; б) $x+y<4$; в) $x+y>4$ на множині $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ за допомогою графіків у прямокутній системі координат. Знайти їхні об'єднання і перетин.

Розв'язання. Графік відношення $x+y=4$ на множині A являє собою п'ять точок, розташованих рівномірно на відрізку прямої $y=-x+4$. Графік відношення $x+y<4$ – множина окремих точок, розташованих нижче від цієї прямої, а графік відношення $x+y>4$ – множина окремих точок, розташованих вище від цієї ж прямої (рис. 39). Усі точки розташовані у першому квадранті. Перетином є порожня множина, а об'єднанням – множина усіх цих точок. Зобразіть її на одній координатній площині.

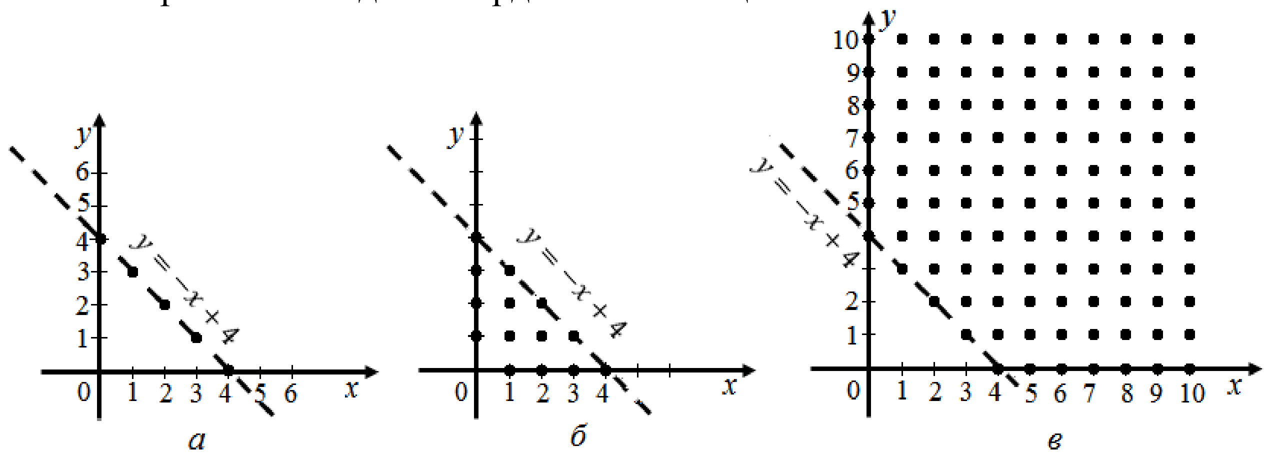


Рис. 39

Приклад. Побудуйте у прямокутній системі координат перетин графіків відношень, заданих на множині Z:

а) $(0 \le x \le 10)$ і $(-2 \le y \le 3)$;

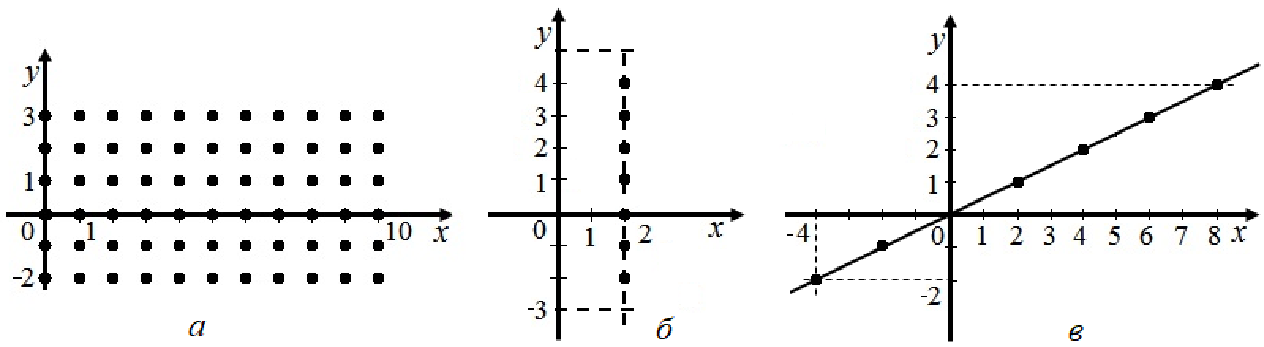
б) $(x=2)$ і $(-3<y<4)$;

в) $(x=2y)$ і $(-2 \le y \le 4)$;

г) $(x \le y)$, $(0 \le y \le 6)$ і $(x>0)$;

д) $(x+y<6)$, $(x \ge 0)$ і $(y \ge 0)$.

Розв'язання. Графіки відношень зображені відповідно на рис. 40.



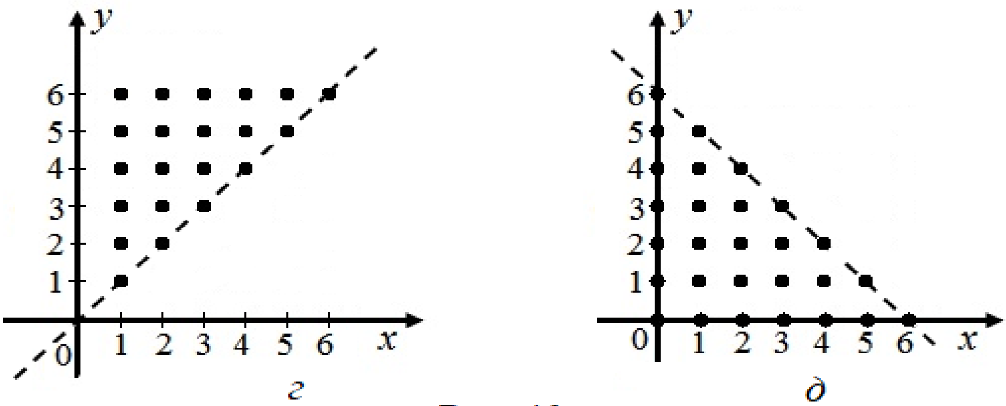


Рис. 40

4.4. Властивості бінарних відношень.

У математиці замість слів «всі», «для всіх», «будь-які» використовують знак $\forall$ – квантор загальності (перевернута перша буква англійського слова all – всі). Замість слів «існує» «хоч би один» – знак $\exists$ – квантор існування (перевернута перша буква англійського слова exists — існує).

Бінарне відношення φ, визначене на множині М, називають:

1. ***Зв'язним***, *якщо* $\forall\ a, b \in B$ і $a \neq b$ (*або* $a\varphi b$, *або* $b\varphi a$).

2. ***Рефлексивним***, *якщо* $\forall\ a \in M$ $(a\varphi a)$, *тобто кожен елемент перебуває у даному відношенні сам з собою.*

На графі рефлексивного відношення біля кожної вершини є стрілка, яка починається і закінчується в ній, – петля.

Наприклад, на множині натуральних чисел відношення «бути кратним» рефлексивне: будь-яке натуральне число кратне самому собі, тобто $a \vdots a$.

3. ***Антирефлексивним***, *якщо жоден елемент $a \in M$ не перебуває сам з собою в даному відношенні, тобто* $\forall\ a \in M$ $(a\overline{\varphi}a)$.

Наприклад, на множині прямих відношення «бути перпендикулярним» антирефлексивне: немає жодної прямої, яка була б перпендикулярна сама собі. На графі такого відношення немає жодної петлі.

4. ***Нерефлексивним*** *(арефлексивним), якщо деякі елементи множини М знаходяться між собою в. даному відношенні, а деякі – ні.*

Наприклад, відношення «Точка *А* симетрична точці *В* відносно прямої *l*» нерефлексивне: точки, які лежать на *l*, симетричні самі собі відносно *l*, а точки, які не лежать на *l*, не симетричні собі відносно цієї прямої.

5. ***Симетричним***, *якщо* $\forall\ a, b \in M$ і $(a\varphi b \Rightarrow b\varphi a)$. На графі будь-які дві вершини або не сполучені між собою, або сполучені двома стрілками.

Наприклад, відношення «бути паралельним» на множині прямих площини є симетричним: $\forall a,\ b \in a$ і $(a \parallel b \Rightarrow b \parallel a)$.

6. ***Антисиметричним***, *якщо* $\forall\ a, b \in B$ і $a \neq b$ $(a\varphi b \Rightarrow b\overline{\varphi}a)$. Кожні дві вершини графа або не сполучені жодною стрілкою, або сполучені тільки однією.

Наприклад, у множині Z «$a > b$» – антисиметричне відношення.

7. ***Несиметричним*** *(асиметричним), якщо воно не є ні симетричним, ні антисиметричним.*

На графі є пари елементів, сполучених двома стрілками, а решта пар – однією.

8. *Транзитивним*, *якщо* $\forall\, a, b, c \in M$, *має місце співвідношення:* $(a\varphi b$ *і* $b\varphi c) \Rightarrow a\varphi c$. Граф транзитивного відношення має таку властивість: якщо є стрілка від a до b, а також від b до c, то є стрілка і від a до c.

Наприклад, у множині Z транзитивним є такі відношення:

а) $a \vdots b$, б) $a < b$, в) $|a| = |b|$.

9. *Антитранзитивним*, *якщо мав місце спів відношення:* $\forall\, a, b, c \in M$ і : $(a\varphi b$ *і* $b\varphi c) \Rightarrow \overline{a\varphi c}$.

Наприклад, на множині чисел відношення «на 2 більше».

10. *Нетранзитивним* *(атранзитивним), якщо відношення не є ні транзитивним ні антитранзитивним*.

Наприклад, відношення «друг» на множині людей є нетранзитивним, тому що коли *A* – друг *B*, а *B* – друг *C*, то мають місце дві можливості: або *A* – друг *C*, або *A* не є другом *C*.

Приклади розв'язування задач

1. Які з поданих нижче відношень у множині Z рефлексивні; транзитивні; симетричні: а) $x < y$; б) $x \leq y$; в) x ділиться на y?

Розв'язання.

а) $x < y$;

1) $\overline{x < x}$ – антирефлексивне;

2) $x < y \Rightarrow \overline{y < x}$ – антисиметричне;

3) $(x < y$ і $y < z) \Rightarrow x < z$ – транзитивне;

б) $x \leq y$;

1) $x \leq x$ – рефлексивне, тому, що $x = x$ – істинна рівність;

2) $x \leq y \Rightarrow \overline{y < x}$ – несиметричне при $x = y \Rightarrow y = x$, при $x < y \Rightarrow \overline{y < x}$

3) $(x \leq y$ і $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ – транзитивне;

в) $x \vdots y$;

1) $x \vdots x$ – рефлексивне (при $x \neq 0$);

2) $x \vdots y \Rightarrow y \vdots x$ тільки при $x = y$ – несиметричне;

3) $(x \vdots y$ і $y \vdots z) \Rightarrow x \vdots z$ – транзитивне.

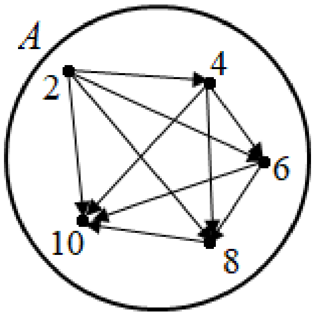


Рис. 41

2. Дано множину $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, елементи якої зв'язані відношенням $x < y$. Побудувати граф і графік цього відношення. Які воно має властивості?

Розв'язання. Побудуємо граф цього відношення (рис. 41). Графіком даного відношення є підмножина декартового квадрата A^2, що складається з пар (x, y), для яких $x < y$:

Г = {(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 6), (4, 8), (4, 10), (6, 8) (6, 10), (8, 10)}.

Це відношення:

1) антирефлексивне, тому що $\forall\, x \in A$ $(\overline{x < x})$;

2) антисиметричне, бо для $\forall\, x, y \in A$ $(x < y \Rightarrow \overline{y < x})$;

3) транзитивне, бо для $\forall\, x, y, z \in A$, якщо $x < y$ і $y < z$, то $x < z$.

Побудувати графік цього відношення на площині самостійно.

3. На множині дробових чисел задано відношення рівності: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Визначити властивості цього відношення.

Розв'язання. Це відношення має такі властивості:

1) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ (рефлексивність);

2) якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, бо $ad = bc$ (симетричність);

3) якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ і $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$, то $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ – (транзитивність).

4. Яку особливість мають граф і графік відношення φ між елементами множин *A* і *B*, якщо:

а) $(x\varphi y_1$ і $x\varphi y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$;

б) $(x_1\varphi y$ і $x_2\varphi y) \Rightarrow (x_1 = x_2)$;

в) $\forall\, x\, \exists\, (y)\, (x\varphi y)$;

г) $\exists\, y\, \forall\, (x)\, (x\varphi y)$;

д) $\forall\, y\, \exists\, (x)\, (x\varphi y)$

Розв'язання.

а) На графі з кожної точки множини *A* виходить не більше ніж одна стрілка. На кожній вертикалі лежить не більше ніж одна точка графіка.

б) На графі у кожну точку множини *B* направлено не більше ніж одну стрілку. На кожній горизонталі лежить не більше ніж одна точка графіка.

в) На графі з кожної точки множини *A* виходить принаймні одна стрілка. На кожній вертикалі принаймні одна точка графа.

г) У множині *B* є принаймні одна така точка, в яку напрямлені стрілки з усіх точок множини *A*. Є щонайменше одна така горизонталь, що всі її точки лежать на графіку.

д) У кожну точку множини *B* напрямлена принаймні одна стрілка. На кожній горизонталі є щонайменше одна точка графіка.

5. Розв'язати методичну задачу: як можна використати вірш-жарт В. Осєєвої при вивченні з першокласниками числа 5:

«Відомо мені:
У мами п'ять синів.
очну лічити я.
І зовсім їх не п'ять
Полічимо з вами:
Володя і Гнат,
Серьожа і Саня –
Найменший мій брат.

Чотири! Чотири!
А п'ятий брат де ж?
Лічили ми разом, дістали
і все те ж...
Лічу я спочатку, лічу я дарма:
П'ятого братика знову нема...
Лічу я на пальцях
Вперед і назад,
Скажіть же, будь-ласка,
Де п'ятий мій брат?»

Задача. В сім'ї п'ятеро дітей і всі хлопчики. Визначити властивості відношення «бути братом» на множині дітей цієї сім'ї.

Відповідь. Вираз «сам собі брат» не має смислу; про це хлопчик не подумав. Всі п'ять маминих синів між собою брати. Таке відношення симетричне, транзитивне, але антирефлексивне (рис. 42).

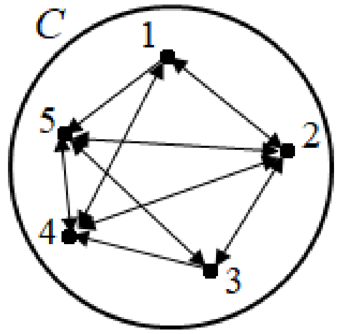


Рис. 42

4.5. Відношення еквівалентності і відношення порядку.

Відношенням еквівалентності *називається будь-яке рефлексивне, симетричне і транзитивне відношення.*

Розглянемо приклади.

1. Відношення «$a = b$» на множині цілих чисел має такі властивості:
1)$\forall\ a \in Z\ a = a$ (рефлексивність);
2)($\forall\ a, b \in Z$), якщо $a = b$, то $b = a$ (симетричність);
3)($\forall\ a, b, c \in Z$), якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$ (транзитивність). Отже, це відношення є відношенням еквівалентності.

З кожним відношенням еквівалентності пов'язане розбиття множини на підмножини, які не перетинаються, тобто класифікація. Це є висновком з теореми:

Для того щоб відношення φ дозволяло розбити множину X на класи, необхідно і достатньо, щоб воно було відношенням еквівалентності.

2. Відношення «мати той самий початок» на множині променів площини є відношенням еквівалентності. Сформулюйте для цього відношення властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності.

Будь-яке антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне відношення на множині M називають відношенням порядку, або відношенням строгого порядку.

Відношення на множині *M* називається **відношенням нестрогого порядку**, якщо воно рефлексивне, транзитивне і антисиметричне.

Якщо φ – відношення порядку на множині *M*, то на його графі будь-який ланцюг з двох ребер має замикаюче ребро, не має подвійних ребер, кожні дві різні вершини з'єднані ребром і немає жодної петлі.

3. Показати, що відношення «менше» на множині $\{1, 4, 6, 8, 9\}$ є відношенням порядку (строгого).

Розв'язання. Розглянемо властивості цього відношення.

1) $(x < y \text{ і } y < z) \Rightarrow x < z$.

$(1 < 4 \text{ і } 4 < 6) \Rightarrow 1 < 6$;

$(1 < 6 \text{ і } 6 < 8) \Rightarrow 1 < 8$;

$(4 < 6 \text{ і } 6 < 9) \Rightarrow 4 < 9$; ... – відношення транзитивне.

2) $1 < 4 \Rightarrow \overline{4 < 1}$; $4 < 6 \Rightarrow \overline{6 < 4}$; ... – відношення антисиметричне.

3) $\overline{1 < 1} \Rightarrow \overline{4 < 4}$; ... – відношення антирефлексивне.

Отже, відношення «менше» на даній множині є відношенням строгого порядку. Граф цього відношення (рис. 43) не має петель. Будь-яку пару чисел (x, y), таку що $x < y$, з'єднує тільки одна стрілка, яка іде від x до y. Графіком відношення є множина $\Gamma = \{(1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 9), (4, 6), (4, 8), (4, 9), (6, 9), (8, 9)\}$.

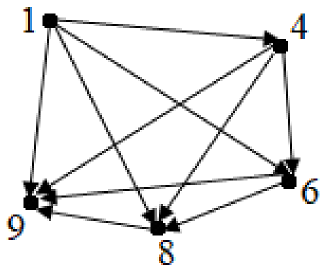


Рис. 43

4. Показати, що відношення «бути дільником» на множині $\{2, 4, 8, 16\}$ є відношенням нестрогого порядку.

Розв'язання.

1) 2 – дільник 2; 4 – дільник 4 і т. д. (рефлексивність);

2) якщо 2 дільник 4, то 4 не є дільник 2 і т. д. (антисиметричність);

3) якщо 2 – дільник 4, а 4 – дільник 8, то 2 – дільник 8 і т. д. (транзитивність).

Зв'язне відношення порядку φ на множині X називається ***відношенням лінійного порядку****.*

Множина X, на якій задане відношення порядку (строгого або нестрогого), називається ***частково упорядкованою множиною****, або множиною, упорядкованою відношенням.*

Якщо відношення φ в множині X є відношенням лінійного порядку, то множину X називають лінійно упорядкованою.

Наприклад, якщо на множині $X = \{1, 5, 4, 3, 2\}$ задати відношення f «число x – дільник числа y», то множина буде частково упорядкованою. Якщо на цій множині задані підношення лінійного порядку φ «$x < y$», то множина X буде лінійно упорядкованою, бо відношення f на множині X не є зв'язним: якщо взяти, наприклад, два різні елементи цієї множини 5 і 3, то ні 5 не є дільником числа 3, ні 3 не є дільником числа 5.

Відношення φ на даній множині зв'язне: які б не взяли два різні числа із X, або одне із них менше другого, або друге менше першого. /

Приклади розв'язування задач

1. Нехай M множина учнів якої-небудь школи, p – бінарне відношення «навчатися в одному класі». Показати, що це відношення є відношенням еквівалентності.

Розв'язання. Перевіримо властивості цього відношення:

1) Рефлексивність: apa, тобто учень a вчиться сам з собою в одному класі.

2) Симетричність: $apb \Rightarrow bpa$, тобто якщо учень a вчиться в одному класі з учнем b, то і, навпаки, учень b навчається в одному класі з учнем a.

3) Виконується і властивість транзитивності, тобто $(apb$ і $bpc) \Rightarrow apc$.

Отже, бінарне відношення p є відношенням еквівалентності.

2. Є 25 куль різного кольору. Ці кулі розклали за кольорами у різні ящики. Дістали деяку систему підмножин. Чи є ця система розбиттям множини куль? За яким відношенням зроблено розбиття? Виразити це відношення словами.

Розв'язання. На даній множині куль M задане відношення φ «бути одного кольору». Це відношення є відношенням еквівалентності. Отже, система підмножин є розбиттям множини куль на класи еквівалентності за відношенням φ (множина різних ящиків з кулями різних кольорів, але одного кольору в кожному ящику).

3. Дано відношення φ «вирази x і y мають однакові числові значення» на множині числових виразів. Чи є відношення φ відношенням еквівалентності?

Розв'язання. Це відношення є відношенням еквівалентності тому, що воно: 1) рефлексивне: значення виразу x збігається із значенням виразу x; 2) симетричне: якщо значення виразу x збігається із значенням виразу y, то і значення виразу y збігається із значенням виразу x; 3) транзитивне: якщо значення виразу x збігається із значенням виразу y, а значення виразу y збігається із значенням z, то значення виразу x збігається із значенням виразу z.

Відношення φ розбиває множину всіх числових виразів на класи, у кожному з яких знаходяться вирази з однаковими числовими значеннями.

4. Розглянемо три відношення, які задано графами (рис. 44). Які з цих відношень є відношеннями порядку?

Розв'язання. Відношення φ_1 і φ_3 є відношеннями порядку, тому що ці відношення антисиметричні (стрілки тільки в одному напрямку), транзитивні. Відношення φ_2 не є відношенням порядку, тому що не виконується властивість транзитивності.

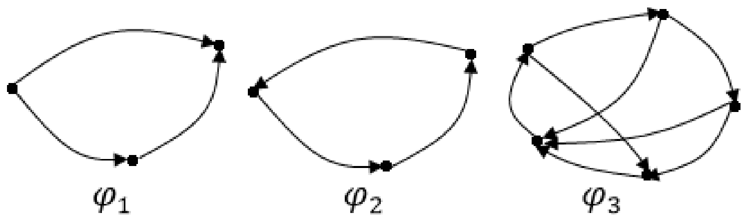


Рис. 44

Вправи

1. $M = \{-5, 0, 2, 6, 7\}$. Побудувати на множині M граф відношень:

а) «бути більше»,

б) «бути менше»,

в) «бути більше або дорівнювати»,

г) «бути менше або дорівнювати».

2. На множині $X = \{3, 4, 5, 8\}$ задано деяке відношення, графіком якого є: $G = \{(3,3), (4,4), (4,3), (5,5), (5,3), (8,5), (8,4), (8,3), (8,8)\}$. Побудувати граф цього відношення.

3. Дана множина $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Побудувати графи відношень φ_1 «x ділить y без остачі» і φ_2 «x ділиться на y без остачі». Порівняти їх.

4. Побудувати граф відношення φ: «$x \vdots y$», де $x \in X$, $y \in Y$ і $X = \{-6, -4, -2, 0, 4\}$. Записати графік G відношення $x\varphi y$. Пояснити, чому $(0, -2) \in G$, $(4, -4) \in G$, $(-4, 4) \in G$.

5. Які геометричні фігури зображають відношення:

а) $\varphi: \{(x, y) | (x, y) \in R^2,\ x = y\}$;

б) $\varphi: \{(x, y) | (x, y) \in R^2,\ 0 \leq x \leq 4\}$;

в) $\varphi: \{(x, y) | (x, y) \in R^2,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$?

6. Записати кілька пар, які є розв'язками рівняння $3x - 7y = 17$.

7. В множині $M = \{2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42\}$ задано відношення «$a \vdots b$». Побудувати табличне задання цього відношення.

8. Дана множина $A = \{2, 4, 6, 3, 5, -3, 0, -8, -6\}$. Вказати підмножини декартового квадрата A^2, які відповідають відношенням:

а) «a менше b»;

б) «число a протилежне числу b»,

в) «a ділиться на b»;

г) «число a в 2 рази більше ніж b»;

д) «число a на 2 менше, ніж b».

9. Побудувати графік відношення $x + 4 = y$ на множині $A = \{-3, -2, -1, 0, 2, 3\}$. Для яких x визначено це відношення? Чи може одному значенню y відповідати декілька значень x? Для яких y визначено це відношення?

10. Відношення $y = x - 3$ задано на множині X. Побудувати графік цього відношення, якщо:

а) $X = \{x | x \in Z,\ -3 \leq x \leq 4\}$;

б) $X = \{x | x \in R,\ -3 \leq x \leq 4\}$.

11. Знайти область визначення і множину значень кожного із відношень та побудувати їхні графіки:

а) $\{(x, y) | (x, y) \in D^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$;

б) $\{(x, y) | (x, y) \in D^2,\ x^2 = y\}$;

в) $\{(x, y) | (x, y) \in D^2,\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x + y = 1\}$.

12. Між елементами множини $B = \{-4, 2, 0, 2, 4, 6\}$ встановлено відношення f: число x кратне числу y, $x \in B$, $y \in B$. Побудуйте графік цього відношення f йому оберненого f^{-1} і протилежного $\overline{f}$.

13. Чи є наведені нижче відношення відношеннями еквівалентності і чому?

1) $f_1 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 4), (4, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)\}$ на множині $A = \{2, 3, 4\}$;

2) $f_2 = \{(a; a), (a; b)\ (b; b), (b; a), (c; c), (c; b)\}$ на множині $M = \{a, b, c\}$.

3) $f_3 = \{(a, b) \mid (a - b) \in Q\}$ на множині дійсних чисел.

14. Які з даних відношень на множині прямих є відношеннями еквівалентності:

1) f_1: «Пряма a перпендикулярна прямій b»;

2) f_2: «Пряма a паралельна прямій b»;

3) f_3: «Пряма a перетинає пряму b»?

15. На множині відрізків дані відношення:

1) f_1: «Відрізок x довший відрізка »

2) f_2: «Відрізок x довший відрізка y на 2 см»

3) f_3: «Відрізок x коротший відрізка y на 5 см».

Які з цих відношень є відношеннями строгого порядку?

16. На множині X = {2, 5, 11, 8, 14} задані відношення: f_1: $x > y$ і f_2: x більше y на 3. Назвіть властивості цих відношень та побудуйте їх графи.

17. На множині X = {2, 4, 6, 8, 10} задане відношення f: x – дільник числа y. Доведіть, що це відношення нестрогого порядку, і побудуйте його граф.

18. З тролейбуса вийшли 5 студентів: Вася, Галя, Толя, Олена і Маша. Толя вийшов перед Машею. Олена - перед Васею, але після Маші, Галя перед Толею. Хто з них вийшов першим, а хто останнім? Хто вийшов слідом за Машею, з хто перед Машею?

19. Чи має відношення f на множині {3, 4, 5, 6, 7} властивість рефлексивності, якщо $R(f)$ = {(3, 3), (5, 4), (4, 5), (4, 4), (6.6), (5,7)?

20. На множині відрізків дані відношення:

1. f_1: «Відрізок x довший за відрізок y».
2. f_2 : «Відрізок x довший відрізка y на 3 см».
3. f_3 : «Відрізок x коротший за відрізок y».

Які з цих відношень є відношеннями строгого порядку?

ТЕМА 5. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

5.1. Зміст комбінаторики.

Область математики, яка вивчає комбінаторні задачі, називається **комбінаторикою**. В комбінаториці вивчають скінченні множини, підмножини, відображення, кортежі, складені з елементів скінченних множин. Тому комбінаторику розглядають як частину теорії скінченних множин. Більшість комбінаторних задач можна розв’язувати, користуючись *правилами суми і добутку.*

В комбінаториці ***правилом суми*** називають правило знаходження числа елементів об’єднанням множин, а ***правилом добутку*** – правило знаходження числа елементів їхнього декартового добутку.

Дано скінченні множини A і B, причому $A \cap B = \varnothing$.

Позначимо кількість елементів множин A і B через $n(A)$ і $n(B)$, а кількість елементів їхнього об’єднання – $n(A \cup B)$. Оскільки множини A і B не мають спільних елементів, то (див. рис. 9, *б*):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Це *правило суми.* Його можна узагальнити на випадок m множин, які попарно не перетинаються:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \cdots + n(A_m),$$

якщо $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всіх $i \neq j$.

Якщо множини перетинаються, то (див. рис. 9, *а*):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Звідси:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B).$$

Для трьох множин (рис. 45):

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap C) -$$
$$-n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Для m множин:

$$n(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m) = \sum_{i=1}^{m} n(X_i) - \sum_{1 \le i < j \le m} n(X_i \cap X_j) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < k \le m} n(X_i \cap X_j \cap X_k) - \cdots = (-1)^{m-1} n(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_m).$$

Приклад.

1. Студенту потрібно вибрати одну тему курсової роботи. Залишилися ще не зайнятими 5 тем з психології, 4 – з педагогіки і 6 з методики математики. Скільки студент має можливостей вибрати тему курсової роботи?

Позначимо через A_1 множину тем курсових робіт з психології, A_2 – з педагогіки, A_3 – з методики математики і використаємо правило суми. Дістанемо:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 5 + 4 + 6 = 1,$$

тобто тему курсової роботи можна вибрати 15-ма способами.

2. На першому курсі педагогічного факультету 95 студентів захоплюються спортом. З них 50 займаються волейболом, 48 – баскетболом, 36 – тенісом, волейболом і баскетболом – 21, волейболом і тенісом – 15, баскетболом і тенісом – 18. Скільки студентів займаються іншими видами спорту, якщо 5 студентів займаються баскетболом, волейболом і тенісом?

Розв'язання.

1-й спосіб (аналітичний). Позначимо через *В* – множину студентів, які займаються волейболом, *Б* – баскетболом і *Т* – тенісом. Ці три множини за умовою перетинаються. За правилом суми визначимо, скільки студентів займаються хоча б одним з цих трьох видів спорту:

$$n(\text{В} \cup \text{Б} \cup \text{Т}) = n(\text{В}) + n(\text{Б}) + n(\text{Т}) - n(\text{В} \cap \text{Б}) - n(\text{В} \cap \text{Т}) - n(\text{Б} \cap \text{Т}) +$$
$$+ n(\text{В} \cap \text{Б} \cap \text{Т}) = 50 + 48 + 36 - 21 - 15 - 18 + 5 = 85 \text{ (студентів)}.$$

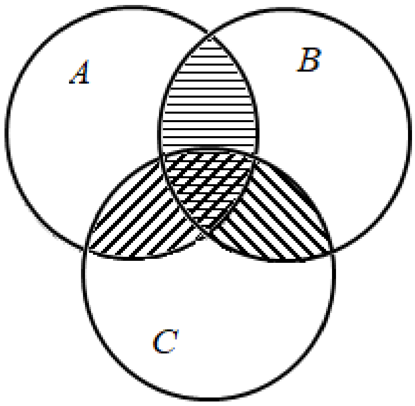


Рис. 45

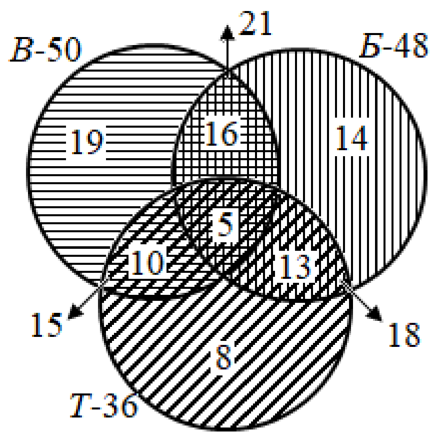


Рис.46

Тоді іншими видами спорту займаються: 95 – 85 = 10 (студентів).

2-й спосіб. Скористаємося діаграмами Ейлера. Обґрунтуйте, що означає кожне число на рис. 46, та запишіть різні можливі розв'язки.

Правило добутку: число елементів декартового добутку скінченних множин дорівнює добутку чисел елементів у кожній з даних множин. Іншими словами: якщо елемент a_1 можна вибрати n_1 способами, а після його вибору елемент a_2 можна вибрати n_2 способами і т. д., а елемент a_k після вибору всіх попередніх – n_k способами, то тоді кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можна вибрати $n_1, n_2, \ldots, n_k$ способами.

Доведемо це правило.

Розглянемо довільний кортеж $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ із прямого добутку $M_1 \times M_2 \times \times \ldots \times M_k$. Він дає нам один спосіб вибору кортежа $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то цих способів стільки, скільки елементів містить множина $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$, тобто $n(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k) = n(M_1) \times n(M_2) \times \ldots \times n(M_k)$.

Приклад.

1. Скільки всього чотирицифрових чисел у десятковій системі числення?

Розв'язання. Будь-яке чотирицифрове число можна розглядати як кортеж довжини 4 вигляду (a_1, a_2, a_3, a_4), де

$a_1 \in A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $a_2 \in A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $a_3 \in A_2$, і $a_4 \in A_2$.

Тоді множина всіх чотирицифрових чисел є декартів добуток $A_1 \times A_2 \times A_2 \times A_2$. Число елементів цієї множини
$n(A_1 \times A_2 \times A_2 \times A_2) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_2) \cdot n(A_2) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$

З учнями 3 класу цю задачу можна розв'язати безпосереднім підрахунком: найбільше чотирицифрове число – 9999, найбільше трицифрове – 999. Якщо записати натуральні числа по порядку до 9999, то всього чотирицифрових чисел буде: 9999 – 999 = 9000.

2. Із 3-х задач з алгебри, 3-х з геометрії, 2-х тригонометрії потрібно скласти текст контрольної роботи, до якого б входила одна задача з алгебри, одна з геометрії і одна з тригонометрії. Скількома способами це можна зробити?

Очевидно, що всі можливі варіанти тексту контрольної роботи при заданих умовах є елементами прямого добутку $M_1 \times M_2 \times M_3$, де M_1 – множина задач з алгебри, M_2 – з геометрії, M_3 – з тригонометрії. Тоді за правилом добутку матимемо: $n(M_1 \times M_2 \times M_3) = n(M_1) \times n(M_2) \times n(M_3) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Отже, текст контрольної роботи можна вибрати 18-ма способами.

5.2. Розміщення без повторень.

Нехай дана множина M містить m елементів. Розміщеннями з m елементів по n називаються підмножини даної множини M, які містять по n упорядкованих елементів і які відрізняються між собою або елементами, або порядком їх розміщення, або і тим і другим.

У розміщеннях, які вводяться за цим означенням, не має однакових елементів, бо множини з однаковими елементами не розглядаються.

Приклад.

1. Розміщення з двох елементів a і b по два може бути тільки 2: (a, b), (b, a). Вони відрізняються лише порядком.

2. Розміщення з трьох елементів a, b, c по два буде 6: (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).

Розміщення (a, b) і (a, c) відрізняються елементами, а, наприклад, розміщення (a, c) і (c, a) – порядком.

Кількість розміщень з m елементів по n позначають через A_m^n. З означення виходить, що $m \geq n$. Розглянемо, як можна обчислити A_m^n.

Теорема. *Число розміщень з m елементів по n дорівнює m*

$$(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))$$

Доведення. Очевидно, що кількість розміщень з m елементів по одному буде m, тобто стільки, скільки елементів у множині M. Щоб мати розміщення з m елементів по два, можна зробити так: зробимо спочатку розміщення з m елементів по 1, тобто випишемо всі елементи $a_1, a_2, \dots, a_m$ множини M. Потім до кожного з цих елементів допишемо решту (відмінних від нього) $m-1$ елементів множини M:

$$\begin{array}{l}(a_1, a_2), (a_1, a_2), (a_1, a_4), \dots, (a_1, a_m),\\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_2, a_4), \dots, (a_2, a_m),\\ (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_3, a_m),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (a_m, a_1), (a_m, a_2), (a_m, a_3), \dots, (a_m, a_{m-1}).\end{array}$$

Таким способом з кожного елемента a_i множини M можна утворити $m-1$ розміщень по два елементи, а тому з усіх m елементів можна утворити $m(m-1)$ розміщень по два елементи:

$$A_m^2 = m(m-1).$$

Усі розміщення в рядах відрізняються другими елементами, а всі розміщення в стовпцях – першими. Отже, однакових елементів у рядках або стовпцях бути не може. Однакових елементів у різних рядках і стовпцях також бути не може, бо елементи в різних рядках відрізняються першими елементами. Отже, всі утворені $m(m-1)$розміщень різні.

Щоб дістати тепер усі розміщення з m елементів по три, треба до кожного з $m(m-1)$ розміщень по два елементи дописати по одному решту $m-2$ елементів. Дістанемо $m(m-1)(m-2)$ розміщень по три елементи:

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

Аналогічно переконуємось, що всі A_m^3 утворенні розміщення будуть різними. Отже, маємо гіпотезу

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots\big(m-(n-1)\big).$$

Для $n = 1$, $n = 2$ істинність гіпотези перевірено. Припустимо, що вона справджується для $n = k \leq m-1$, тобто

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)\dots\big(m-(k-1)\big).$$

Покажемо, що з цього припущення випливає істинність введеної гіпотези для $n = k + 1$. Справді, з кожного розміщення по k елементів дістаномо $m - k$ розміщень по $k + 1$ елементів, тобто всього розміщень по $k + 1$ елементів буде $A_m^k = (m - k)$, звідки

$$A_m^{k+1} = m(m-1)(m-2)\dots\big(m-(k-1)\big)(m-k).$$

Всі утворені розміщення різні, бо за припущенням всі A_m^k розміщень по k елементів різні. Отже, гіпотеза істинна для $n = k + 1$. Тоді за принципом математичної індукції гіпотеза істинна для будь-якого $n \leq m$.

Приклад.

1. Скільки парних трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 5, 7, якщо кожна цифра може бути використана тільки один раз у кожному числі?

Розв'язання. Всього трицифрових чисел у цьому випадку можна утворити $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Кількість чисел, яка закінчуватиметься цифрами 1, 2, 5, 7, однакова і дорівнюватиме $24 : 4 = 6$ (числам). Отже, цифрою 2 закінчуватиметься 6 чисел, це й є усі шукані парні числа.

Можна міркувати й так: якщо відкинути цифру 2 у всіх знайдених парних трицифрових числах, то двоцифрових чисел буде стільки, скільки можна їх дістати з цифр 1, 5, 7, тобто $3 \cdot 2 = 6$.

2. Записати розміщення із трьох елементів 1, 2, 3 (без повторення елементів).

Розв'язання. Це будуть кортежі довжиною 2: (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2). їх буде 6 (добуток 3 · 2). Це число можна знайти за правилом добутку: перший компонент кортежа можна вибрати трьома способами, тобто взяти будь-який із трьох даних, а після того, як перший вибрано, другий можна вибрати двома способами, отже кортежів довжиною 2 із трьох елементів буде 3 · 2 = 6. А можна користуватися формулою числа розміщень з m елементів по n (без повторення елементів):

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1)).$$

Число розміщень з m елементів по k без повторення елементів дорівнює добутку k послідовних натуральних чисел, з яких найбільше є m.

Приклади.

1. Скільки трицифрових чисел можна записати цифрами, взятими з даних 6 цифр, якщо у кожному числі жодна цифра не повторюється?

Розв'язання.

1-й спосіб. Маємо розміщення із 6 елементів по 3 без повторення елементів: $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

2-й спосіб. За правилом добутку. Першу цифру трицифрового числа можна вибрати будь-яку з даних шести, другу – будь-яку з п'яти, що залишилися, і третю – будь-яку з чотирьох, що залишилися, тоді за правилом добутку всього трицифрових чисел буде $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

2. У групі 25 студентів. Скількома способами можна вибрати президію зборів, що складається з голови, секретаря і члена президії?

Розв'язання запишіть самостійно аналогічно до попередньої задачі (обґрунтуйте двома способами).

Відповідь. 13 800.

3. Скільки чотирицифрових чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо у кожному числі кожна цифра може бути використана тільки один раз?

Розв'язання.

1-й спосіб. Всього чотирицифрових наборів із даних шести цифр можна записати $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. З цієї кількості треба відкинути записи, що починаються кулем: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Отже, 360 – 60 = 300.

2-й спосіб. За правилом добутку шукане число буде: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

5.3. Розміщення з повтореннями.

В розміщеннях, які водяться в попередньому пункті, як уже зазначалося, немає однакових елементів. Оскільки розміщення є упорядкована сукупність об'єктів, кортеж, то в них можуть повторюватися однакові елементи. Такими є, наприклад, кортежі цифр в зображеннях чисел, кортежі *нот* в зображеннях музикальних *фраз* і т. д. Так приходимо до поняття розміщення з повторенням.

Розміщенням з повтореннями *з т елементів по п* (*де* $m, n \in N$) *називається будь-який кортеж довжини* n, *що складається з елементів множини* $M = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ *в якому хоча б один елемент повторюється.*

Розміщення з повтореннями і без повторень тісно пов'язані з поняттям прямого добутку множин. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Нехай $M = (a, b)$. Знайдемо прямий квадрат M^2, прямий.куб M^3 цієї множини. Дістанемо:

$$M^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\},$$

$$M^3 = \{(a, a, a), (a, b, a), (b, a, a), (b, b, a), (a, a, b), (b, a, b)(b, b, b)\}.$$

Бачимо, що всі можливі розміщення з повтореннями з двох елементів множини *М* по два дістаємо з M^2, а всі можливі розміщення з цих же елементів по три – з M^3. Розміщення без повторень матимемо з M^2 вилученням всіх розміщень з повтореннями. Розміщень з повтореннями з даної двохелементної множини *М* можна робити скільки завгодно і якої завгодно довжини, потрібно тільки взяти відповідну кількість прямих співмножників.

Неважко впевнитися, що все зазначене вище щодо множини $M = (a, b)$ стосується будь-якої скінченної множини.

Позначивши через $\overline{A_m^n}$ число всіх різноманітних розміщень з елементів множини $M = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ по n, дістанемо:

$$\overline{A_m^n} = k(M^n) = (k(M))^n = m^n,$$

де $k(M)$ позначає кількість елементів множини *М.*

Приклади

1. Скільки трицифрових чисел можна записати дев'ятьма цифрами 1, 2, 3, 4, …, 8, 9, якщо цифри в записі числа можуть повторюватись?

Розв'язання.

Очевидно, що шукане число дорівнює числу всіх розміщень з дев'яти елементів по 3, тобто $9^3 = 729$.

2. З множини $M = \{0, 1\}$ можна скласти 2^n розміщень (кортежів) довжини *n*. Звідси можна дістати ще одне доведення того факту, що *n*-елементна множина *A* містить 2^n підмножини. Справді, перенумеруємо всі елементи множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ і побудуємо для кожної її підмножини B розміщення довжини *n* з двох елементів 0 і 1 за таким правилом: якщо $a_k \in B$, то на k-му місці у відповідному розміщенні пишемо 1, якщо $\overline{a_k \in B}$, то – 0. Тоді між множиною $P(M)$ і множиною всіх розміщень довжини *n* з 0 і 1 існує взаємо-однозначне відображення, звідки й випливає доведення зазначеного твердження.

5.4. Перестановки без повторень.

Будь-який кортеж довжини m над множиною $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, *у якого всі компоненти різні, називають перестановкою елементів множини M.*

Таким чином, перестановка з елементів множини *M* – це розміщення з m елементів по m цієї ж множини. Кількість перестановок з m елементів позначають символом P_m.

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\dots\big(m-(m-1)\big) =$$
$$= m(m-1)(m-2)\dots 2 \cdot 1 = m!,$$

або $P_m = m!$ (m – факторіал).

Приклади.

1. Скількома способами можна стати в стрій команді, з 6 чоловік?

Розв'язання.

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 72 \text{ (способами).}$$

2. Між усіма перестановками цифр числа 23164 скільки таких, які починаються числом 23?

Розв'язання.

Всі перестановки цифр числа 23164 мають однакову кількість таких, які починаються числами 23, 32, 16, 61, 46, 64 і т. д. Таких чисел можна утворити $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Всього перестановок цифр числа 23164 буде $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, а перестановок, які починаються числом 23, буде $\frac{120}{20} = 6$. Аналогічно по шість перестановок починатимуться числами 46, 64, 31, 13 і, т. д.

Приклад можна розв'язати простіше: через те, що перші дві цифри залишаються на місці, то всього чисел, які задовольняють умову задачі, буде: $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

3. Скільки чотирицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 1, 2, 3, 4, якщо кожна цифра у записі числа зустрічається тільки один раз?

Відповідь: $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

5.5. Перестановки з повтореннями.

Нехай $M = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ *– будь-який кортеж над множиною* M*, в якому елемент* a_1 *повторюється* m_1 *разів, елемент* $a_2 - m_2$ *рази і т. д., елемент* $a_k - m_k$ *разів, називається перестановкою довжини* $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ *з повтореннями з елементів* $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Отже, перестановка з повтореннями з елементів множини $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ є кортеж довжини m, але деякі букви з множини M в ньому повторюються і можуть бути на різних місцях перестановки. Над множиною M можна задати різні класи перестановок з повтореннями, кожний такий клас визначається набором чисел $m_1, m_2, \dots, m_k$, таких що $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$ і відповідних елементів $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Символом $P_{m_1,m_2,\dots,m_k}$ позначатимемо число всіх перестановок, в яких елемент a_1 повторюється m_1 разів, $a_2 - m_2$ рази, елемент $a_k - m_k$ разів.

Теорема. *Число* $P_{m_1,m_2,\dots,m_k}$ *всіх різних перестановок довжини* $m = m_1 + +m_2 + \dots + m_k$ *з повтореннями з елементів* $a_1, a_2, \dots, a_k$*, які повторюються відповідно* $m_1, m_2, \dots, m_k$ *раз, дорівнює* $\frac{(m_1+m_2+\dots+m_k)!}{m_1!\,m_2!\dots m_k!}$.

Доведення. Кожна перестановка з повтореннями містить $m = m_1 + m_2 + + \dots + m_k$ елементів. Коли б всі ці елементи були різними, то всього перестановок (різних) було б $m!$. Але оскільки не всі елементи різні, то ряд перестановок збігатимуться.

Для підрахунку числа різних перестановок розглянемо, наприклад, таку перестановку:

$$(\underbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}_{m_1 \text{ раз}}, \underbrace{a_2, a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ раз}}, \dots, \underbrace{a_k, a_k, \dots, a_k}_{m_k \text{ раз}}). \qquad (1)$$

З елементів $a_1, a_1, \dots, a_1$, коли б вони були різними, можна утворити $m_1!$ перестановок довжини m_1. Проте вони не змінять перестановки (1). Аналогічно $m_2!$ переставлянь елементів $a_2, a_2, \dots, a_2$ і $m_k!$ переставлянь елементів $a_k, a_k, \dots, a_k$ також не змінять підстановки (1). За правилом добутку можна здійснити $m_1!\, m_2! \dots m_k!$ таких переставлянь елементів перестановки (1), які її не змінять. Це ж саме можна сказати і про будь-яку іншу перестановку з повтореннями (з того класу K перестановок над множиною M, які ми розглядаємо). Тому множина всіх перестановок з повтореннями розбивається на підмножини, кожна з яких складається з $m_1!\, m_2! \dots m_k!$ однакових перестановок. Число таких підмножин, очевидно, дорівнює

$$\frac{m!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!}, \text{ а отже, } P_{m_1,m_2,\dots,m_k} = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!}.$$

Приклад. Скільки семицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 5, 6, 9 при умові, що цифра 5 повторюється в кожному числі 3 рази, а цифри 6 і 9 по 2 рази?

Кожне з так утворених чисел є перестановка довжини 7 над множиною {2, 4, 6}, де $m_1 = 3,\ m_2 = 2,\ m_3 = 2$. Звідси шукане число

$$P_{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 210.$$

5.6. Комбінації.

Нехай $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ – довільна непорожня множина. Будь-яка підмножина $A \subset M$, яка містить n елементів ($n = 0, 1, 2, \ldots, m$), називається комбінацією з m елементів по n.

З означення випливає, що комбінація – це множина і що дві різні комбінації з m елементів по k відрізняються принаймні одним елементом. Множину P_m всіх підмножин даної множини M можна розбити на класи $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_m$ рівнопотужних множин. Кожний такий клас згідно з означенням є клас рівночисельних комбінацій. Завдання полягає в тому, щоб знайти спосіб обчислювати кількість елементів в кожному класі. Кількість комбінацій з m елементів по n позначають через C_m^n.

Комбінаціями з m елементів по k без повторення елементів називаються такі розміщення з m елементів по k, які відрізняються принаймні одним елементом.

Приклад. Утворити комбінації з трьох елементів 1, 2, 3 по 2. Який зв'язок між числом комбінацій з m елементів по k, числом розміщень з m елементів по k і числом перестановок з k елементів можна помітити, проаналізувавши дане означення комбінацій?

Розв'язання. На початку даного заняття з елементів 1, 2, 3 ми утворили можливі розміщення з трьох елементів по 2. Їх було 6. В цьому прикладі треба взяти лише ті з них, які відрізняються між собою принаймні одним елементом. Їх буде 3: (1, 2), (1, 3), (2, 3), тобто у 2 рази менше, ніж відповідне число розміщень, бо з усіх розміщень викинули ті, які відрізняються перестановкою елементів: (2, 1), (3, 1), (3, 2). Отже: $C_3^2 = A_3^2 : P_2$. В загальному вигляді формулу числа комбінацій без повторення елементів запишемо так:

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k}, \text{ або } C_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Приклад. Скількома способами учень може вибрати 4 кольорові олівці із 7 різного кольору?

Розв'язання.

$$C_7^4 = \frac{A_7^4}{P_4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35 \text{ (способами).}$$

Теорема. *Число всіх комбінацій з m елементів по n дорівнює числу всіх розміщень з m елементів по n, поділеному на число всіх перестановок із n елементів, тобто*

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Доведення. Розглянемо розміщення A_1 з множини всіх розміщень з m по n. З нього можна утворити P_n інших розміщень, які складаються з тих самих елементів, що й розміщення A_1. Якщо тепер розміщення A_2 відрізняється від A_1 принаймні одним елементом, то з нього також утворимо P_n розміщень, які складаються з тих самих елементів, що й розміщення A_2. Продовжуючи цей процес далі, розділимо множину всіх розміщень з m елементів по n на підмножини з такими властивостями: 1) усі розміщення однієї підмножини складаються з однакових елементів; 2) розміщення, взяті з будь-яких двох різних підмножин, відрізняються принаймні одним елементом.

За означенням усі розміщення, взяті з однієї підмножини, утворюють одну комбінацію. Звідси виходить, що число C_m^n обчислюється таким способом:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Цю формулу можна записати так. Помножимо чисельник і знаменник дробу на добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-n)$. Дістанемо:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\big(m-(n-1)\big) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \ldots \cdot (m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-n)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-n)\ldots(m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m-n)} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}}.$$

Основні властивості числа комбінацій.

1. Крім того, приймаємо за означенням $C_m^0 = 1,\ C_0^0 = 1$.

2. $C_m^n = C_m^{m-n}$. Справді $C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_{m-(m-n)}} = C_m^{m-n}$.

3. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$

Перетворюючи ліву частину, матимемо:

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!\,(m-n-1)!} =$$

$$= \frac{m!\,(n+1) + m!\,(m-n)}{(m-n)!\,(n+1)!} = \frac{m!\,(n+1+m-n)}{(m-n)!\,(n+1)!} =$$

$$= \frac{(m+1)!}{(m-n)!\,(n+1)!} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Приклад.

1. Баскетбольна команда має 8 гравців. Скількома способами тренер може поставити на гру 5 осіб?

Розв'язання.

$$C_8^5 = C_8^3 = \frac{A_8^3}{P_3} = 56.$$

2. Учень хоче розмалювати карту чотирма фабрами. У нього є 6 фарб. Скількома способами він може, вибрати фарби для розмалювання карти?

Розв'язання.

$$C_6^4 = C_6^2 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15.$$

3. З 8 чоловік треба утворити три комісії в складі 3, 2 і 3 чоловік у і кожній, причому кожний чоловік може брати участь в одній і тільки одній комісії. Скількома різними способами можна утворити зазначені комісії?

Розв'язання. З 8 чоловік можна вибрати

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

способами першу комісію в складі 3 чоловік. Після того як вибрано першу комісію, можна $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ способами вибрати другу комісію в складі двох чоловік з 6. Нарешті, третю комісію в складі трьох чоловік можна, вибрати $C_3^3 = 1$ способом.

Отже, всі три комісії можна вибрати $C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 = 56 \cdot 10 \cdot 1 = 560$ способами.

Оскільки сума всіх підмножин даної множини $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ дорівнює 2^m, то

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} = 2^n.$$

5.7. Трикутник Паскаля.

Використовуючи співвідношення $C_{m+1}^{n+1} = C_m^{n+1} + C_m^n$, можемо процес переходу від чисел $C_m^0, C_m^1, \dots, C_m^n$ до чисел $C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1, C_{m+1}^{m+1}$ подати за схемою, яку називають трикутником Паскаля і при побудові якої використовують, лише операцію додавання відповідних чисел.

Схему будують так. У першому рядку записують 1. У другому рядку записують дві одиниці: одну – ліворуч, а другу – праворуч від одиниці, записаної в першому рядку. У третьому рядку знову записують дві одиниці: одну – ліворуч від лівої другого рядка, другу – праворуч від правої одиниці другого рядка. Крім того, між цими одиницями записують число 2, яке є сумою двох одиниць попереднього рядка. У четвертому рядку записують суму першого і другого, другого і третього числа третього рядка, причому суми розміщують між доданками; ліворуч і правоті знову пишуть по одиниці. І так продовжують далі. Процес утворення трикутника Паскаля показано на рис. 47 стрілками. Якщо на якомусь числі сходяться дві стрілки, то це означає, що, це число є сумою тих чисел, звідки виходять дані стрілки.

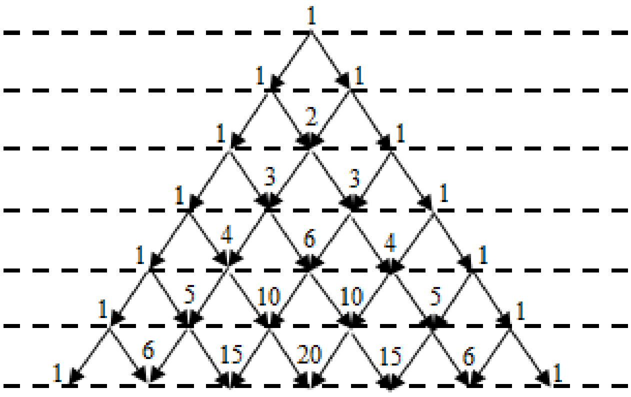


Рис. 47

Цей трикутник можна побудувати зазначеним вище способом як завгодно далеко. Користуються ним так. Припустимо, що ми хочемо знайти всі числа

$C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^4, C_6^6$. Для цього вибираємо горизонтальну лінію з $m = 6$ і читаємо послідовно зліва на право всі числа, які записані у цьому рядку:

$$C_6^0 = 1, C_6^1 = 6, C_6^2 = 15, C_6^3 = 20, C_6^4 = 15, C_6^4 = 6, C_6^6 = 1.$$

Приклади розв'язування задач

1. Із міста *A* в *B* ведуть 6 доріг, із міста *B* в *C* – 4 дороги, із міста *C* в *Д* – 8 доріг. Скільки можна вибрати маршрутів, які ведуть дорогами із міста *A* в *Д* через міста *B* і *C*?

Розв'язання. За правилом добутку: $6 \cdot 4 \cdot 8 = 192$ (способами).

2. Скількома способами можна розсадити 7 гостей на 7 різних стільцях?

Розв'язання. Це кількість перестановок із семи елементів без повторення:

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

3. На площині 10 точок. Кожні дві з них з'єднує відрізок. Скільки всього відрізків утворилось? Розгляньте різні випадки розміщення точок і співставте їх. Виділіть випадок, коли точки є вершинами випуклого десятикутника, і сформулюйте запитання.

Розв'язання. **1-й спосіб**

$$C_{10}^2 = \frac{A_{10}^2}{P_2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

2-й спосіб. З кожної із десяти точок в інші 9 іде відрізок, таким чином всього дістали б відрізків $10 \cdot 9$, при цьому кожен відрізок фактично полічили двічі, адже *AB* = *BA*, тому одержаний добуток треба поділити на 2. Отже, $(10 \cdot 9) : 2 =$ $= 45$. Для 10-кутника це буде число всіх його сторін і діагоналей.

Подібні задачі можна розв'язувати з учнями як задачі на кмітливість, використовуючи при цьому кольорові рисунки. Розв'яжіть за рисунком дану задачу ще одним (третім) способом, додавши до відомого числа сторін число діагоналей, знайдене за формулою: $10 \cdot (10 - 3) : 2$. Обґрунтуйте її.

4. У групі 30 студентів. Кожен потис руку всім іншим. Скільки зроблено рукостискань?

Розв'язання. Кожен з 30 студентів потис руку іншим 29. Тому всього буде C_{30}^2 рукостискань

$$C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435.$$

5. В скількох точках перетинаються діагоналі опуклого *n*-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

Розв'язання. Кожній точці перетину двох діагоналей відповідає чотири вершини *n*-кутника. Тому всіх точок перетину діагоналей буде

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

При *n* = 5 матимемо: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$

Перевірте при *n* = 6; 7 безпосередньо на рисунку.

6. Для преміювання трьох студентів купили 12 різних книжок. Скільки можливих способів розподілу премій по 4 книжки?

Розв'язання. Для першого студента маємо

$$C_{12}^{4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$$

Для другого

$$C_{8}^{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70.$$

Для третього – $C_4^4 = 1$.

Всього таких способів буде: $495 \cdot 70 \cdot 1 = 34\,650.$

7. Є п'ять видів конвертів без марок і чотири види марок. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправки листа?

Розв'язання. Позначимо: $A = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ – множина конвертів, $B = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ – множина марок.

Тоді $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 5 \cdot 4 = 20$ (способів).

8. Із 12 слів чоловічого роду, 9 слів жіночого і 10 середнього роду треба вибрати по одному слову кожного роду. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Застосовуючи правило добутку, знаходимо:

$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(BC) = 12 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$ (способами).

9. 60% студентів педфаку читають журнал «Початкова освіта», 30% – «Педагогічні студії», 20% – «Вісник», 15% — «Педагогічні студії» та «Початкова освіта», 5% – «Початкова освіта» та «Вісник», 2 % — «Педагогічні студії» та «Вісник», 1% – всі три ці журнали. Скільки процентів студентів не читають жодного з названих журналів?

Відповідь. 11%.

10. У бібліотеці є 5 різних творів Т.Шевченка, 4 – Л. Українки, 6 – І.Франка. Скількома способами читач може зробити вибір трьох творів річних авторів?

Розв'язання. Один твір Т.Шевченка читач може вибрати п'ятьма способами, і незалежно від цього вибору може вибрати твір Л.Українки чотирма способами і твір І.Франка – шістьма способами. Тоді за правилом добутку читач може вибрати три твори різних авторів 5 · 4 · 6 = 120 способами.

11. Скільки двоцифрових чисел, в яких цифри можуть повторюватись, можна скласти з цифр 0, 1, 3, 5, 4, 6?

Розв'язання. Двоцифрове число можна розглядати, як упорядковану пару двох цифр, тобто пару виду (a_1, a_2). Цифру десятків a_1 можна вибрати з множини M = {1, 3, 5, 4, 6} п'ятьма способами, а цифру одиниць a_2 - з множини M_2 = {0, 1, 3, 5, 4, 6} – шістьма способами. За правилом добутку число способів, якими можна вибрати упорядковану пару (a_1, a_2), дорівнює добутку чисел вибору елементів a_1 і a_2, тобто 5 · 6 = 30.

12. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці білий і чорний квадрати, які не лежать ні на одній горизонталі, ні на одній вертикалі?

Розв'язання. На шаховій дошці 32 білих і 32 чорних квадрати. З кожним білим квадратом по горизонталі і вертикалі лежать по 4 чорних квадрати, які не входять у вибірку. Отже, для кожного білого квадрата існує 32 – 8 = 24 чорних квадрати, які не лежать з ним на одній горизонталі або на одній вертикалі. Число способів, якими можна вибрати білий і чорний квадрат, які задовольняють задачу, знайдемо за правилом добутку $32 \cdot 24 = 768$.

13. У викладача є 6 задач з алгебри, 5 задач з геометрії і 4 задачі з тригонометрії. Скільки варіантів контрольної роботи з математики можна скласти з цих задач ігри умові, що кожний варіант містить по одній задачі з різних розділів?

Розв'язання. Пару, в яку входять одна задача з алгебри і одна з геометрії", за правилом добутку можна вибрати $6 \cdot 5 = 30$ способами. Додавши до цієї пари задач задачу з тригонометрії, яку можна вибрати 4 способами, одержимо завдання варіанту контрольної роботи. За правилом добутку число таких варіантів дорівнює $30 \cdot 4 = 120$.

14. Скільки трицифрових чисел, в яких цифри не повторюються, можна скласти з цифр 0, 1, 7, 6, 4, 8?

Розв'язання. Трицифрове число можна розглядати як упорядковану трійку виду (a_1, a_2, a_3), де $a_1 \neq a_2 \neq a_3$. Цифру a_1 можна вибрати з множини $M_1 = \{1, 7, 6, 4, 8\}$ п'ятьма способами Цифру a_2 можна вибрати теж п'ятьма способами, бо a_2 може бути нулем, а цифра a_1 уже вибрана. Цифру a_3 після вибору a_1 і a_2 можна вибрати чотирма способами. За правилом добутку число упорядкованих трійок, що відповідають умові задачі, дорівнює добутку чисел вибірок цифр a_1, a_2, a_3,тобто $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

15. Обчислити: а) $\frac{102!}{100!}$; б) $\frac{24!}{25!}$;

Розв'язання.

а) $\frac{102!}{100!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100} = 101 \cdot 102 = 10302$;

б) $\frac{24!}{25!} = \frac{24!}{24! \cdot 25} = \frac{1}{25}$.

16. Спростити:

а) $\frac{n!}{(n-1)!}$; б) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$; в) $\frac{n!}{(n-m)!}$, $n > m$.

Розв'язання.

а) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!\, n}{(n-1)!} = n$;

б) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k-1)!\, k} = \frac{k-1}{(k-1)!\, k} = \frac{k-1}{k!}$;

в) $$\frac{n!}{(n-m)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m-1)(n-m)(n-m+1)\ldots(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-m-1)(n-m)}=$$
$$=(n-m+1)\ldots(n-2)(n-1)n,\qquad n>m$$.

17. Розв'язати рівняння $\frac{x!}{(x-4)!}=\frac{12x!}{(x-2)!}$

Розв'язання.

$$\frac{x!}{(x-4)!}=\frac{12x!}{(x-2)!}\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=12\Leftrightarrow x^2-5x-6=0\Rightarrow$$

$x_1=6;\quad x_2=-1$. Але за змістом даного рівняння $x\geq 4$, тому розв'язок $x_2=-1$ не задовольняє дане рівняння.

Перевірка. При x = 6 маємо $\frac{6!}{2!}=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$;

$$\frac{12x!}{(x-2)!}=\frac{12\cdot 6!}{4!}=12\cdot 6\cdot 5=360\quad 360=360\Rightarrow\frac{6!}{2!}=\frac{12\cdot 6!}{4!}.$$

Відповідь. 6.

18. Розв'язати нерівність $\frac{(2x-1)!}{(2x-3)!}>420$.

Розв'язання.

$$\frac{(2x-1)!}{(2x-3)!}>420\Leftrightarrow\frac{(2x-3)!(2x-2)(2x-1)}{(2x-3)!}>420\Leftrightarrow 4x^2-6x-418>0\Rightarrow x>11$$

Перевірка. При x = 11 маємо:

$$\frac{(22-1)!}{(22-3)!}=\frac{21!}{19!}=21\cdot 20=420>420$$ – хибна нерівність.

При x = 12:

$$\frac{(24-1)!}{(24-3)!}=23\cdot 22=506>420$$ – істинна нерівність

Відповідь. x > 11.

19. Скількома способами можна скласти розклад п'яти уроків на один день з різних п'яти предметів?

Розв'язання. Маємо перестановки з п'яти елементів, їх число дорівнює $P_5=5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

20. Скільки різних п’ятицифрових чисел можна дістати з цифр 2, 4, 6, 7. 8, якщо цифри у числах не повторюються і цифра 7 стоїть у всіх числах перед цифрою 8?

Розв'язання. Оскільки цифри 7 і 8 не переставляються, то пару (7, 8) можна вважати як один елемент перестановок, тобто маємо перестановки з 4 елементів 2, 4, 6, (7, 8). $P_4=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

Вправи

1. У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують математичний і фізичний гуртки? Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

2. Кожен учень у класі вивчає англійську чи французьку мову. Англійську мову вивчають 25, французьку – 27, а ту і другу – 18 чоловік. Скільки учнів у класі?

3. На аркуші паперу накреслили круг площею 78 см^2 і квадрат площею 55 см^2. Площа перетину круга і квадрата дорівнює 30 см^2. Не зайнята кругом і квадратом частина аркуша має площу 150 см^2. Знайти площу аркуша.

4. Про успішність студентів-заочників педагогічного факультету маємо такі відомості: всього студентів 600, з них на «відмінно» вчаться 380, на «добре» – 420, на «задовільно» – 520; на «відмінно» і «добре» – 180, на «відмінно» і «задовільно» – 260, на «добре» і «задовільно» – 410, на «відмінно», «добре» і «задовільно» – 142; успішність – 90 %. Перевірте дані відомості.

5. На Україні частина жителів одного міста може розмовляти тільки українською, частина – тільки російською і частина – як російською, так і українською мовами. Українською мовою розмовляють 85 %, а російською – 75 % жителів міста. Який процент жителів розмовляє двома мовами?

6. У їдальні є страви: на перше – 4, на друге – 5, на третє – 3. Скількома способами можна замовити обід з трьох страв?

7. На першому курсі факультету фізвиховання 100 студентів. З них 45 грає у футбол, 65 – у волейбол, 25 – у футбол і волейбол. Скільки студентів грає: а) хоч би в одну гру; б) тільки в одну гру; в) не грає у жодну з них?

8. На факультеті 300 студентів. З них вивчають англійську мову 130 студентів, німецьку – 110, іспанську – 80, англійську і німецьку – 50, англійську і іспанську – 40, німецьку і іспанську – 30 студентів, всі три мови вивчає 12 студентів Решта вивчає лише французьку мову. Скільки студентів вивчає: а) лише французьку мову; б) лише одну мову?

9. З міста А до міста В ведуть 5 доріг, а від міста В до міста С – 4 дороги. Скільки можна вибрати маршрутів, які ведуть з міста А до міста С через місто В?

10. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці два квадрати різного кольору?

11. Скількома способами можна вибрати дві літери, одна з яких голосна, друга приголосна, з слів: 1) демократія; 2) незалежність; 3) приватизація?

12. Скільки трицифрових чисел, в яких цифри можуть повторюватись, можна скласти з цифр 0, 1, 7, 5, 4, 8?

13. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправлення листа, якщо є шість видів конвертів без марок і п'ять видів марок?

14. Скільки всього трицифрових чисел у десятковій системі числення?

15. Спростіть: а) $\dfrac{(n-2)!}{n!}$; б) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$; в) $\dfrac{(m+3)!}{m!}$.

16. Розв'яжіть рівняння: а) $\frac{(x+2)!}{x!}=72$; б) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!}=30$.

17. Розв'яжіть нерівності: а) $\frac{(x-1)!}{(x-3)!}<72$; б) $\frac{(x+2)!}{(x-1)(x-2)}<1000$.

18. Президію конференції обрали з семи осіб. Скількома способами можна обрати голову і секретаря президії?

19. Скільки непарних три цифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 4, 8, якщо цифри у кожному числі не повторюються?

20. Розв'яжіть рівняння:

а) $A_{x+2}^{4}=30A_{x}^{2}$; б) $A_{x}^{5}=18A_{x-2}^{4}$; в) $A_{x}^{2}=210$.

21. Обчисліть: а) $A_{8}^{3}:A_{7}^{4}$; б) $\frac{A_{10}^{4}+A_{10}^{3}}{A_{10}^{2}}$.

22. Цифровий замок відкривається тільки в тому випадку, коли набрано певний чотирицифровий номер. Правильний номер вдалося набрати в останній з усіх можливих спроб. Скільки спроб передувало правильній?

23. Чотири студенти складають екзамен з математики. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не одержав незадовільної оцінки?

24. Скількома способами можна поставити на полиці 6 різних книг?

25. Обчисліть: $\frac{P_{m}}{P_{m-2}}$.

26. Розв'яжіть рівняння: $\frac{P_{x}}{P_{x+2}}=\frac{0{,}1}{3}$.

27. Скільки семицифрових чисел можна скласти з цифр 4, 6, 7 при умові, що у кожному числі цифра 4 повторюється три рази, а цифри 6 і 7 - по два рази?

28. Скількома способами можна поставити 12 книг на полиці, серед яких є 5 книжок однієї назви, 4 книги другої назви і 3 книги третьої назви?

29. Скількома способами можна посадити за стіл 4 подружні пари так, щоб чоловік і дружина сиділи поруч?

30. Скількома способами можна переставити букви у слові "барабан"?

31. Скількома різними способами можна порівну розділити чотирьом гравцям 28 кісточок доміно?

32. Для проведення екзамену створюється комісія з двох викладачів. Скільки різних комісій можна створити з п'яти викладачів?

33. Скількома способами можна оформити підписку на чотири видання із запропонованих 9 видань?

34. У групі 25 студентів. Кожен потис руку всім іншим. Скільки зроблено рукостискань?

35. Сім яблук і три груші треба покласти в два пакети так, щоб у кожному пакеті була б хоч одна груша і щоб кількість фруктів у них була однакова. Скількома способами це можна зробити?

36. Скількома способами можна вибрати 5 троянд з вази, в якій 9 червоних і 6 білих троянд?

37. Групу з 30 осіб треба розбити на три підгрупи по 10 осіб в кожній. Скільки різних складів груп може бути?

38. У шаховому турнірі зіграно всього 84 партії, але два учасники вибули, зігравши кожний по три партії. Скільки було учасників спочатку, якщо вони зіграли один з одним тільки по одній партії?

39. Спростіть вираз $\frac{2}{n+1}C_{n+1}^{n-1}$.

40. Розв'яжіть рівняння $C_x^3 = \frac{1}{5}C_{x+2}^4$.

ТЕМА 6. ПРЕДИКАТИ

В першій темі розглянуто деякі найпростіші питання елементарної частини математичної логіки – алгебри висловлень, або логіки висловлень. Апарат алгебри висловлень дає додаткову символіку, в якій, вділяючи значну частину логічних законів, якими ми часто користуємось підсвідомо, дає деякі засоби логічного аналізу міркувань. При цьому найпростішими елементами будь-якого міркування вважається елементарне висловлення, внутрішня структура якого уже не береться до уваги: істинність чи хибність довільного висловлення зводиться лише до того, яким способом воно побудовано з елементарних висловлень як з неподільних частин.

Водночас елементарні висловлення можуть виражати властивості об'єктів (наприклад «7 — просте число») і відношення між ними (наприклад, «6 ділиться на 2»), а це зовсім різні речі. Часто при утворенні висновків внутрішні, «приховані» від алгебри висловлень, особливості елементарних висловлень відіграють вирішальну роль.

Візьмемо, наприклад, три висловлення: $a =$ «кожне раціональне число – дійсне», $b =$ «$\frac{5}{19}$ – раціональне число», $c =$ «$\frac{5}{19}$ – дійсне число». Очевидно, за змістом з $a \wedge b$ випливає c. Проте, якщо користуватися засобами алгебри висловлень, то ми не можемо стверджувати, що c логічно випливає з $a \wedge b$, бо формула $a \wedge b \Rightarrow c$ не є тотожно істинною, наприклад, при $a = 1,\ b = 1,\ c = 0$ вона набирае значення 0. В той же час міркування справді проведено логічно, але це можна встановити в результаті тоншого логічного аналізу.

Більш досконалу символіку, виразніші, багатші засоби вираження різних тверджень, досконалі засоби аналізу логічних міркувань дає нам наступний розділ математичної логіки – логіка предикатів.

6.1. Одномісні предикати.

Позначимо через $h(x)$ таке речення: «x – непарне число». Очевидно, це речення не буде висловленням, бо про цього не можна сказати, істинне воно чи хибне. Якщо в $h(x)$ замість змінної x підставляти конкретні натуральні числа, то матимемо висловлення. Наприклад: «5 – непарне число» – істинне висловлення, тобто $h(5) = 1$; «8 – непарне число» – хибне висловлення, тобто $h(8) = 0$ і т. д.

Такі речення, які містять змінні аргументи і які після підстановки назв конкретних об'єктів замість змінних аргументе з певної множини M перетворюються на висловлення, називають висловлювальними формами. У нашому випадку $h(x)$ – це висловлювальна форма від однієї змінної, або одномісна висловлювальна форма.

Висловлювальна форма $h(x)$ визначає одномісну функцію (відображення), визначену на множиш N натуральних чисел і з множиною значень в двохелементній множині $\{0, 1\}$, де 0 і 1 є, відповідно, позначеннями для «хибне» і «істинне». Аналогічно, наприклад, висловлювальна форма $s(x)$ =«x – студент» визначає функцію s, визначену на множині імен конкретних людей з множиною значень $\{0, 1\}$.

Прикладів таких одномісних функцій можна навести скільки завгодно. Всі вони мають ту характерну особливість, що областю їх визначення може бути будь-яка (не обов'язково числова) множина M об'єктів, а множиною значень завжди є двохелементна множина $\{0, 1\}$. Такі функції визначають певні властивості об'єктів, їх називають одномісними предикатами.

Одномісним предикатом називається функція p, визначена на деякій предметній множині M, яка набуває значень лише в двохелементній множині $\{0, 1\}$, *тобто відображення*

$$M \xrightarrow{p} \{0, 1\}.$$

Вираз $p(x)$ називають висловлювальною формою предиката p. Проте заради зручності домовимося надалі предикати позначати разом із змінними аргументами, тобто записувати їх так, як і відповідні висловлювальні форми. Наприклад, говоритимемо «предикат $h(x)$», «предикат $s(x)$» і т. д. Область визначення предиката $p(x)$ позначатимемо через O_p.

Розглядаючи, наприклад, предикат $h(x) =$ «x – непарне число» на множині N, бачимо, що для одних натуральних чисел він набуває значення 1, для інших – 0. Цим самим множина N поділяється на дві підмножини, на одній з яких предикат $h(x)$ набуває лише значення 1, а на другій – лише значення 0. Першу з цих підмножин називають ***характеристичною*** множиною предиката $h(x)$, або його областю істинності. Це саме можна сказати відносно будь-якого одномісного предиката $p(x)$. Характеристичну множину предиката $p(x)$ з областю визначення M позначатимемо через M_p.

Наприклад, для згаданого вище предиката $h(x)$, визначеного на N, $M_h = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2k + 1, \dots\}$, тобто множина всіх непарних чисел. Аналогічно для предиката $s(x)$ =«x – студент» характеристичною множиною є множина імен всіх студентів.

6.2. Двомісні і *n*-місні предикати.

Аналогічно, розглядаючи висловлювальні форми від двох предметних змінних, приходимо до поняття двомісних предикатів, які позначатимемо відповідно до прийнятої домовленості щодо позначення одномісних предикатів.

Двомісним предикатом називається функція f, визначена на деякій предметній множині M, яка набуває значень лише в двохелементній множині $\{0, 1\}$*, тобто відображення*

$$M^2 \xrightarrow{f} \{0, 1\}.$$

Приклади

1. $s(x, y) =$ «x брат y», визначений на множині імен деяких конкретних людей.

2. $k(x, y) =$ «x на 4 більше, ніж y», визначений, наприклад, на множині Z.

3. $d(x, y) =$ «x ділиться на y» – на множині N.

4. $l(x, y) =$ «x сильніший, ніж y» – на множині імен певної групи спортсменів.

У математиці зустрічається багато різноманітних предикатів, причому деякі з них, найпоширеніші, мають свої спеціальні позначення, наприклад:

а) «x дорівнює y» позначається через «$x = y$»;

б) «x менше від y» позначається через «$x < y$»;

в) «x паралельно y» позначається через «$x \parallel y$» і т. д.

Такі символи предикатів, за якими закріпилось постійне позначення, називають індивідуальними, або сталими, символами предикатів і записують їх, як правило, інфіксно (тобто символ двомісного індивідуального предиката записують між позначеннями змінних). Інші символи предикатів змінні – залежно від домовленості вони можуть позначати різні конкретні предикати. Тому, записуючи символічно який-небудь конкретний предикат, треба вказувати на його конкретний смисл. Наприклад, говорять: нехай предикат $p(x, y)$ означав «x і y взаємно прості.

Двомісні предикати визначають відношення між об'єктами, для них також вводяться поняття характеристичної множини. Якщо двомісний предикат $f(x, y)$ визначений на множиш M, то його характеристичною множиною є підмножина M_p^2 прямого квадрата M^2 області визначення. Наприклад, для предиката $d(x, y) =$ «$x \vdots y$» з областю визначення Z характеристичною множиною є множина $Z_d^2 = \{(a, b) | a, b \in Z \wedge a \vdots b\}$, тобто множина таких пар (a, b) цілих чисел, в яких перша компонента делиться на другу.

Важливими прикладами одномісних і двомісних предикатів є рівняння і нерівності (та їх системи).

Приклади

1. $r_1(x) =$ «$4x - 7 = 0$» на множині N. Очевидно, що характеристична множина N_r, цього предиката є порожня множина, $N_{r_1} = \varnothing$. В той же час, якщо $r_1(x)$ визначити на множиш Q, то $Q_{r_1} = \left\{\frac{7}{4}\right\}$.

2. $r_2(x, y) =$ «$3x - y + 4 = 0$» на множиш R, R_{r_2} є множина точок на площині, які задовольняють рівняння $3x - y + 4 = 0$.

3. $n_1(x) =$ «$5x - 14 < 0$» на множині R. $R_{n_1} = \left]-\infty, \frac{14}{5}\right[$.

4. $n_2(x, y) =$ «$x + y < 1$» на множині R. R_{n_2} є півплощина, яка розташована нижче граничної прямої $x + y = 1$.

За аналогією з одномісними і двомісними предикатами розглядають предикати довільної скінченної розмірності *n*: тримісні, чотиримісні і взагалі *n*-місні предикати.

n-місним предикатом називається функція f, визначена на деякій предметній множині M, яка набуває значень лише в двохелементній множині $\{0, 1\}$*, тобто відображення*

$$M^n \xrightarrow{f} \{0, 1\}.$$

Приклади

1. $m(x, y, z) =$ «точка *y* знаходиться між точками *x* і *z*», на множині *M* точок на прямій.

2. $s(x, y, z) =$ «$x + y = z$» на множиш R.

Прикладом n-місного предиката може бути таке невизначене рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ на множині R.

Предикати, з яких не можна виділити інших самостійних предикатів, називають елементарними. Всі розглянуті нами раніше предикати були елементарними. Домовляються кожне висловлення розглядати як предикат, який залежить від порожньої множини предметних змінних, тобто як нульмісний предикат, що не залежить від області визначення. Тоді логіка висловлень розглядається як частковий випадок логіки предикатів.

6.3. Предикати відношення.

На тих самих множинах, наприклад, N, Z, Q, R та інших два визначили два поняття: відношення і предикати. Відмітимо, що задання і записи цих понять багато в чому схожі.

Візьмемо, наприклад, відношення подільності в множині N: $a = \{(a, b) | a, b \in N \wedge a \vdots b\}$, $a \subset N^2$ і предикат подільності $d(x, y) =$ «$x \vdots y$».

Відношення подільності є така множина α всіх пар (a, b) натуральних чисел, в яких перша компонента a длиться на другу компоненту b. Предикат подільності d – це відображення

$$N^2 \xrightarrow{d} \{0, 1\},$$

яке має своєю характеристичною множиною таку множину всіх пар (a, b), в яких $a \vdots b$, тобто характеристична множина предиката $d(x, y)$ і є відношенням подільності α.

Такі міркування можливі стосовно будь-якого відношення в множині *M* і будь-якого предиката, визначеного на множині *M*: кожному відношенню α в множині M відповідає предикат $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і характеристична множина якого M_f^n дорівнює α, і навпаки: кожному предикату $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множині M з характеристичною множиною M_f^n відповідає відношення α; таке, що $\alpha = M_f^n$.

Таким чином, коли говорять, що n-місний предикат $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множині M задає відношення α в M, то це означає, що $\alpha = M_f^n$. Якщо f одномісний предикат, то $M_f \subset M$. В цьому разі відношення $\alpha = M_f$ просто є підмножиною M, такі відношення називають унарними.

6.4. Операції алгебри висловлень над предикатами.

Оскільки кожний предикат може набувати в своїй області визначення лише двох значень – 0 або 1, його можна розглядати як змінне висловлення, а над предикатами виконувати всі логічні операції алгебри висловлень: $-$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Слід лише стежити за тим, щоб області визначення предикатів, над якими збираємось виконувати операції, збігалися. Тоді в результаті виконання логічних операцій над предикатами матимемо нові предикати на тій самій області визначення, які вже будуть складеними предикатами.

Розглянемо, наприклад, три предикати на множині N: $p(x,y) =$ «x – просте число», $h(x,y) =$ «x – непарне число», $t(x,y) =$ «x і y – взаємно прості числа». Тоді з них можна утворити такі, наприклад, нові предикати:

$$\overline{p}(x), \qquad p(x) \wedge h(x), \qquad p(x) \Rightarrow h(x), \qquad p(x) \wedge h(x) \Leftrightarrow t(x,y)$$

і т. д.

Кожному предикату відповідає характеристична множина, тому виникає запитання, як зв'язані між собою логічні операції над предикатами з операціями над відповідними характеристичними множинами (тобто відношеннями). Коротко розглянемо це питання лише для одномісних предикатів.

Нехай $p(x)$ і $q(x)$ – одномісні предикати, визначені на множині M, M_p і M_q – відповідні їм характеристичні множини. Утворимо предикат $f(x) = p(x) \wedge q(x)$, йому відповідає характеристична множина M_f, тоді справедлива така залежність:

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & = & p(x) & \wedge & q(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_f & = & M_p & \cap & M_q \end{array};$$

6.5. Квантори.

Розглянемо операції, які перетворюють предикати у висловлення. Обмежимося спочатку одномісними предикатами.

Одна така операція вже розглядалась. Це операція підстановки замість предметного змінного x імен конкретних елементів із області визначення. Якщо замість змінної x предиката $f(x) =$ «x – просте число» підставляти натуральні числа 1, 2, 3, 4, ..., то матимемо істинні чи хибні висловлення: «1 – просте число», «2 – просте число» і т. д. В результаті підстановки дістаємо висловлення, які стосуються окремих елементів області визначення і не характеризують властивостей цієї множини в цілому, тобто ми не можемо мати певних загальних висловлень про область визначення. Такі висловлення одержують за допомогою нових операцій, які називають ***кванторами***.

Слова «кожний» (або «для всіх») і «існує» відображують категорії цілого і частини в навколишній дійсності. Наприклад: кожна людина молодша за своїх батьків; існують пари простих чисел, які відрізняються між собою на два (наприклад: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) і т. д.); для кожного натурального числа x існує більше за нього число y таке, що $y \vdots x$. Операції, про які йдеться, відображають зміст слів «для всіх» і «існує» і називаються операціями квантифікації, або операціями зв'язування квантором змінних. Кванторів є два: квантор існування і квантор загальності. Квантор існування позначають символом $\exists$, у звичайній мові йому відповідає слово «існує». Наприклад, символічний вираз $(\exists x)p(x)$ читають так «існує таке x, що $p(x)$» або «існує таке x, що має властивість p». Оскільки через $p(x)$ ми позначили предикат «x – просте, число», то $(\exists x)p(x)$ читають як «існує просте число». Очевидно, що останнє речення – це вже істинне висловлення.

Кантор загальності позначають символом $\forall$, у звичайній мові йому відповідає вираз «для кожного» (або «для всіх», «для всякого»). Так, застосувавши до того самого предиката $p(x)$ квантор загальності, дістанемо символічний вираз $(\forall x)p(x)$, який читають так: «для кожного x існує $p(x)$», або «для кожного x виконується властивість p». У конкретному випадку вираз $(\forall x)p(x)$ означає: «кожне число просте». Це висловлення і притому хибне.

Операцію взяття квантора називають також операцією зв'язування квантором предметної змінної. Змінна, яка міститься під знаком квантора, називається зв'язаною змінною, а змінна, яка не міститься під знаком квантора, – вільною змінною. Зв'язана змінна уже фактично не є змінною як її розуміють у математиці: підстановка замість зв'язаної змінної в предикат імені конкретного об'єкта може позбавити вираз смислу.

Застосовуючи один раз квантор $\exists$ або $\forall$ до одномісних предикатів, матимемо висловлення, які виражають більш загальні твердження про множини в цілому, а не про окремі її елементи. Поняття квантора існування і загальності введено на описовому рівні, на рівні змісту. Проте їх можна також ввести, взявши за основу поняття значення предиката на області визначення.

Квантором існування *називається така операція* $\exists$*, яка кожному одномісному предикату* $f(x)$*, визначеному на множині М, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення* $(\exists x)p(x)$ *(читається: «існує таке х, що має місце* $f(x)$*»), яке буде істинне тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одно* $a \in M$*, таке, що* $f(x) = 1$.

Квантором загальності *називається така операція* $\forall$*, яка кожному одномісному предикату* $f(x)$*, визначеному на множині М, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення* $(\forall x)p(x)$ *(читається: «для* *кожного x має місце $f(x)$»), яке буде-істинним тоді і тільки-тоді, коли для кожного $a \in M$ $f(x) = 1$.*

Розглянемо тепер довільний двомісний предикат $f(x, y)$ на множині M. За допомогою операції підстановки імен a, b, конкретних елементів із M замість предметних змінних x і y також матимемо висловлення $f(a, b)$, істинні чи хибні, які характеризуватимуть лише окремі пари (a, b) елементів із M, а не всю множину в цілому. Наприклад, для предиката $d(x, y) =$ «$x \vdots y$», визначеного на множині N, дістаємо: $d(2,3) = 0$, $d(6,3) = 1$ і т. д.

Далі розглянемо операції зв'язування квантором змінних у довільному двомісному предикаті $f(x, y)$, визначеному на множині M. Зв'яжемо спочатку змінну x, наприклад, квантором існування. Матимемо: $(\exists x) f(x, y)$ – предикат від однієї змінної y: $(\exists x) f(x, y) = f_1(y)$. Зв'язавши змінну y квантором $\exists$ або $\forall$ в цьому предикаті, дістанемо висловлення.

Наприклад, нехай $d(x, y)$ є розглянутий вище предикат подільності в множині натуральних чисел. Зв'яжемо в ньому спочатку змінну y квантором $\forall$, потім змінну x квантором $\exists$. Матимемо послідовно $(\forall y) d(x, y) = d_1(x)$; $(\exists x) d_1(x) = (\exists x)(\forall y) d(x, y)$ – «існує таке x, що для всіх y має місце $d(x, y)$, «або існує таке x, яке ділиться на всі y». У множині натуральних чисел таке висловлення буде хибним. (Якщо ж цей предикат розглядати, наприклад, в множині цілих невід'ємних чисел $N_0 = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, то це висловлення буде вже істинним).

Виконаємо у предикаті $d(x, y)$ операції зв'язування тих самих змінних і тими самими кванторами, що й попереднього разу, тільки в зворотному порядку. Знову дістанемо висловлення $(\forall y)(\exists x) d(x, y) =$ «для кожного y існує таке x, що $d(x, y)$», або «для кожного y існує таке x, що x ділиться y», яке буде вже, очевидно, істинне. Це висловлення утворилося з попереднього механічною перестановкою кванторів.

З предиката $d(x, y)$, визначеного на множині N, застосувавши квантори, можемо утворити 8 таких висловлень:

1) $(\forall x)(\forall y) d(x, y)$ – «для кожного x і для кожного y $x \vdots y$» (хибне);
2) $(\forall x)(\forall x) d(x, y)$ – «для кожного y і для кожного x $x \vdots y$» (хибне);
3) $(\exists x)(\exists y) d(x, y)$ – «існує таке x і існує таке y, що $x \vdots y$» (істинне);
4) $(\exists y)(\exists x) d(x, y)$ – «існує таке y і існує таке x, що $x \vdots y$» (істинне);
5) $(\exists x)(\forall y) d(x, y)$ – «існує таке x для кожного y, що $x \vdots y$» (хибне);
6) $(\forall y)(\exists x) d(x, y)$ – для кожного y існує таке x, що $x \vdots y$» (істинне);
7) $(\forall x)(\exists y) d(x, y)$ – «для кожного x існує таке y, що $x \vdots y$» (істинне);
8) $(\exists y)(\forall x) d(x, y)$ – «існує таке y, що для кожного x $x \vdots y$» (істинне).

Розглянутий приклад показує, що переставлення місцями різних кванторів $\forall$, $\exists$ приводить до утворення відмінного не тільки за смислом, а й за значенням істинності висловлення. Це треба пам'ятати при користуванні кванторами. Переставлення однойменних кванторів не змінює ні смислу, ні значення істинності висловлення.

Все сказане про застосування кванторів до двомісних предикатів стосується предикатів довільної розмірності.

6.6. Застосування логіки предикатів до запису тверджень, означень тощо.

Розглянемо приклади застосування засобів логіки предикатів до запису деяких речень.

1. «Існує таке непарне число, яке буде взаємно простим з числом 15». Помічаємо, що тут фігурують два предикати: $\upsilon(x) =$ «x – парне число» і $p(x,y) =$ «x взаємно просте з y», які стосовно цього предиката запишемо так:

$$\overline{\upsilon}(x),\ p(x,15).$$

Застосовуючи квантор існування і прийняті означення предиката, дане висловлення символічно запишемо так:

$$(\exists x)\overline{\upsilon}(x) \wedge p(x,15).$$

2. «Будь-яке число, яке ділиться на парне число, також буде парним». Використаємо предикати $\upsilon(x) =$ « x – парне число», $d(x,y) =$ «$x \vdots y$» . Дістанемо:

$$\big((\forall x)(\forall y)\upsilon(y) \wedge d(x,y) \Rightarrow \upsilon(x)\big).$$

3. «Для будь-яких двох чисел існує таке третє число, яке є їхньою сумою». Використовуючи предикат $s(x,y,z) =$ «$x + y = z$», дістанемо:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)s(x,y,z).$$

Можна використати звичайне позначення суми і записати:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + y = z).$$

4. Сформулювати українською мовою такий символічний запис:

$(\forall x)\big(c(x) \wedge d(x,y) \Leftrightarrow n(x)\big)$, де $c(x) =$« x – ціле число», $d(x) =$« x – додатне число», $n(x) =$ «x – натуральне число».

Відповідь: «Кожне число буде натуральним тоді і тільки тоді, коли воно одночасно ціле і додатне».

5. В шкільному курсі математики є таке означення границі числової послідовності: число a називається границею послідовності (x_n), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число k, що при всіх $n > k$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо число a є границею послідовності (x_n), то це скорочено записують так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Це означення, можемо записати компактніше: число a називається границею послідовності (x_n), якщо

$$(\forall \varepsilon)(\exists k)(\forall n)(n > k \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon),\ \varepsilon > 0,\ n,\ k \in N.$$

В кінці формули записуємо обмеження, які накладаються на вибір значень тих змінних, які зв'язані кванторами.

Такі компактні записи мають свої переваги: вони сприяють зосередженню уваги на суті означуваного поняття, краще запам'ятовуються і відкривають можливості алгебраїчного перетворення деяких понять.

6. Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,b]$. Функцію $f(x)$ називатимемо обмеженою на $[a,b]$, якщо існує таке додатне дійсне число r, коли для кожного значення x із $[a,b]$ значення функції $f(x)$ за модулем не перевищує r. Геометрично це означає, що графік функції $f(x)$ на $[a,b]$ розташований всередині смуги між прямими $y = r$ і $y = -r$.

У вигляді формули це означення можна записати так:

$$(\exists r)(\forall x)(|f(x)| < r), \qquad x \in [a,b], \qquad r \in R \wedge r > 0.$$

7. Означення паралельності прямих: дві прямі k і l називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не мають жодної спільної точки або збігаються:

$$(\exists \alpha)(k \in \alpha \wedge l \in \alpha) \wedge (k = l \vee k \cap l = \varnothing),\ \alpha \text{ – площина.}$$

8. При формулюваннях і в записах різноманітних властивостей, правил квантори здебільшого використовують в неявному вигляді. Наприклад, коли кажуть, що для додавання натуральних чисел має місце комутативний закон $a + b = b + a$, то мають на увазі, що цей закон справедливий для кожного $a \in N$ і кожного $b \in N$, тобто

$$(\forall a)(\forall b)(a + b = b + a), \qquad a \in N, \qquad b \in N.$$

Це саме можна сказати і про таку тотожність:

$$(\forall a)(\forall b)(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad a \in R, \qquad b \in R.$$

Наведені символічні записи в прикладах 1 – 4 є по суті формули логіки предикатів, аналогічні формулам алгебри висловлень, в уточнені цих формул беруть участь, крім предикатів і кванторів, також всі логічні операції –, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ алгебри висловлень.

Поняття формули логіки предикатів визначається і так:

1) кожний нульмісний предикат, тобто висловлення, є формула;

2) кожний елементарний предикат є формула;

3) якщо $F(x)$ – формула, а x – вільна змінна (крім x в формулі $F(x)$ можуть існувати й інші вільні змінні), то вирази $(\exists x)F(x)$, $(\forall x)F(x)$ є формулами;

4) якщо A і B – це формули (причому вільні змінні формули A позначені іншими буквами, ніж зв'язані змінні формули B, а вільні змінні формули B – іншими буквами, ніж зв'язані змінні формули A), то вирази

$$\overline{A},\ \overline{B},\ A \vee B,\ A \wedge B,\ A \Rightarrow B,\ A \Leftrightarrow B.$$

також є формулами;

5) ніяких інших формул, крім зазначених в п. 2 – 4, немає. При утворенні формул логіки предикатів потрібно бути більш обережним ніж в алгебрі висловлень. Так, наприклад, вираз $(\exists x)F(x,y) \vee g(x)$ не є формулою, бо змінна x в першій формулі зв'язана, а в другій – вільна.

6.7. Зв'язок між кванторами існування і загальності, його застосування.

Розглянемо одномісний предикат $f(x)$ на множині M і утворимо висловлювання $\overline{(\exists x)f(x)}$, тобто «не правильно, що існує таке x, яке має властивість f». Але за смислом це те саме, що й висловлювання «для кожного x виконується властивість не f (тобто $\overline{f}$)», тобто дістанемо рівносильність

$$\overline{(\exists x)f(x)} = (\forall x)\overline{f}(x). \qquad (1)$$

Аналогічно висловлювання $\overline{(\forall x)f(x)}$, тобто «неправильно, що для кожного x справджується властивість f» означає те саме, що й висловлення «існує таке x, яке має властивість $\overline{f}$», або в символічному записі $(\exists x)\overline{f}(x)$. Звідки дістанемо другу рівносильність

$$\overline{(\forall x)f(x)} = (\exists x)\overline{f}(x). \qquad (2)$$

Співвідношення (1) і (2) поширюються на довільну скінченну кількість кванторів. Наприклад, нехай маємо формулу $(\exists x)(\forall y)(\exists z)F(x,y,z)$. Виконавши поступово перетворення за правилами (1) і (2), дістанемо:

$$\overline{(\exists x)(\forall y)(\exists z)F(x,y,z)} = (\forall x)\overline{(\forall y)(\exists z)F(x,y,z)} =$$
$$= (\forall x)(\exists y)\overline{(\exists z)F(x,y,z)} = (\forall x)(\exists y)(\forall z)\overline{F}(x,y,z),$$

тобто кожний квантор існування переходить у квантор загальності і навпаки. Якщо предикат $F(x,y,z)$, в свою чергу, містить ще квантори, які зв'язують якісь інші змінні, відмінні від $x,\ y,\ z$, то перетворення виконуються аналогічно.

Наприклад,

$$\overline{\big((\forall x)(\exists y)f(x,y) \Rightarrow (\exists u)g(u)\big)} = (\exists x)(\forall y)\overline{(f(x,y) \Rightarrow (\exists u)g(u))} =$$
$$= (\exists x)(\forall y)\overline{\left(\overline{f(x,y)} \vee (\exists u)g(u)\right)} = (\exists x)(\forall y)f(x,y) \wedge \overline{(\exists u)g(u)} =$$
$$= (\exists x)(\forall y)f(x,y) \wedge (\forall u)\overline{g}(u).$$

Розглянемо на прикладах знайдені рівносильності.

Приклади

1. Ми знаємо, що означає, коли число a є границею послідовності (x_n). А що означає, коли число a не є границею цієї послідовності?

Відповідати на аналогічні запитання не так просто, тому користуються одержаними рівносильностями. Так у нашому випадку візьмемо формулу, яка дає визначення границі послідовності, і виконаємо операцію заперечення цієї формули. В результаті дістанемо умови, за яких дійсне число a не буде границею послідовності:

$$\overline{(\forall \varepsilon)(\exists k)(\forall n)(n > k \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)} = (\exists \varepsilon)(\forall k)(\exists n)\overline{(n > k \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)} =$$
$$= (\exists \varepsilon)(\forall k)(\exists n)\overline{\left(\overline{n > k} \vee |x_n - a| < \varepsilon\right)} = (\exists \varepsilon)(\forall k)(\exists n)(n > k \wedge \overline{|x_n - a| < \varepsilon}) =$$
$$= (\exists \varepsilon)(\forall k)(\exists n)(n > k \wedge |x_n - a| \geq \varepsilon),\ \varepsilon > 0,\ k \in N.$$

Отже, існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого $k \in N$ знайдеться $n \in N$ таке, що n буде більшим k і водночас модуль різниці $|x_n - a|$ не буде меншим, ніж ε, тобто члени послідовності (x_n) не наближаються як завгодно близько до a. Це і є точне означення того, що число a не є границею послідовності.

У наведених вище перетвореннях ми користувалися, крім знайдених рівносильностей, ще й такими: $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$, $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$, де A, B – довільні формули.

2. Запишемо умови, при яких дані прямі k і l не будуть паралельними. Для цього, аналогічно попередньому, виконаємо операцію заперечення формули, яка описує умови, коли прямі k і l паралельні. Дістаємо:

$$\overline{(\exists\alpha)(k \in \alpha \wedge l \in \alpha) \wedge (k = l \vee k \cap l = \varnothing)} =$$
$$= (\forall\alpha)(\overline{k \in \alpha} \vee \overline{l \in \alpha} \vee (k \neq l \wedge k \cap l \neq \varnothing)$$

Таким чином, маємо дві умови, коли прямі k і l не паралельні:

а) $(\forall\alpha)(\overline{k \in \alpha} < \overline{l \in \alpha}$, тобто прямі k і l не лежать в одній площині. Такі прямі називають мимобіжними;

б) коли прямі не збігаються і мають спільні точки, тобто коли вони перетинаються.

Звичайно, щоб виконувати операції за цим методом, потрібно точно записувати означення відповідних понять і правильно користуватися правилами перетворення формул.

6.8. Поняття логічного слідування для предикатів.

Розглянемо це питання стосовно одномісних предикатів.

Нехай на множині M визначено два одномісних предикати $F(x)$ і $E(x)$ з характеристичними множинами M_F і M_E відповідно, причому $M_F \subset M_E$. Тоді при підстановці замість x імен конкретних елементів із M імплікація $F(x) \Rightarrow E(x)$ завжди буде істинною, бо при $F(a) = 1$ для $a \in M$ $E(a) = 1$. В таких випадках кажуть, що предикат $E(x)$ логічно випливає з предиката $F(x)$ і скорочено це позначають так: $F(x) \vDash E(x)$.

Нехай на множині M визначені одномісні предикати $F(x)$ і $E(x)$, а M_F і M_E – відповідні їм характеристичні множини. Тоді кажуть, що $E(x)$ логічно випливає з $F(x)$ тоді і тільки тоді, коли $M_F \subset M_E$.

Приклади

1. Розглянемо предикати: $f(x)$ = «число x кратне 4», $g(x) =$ «число x кратне 2» на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Дістаємо: $M_f = \{4, 8\}$, $M_g = \{2, 4, 6, 8\}$, $M_f \subset M_g$, отже, $f(x) \vDash g(x)$. Очевидно, що $g(x)$ логічно випливає з $f(x)$ не тільки на даній області визначення, а й на будь-якій іншій, де можна говорити про подільність, зокрема на Z.

2. Нехай $f(x)$ = «число x кратне 3», $g(x) =$ «число x непарне», визначені на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Дістаємо: $M_f = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $M_g = \{3, 5, 6, 9, 11, 13, 15\}$. Отже, M_f не є підмножиною M_g і $\overline{f(x) \vDash g(x)}$.

Приклади розв’язування задач

1. Знайдіть множину істинності предиката

$P(x)$:"$2x+5>7x-15$", визначеного на множині М= $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Розв'язання.

$P(1): 2\cdot1+5>7\cdot1-15; \quad 7>-8; \quad (1)=1;$

$P(2): 2\cdot2+5>7\cdot2-15; \quad 9>-1; \quad (2)=1;$

$P(3): 2\cdot3+5>7\cdot3-15; \quad 11>6; \quad (3)=1;$

$P(4): 2\cdot4+5>7\cdot4-15; \quad 13>13; \quad (4)=0;$

$P(5): 2\cdot5+5>7\cdot5-15; \quad 15>20; \quad (4)=0.$

Відповідь. $T(P)$ = {1, 2, 3}.

2. Дано X – множина прямих простору, на ній задані предикати:

$p(x, y)$: "Пряма x паралельна прямій y";

$g(x, y)$: " Пряма x перетинає пряму y".

З'ясуйте, чи є ці предикати запереченням один одного.

Розв'язання. Оскільки дві прямі в просторі можуть бути або паралельними, або мимобіжними, або перетинатись, то зміст предиката $g(x, y)$ не вичерпує заперечення предиката $p(x, y)$. Тому предикат $g(x, y)$ не є запереченням предиката $p(x, y)$.

Заперечення предиката $p(x, y)$ є предикат $\overline{p(x,y)}$: «Пряма x не паралельна прямій y».

Відповідь. N^2; {(1; 3), (4; 2), (7; 1)}.

3. На множині X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} задані предикати $P(x)$: "Число x кратне 3" і $Q(x)$: "Число x ділиться на 2". Утворіть предикати 1) $\overline{P}(x)$, $\overline{Q}(x)$, 2) $P(x)\vee Q(x)$, 3) $P(x)\wedge Q(x)$, 4) $\overline{P(x)\vee Q(x)}$, 5) $\overline{P(x)\wedge Q(x)}$ і знайдіть множини їх істинності.

Розв'язання. Для розв'язання завдань 1 – 5 знайдемо множини істинності даних предикатів: $T(P)$ = {0, 3, 6, 9}; $T(Q)$ = {0, 2, 4, 6, 8, 10}.

$\overline{P}(x)$: «Число x не кратне 3». $T(\overline{P})$ = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10}.

$\overline{Q}(x)$: «Число x не ділиться на 2». $T(\overline{Q})$ = {1, 3, 5, 7, 9}.

$P(x)\vee Q(x)$: «Число x кратне 3 або число x ділиться на 2».

$T(P\vee Q)=T(P)\cup T(Q)$ = {0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10}.

$P(x)\wedge Q(x)$: «Число x кратне 3 і число x ділиться на 2».

$T(P\wedge Q)=T(P)\cap T(Q)$ = {0, 6}.

$\overline{P(x)\vee Q(x)}$: «*Невірно*, що число x кратне 3 або ділиться на 2». Для визначення множини істинності цього складеного предиката знайдемо доповнення множини істинності диз'юнкції даних предикатів до множини X: $\overline{T(P\vee Q)}$ = {1, 5, 7}.

$\overline{P(x)\wedge Q(x)}$: «*Невірно*, що число x кратне 3 і число x ділиться на 2». Для визначення множини істинності цього складеного предиката знайдемо доповнення множини істинності кон'юнкції даних предикатів до множини X: $\overline{T(P \wedge Q)}$ ={1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}.

4. На множині X – многокутників задана імплікація «Якщо многокутник x має вісь симетрії, то він – правильний». Назвіть декілька значень змінної x, при яких імплікація перетворюється в хибне висловлення.

Розв'язання. Імплікація $p(x) \Rightarrow g(x)$ двох предикатів перетворюється в хибне висловлення тільки при тих значеннях змінної, при яких перший *предикат* $p(x)$ перетворюється в істинне висловлення, а другий *предикат* $g(x)$ перетворюється в хибне висловлення.

1) Нехай x_1 – прямокутник, відмінний від квадрата, тоді $p(x_1)$ – істинне висловлення, бо прямокутник має декілька осей симетрії. В той же час $g(x_1)$ – хибне висловлення, бо прямокутник, відмінний від квадрата, не є правильним многокутником. Отже, при x_1 – прямокутник *імплікація* $p(x) \Rightarrow g(x)$ перетворюється в хибне висловлення.

2) Нехай x_2 – ромб, відмінний від квадрата, тоді $p(x_2)$ –істинне висловлення, осями симетрії ромба є його діагоналі. Проте, $g(x_2)$ – хибне висловлення, бо ромб, відмінний від квадрата, не є правильним многокутником (не рівні кути при вершинах). Отже, при x_2 – ромб імплікація $p(x) \Rightarrow g(x)$ перетворюється в хибне висловлення.

3) Нехай x_3 – рівнобедрена трапеція, тоді $p(x_3)$ – істинне висловлення (чому?), а $g(x_3)$ – хибне висловлення (чому?).

Тому при x_3 – рівнобедрена трапеція імплікація $p(x) \Rightarrow g(x)$ перетворюється в хибне висловлення.

4) При x_4 – ромбоїд імплікація $p(x) \Rightarrow g(x)$ – перетворюється 8 хибне висловлення (Поясніть чому).

5. На множині N натуральних чисел визначено предикати $P_1(x)$: «Сума цифр числа x ділиться на 3», $P_2(x)$: «Число x ділиться на 3». Складіть імплікації цих предикатів і знайдіть області їх істинності.

Розв'язання. $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$: «Якщо сума цифр числа x ділиться на 3, то і число x ділиться на 3». Навпаки, $P_2(x) \Rightarrow P_1(x)$: «Якщо число x ділиться на 3, то сума його цифр ділиться на 3». Ці предикати рівносильні, області їх істинності рівні: $T_1 = T_2 = \{3,6,9,...\}$.

Запис $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$ можна прочитати як подвійну імплікацію, або так: щоб число x ділилось на 3, необхідно і достатньо, щоб сума його цифр ділилась на 3.

6. На множині N натуральних чисел визначено предикати $P_1(x)$: «Число x ділиться на 9»; $P_2(x)$: «Число x ділиться на 3». Знайдіть області істинності цих предикатів, складіть їх імплікації та встановіть відношення логічного слідування між ними.

Розв'язання. $T_1 = \{9,18,27,...\}$; $T_2 = \{3,6,9,12,15,18,...\}$. $T_1 \subset T_2$, тому між предикатами існує відношення логічного слідування: $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$, якщо число x ділиться на 9, то воно ділиться на 3; щоб число ділилось на 3, достатньо, щоб воно ділилось на 9; щоб число ділилось на 9, необхідно, щоб воно ділилось на 3.

7. Наведіть приклади логічного слідування на множині предикатів.

Розв'язання.

1) Предикати $p(x)$: «Число x ділиться на 4»; $g(x)$: «Число x ділиться на 2» визначені на множині натуральних чисел.

$T_p = \{4,8,12,...\}$; $T_g = \{2,4,6,8,...\}$. $T_p \subset T_g$ тому предикат $g(x)$ логічно слідує з предиката $p(x)$.

2) На множині X – студенти педфаку задані предикати: $p(x)$: "Студент x – майстер спорту", $g(x)$: "Студент – спортсмен".

Зрозуміло, що $T_p \subset T_g$, тому предикат $g(x)$ логічно слідує з предиката $p(x)$.

3) Предикати $p(x)$: "Чотирикутник x – квадрат", $g(x)$: "Чотирикутник x – ромб" визначені на множині X – чотирикутники.

$T_p \subset T_g$, тому предикат $g(x)$ логічно слідує з предиката $p(x)$.

4) Областю визначення предикатів $p(x,y)$: "Трикутники x і y рівні" і $g(x,y)$: "Трикутники x і y рівновеликі" – множина трикутників.

Множини істинності предикатів $p(x,y)$ і $g(x,y)$ знаходяться у відношенні $T_p \subset T_g$, тому предикат $g(x,y)$ логічно випливає з предиката $p(x,y)$.

8. На множині натуральних чисел задані предикати: $p(x)$: «Число x кратне 2 і 7» і $g(x)$: «Число x кратне 14». Який з цих предикатів логічно слідує з іншого?

Розв'язання. Числа 2 і 7 взаємно прості, тому якщо число x ділиться на 2 і на 7, то це число x ділиться на 14. Отже, із предиката $p(x)$ логічно випливає предикат $g(x)$. Але справедливе і обернене твердження: якщо число x ділиться на 14, то воно ділиться на 2 і на 7, бо числа 2 і 7 – прості дільники числа 14. Отже, із предиката $g(x)$ логічно слідує предикат $p(x)$. Такі два предикати називаються рівносильними.

9. Замість крапок поставте слова «*необхідно*», «*достатньо*», «*необхідно і достатньо*» в реченнях:

а) Щоб кути x і y були рівні, ..., щоб вони були вертикальні.
б) Щоб добуток двох чисел дорівнював нулю, ..., щоб хоч один із множників дорівнював нулю.
в) Щоб трикутник був рівностороннім, ..., щоб він був гострокутним.
г) Щоб число x ділилось на 5, ..., щоб його запис закінчувався цифрою 0 або 5.

Розв'язання. Замість крапок треба поставити: а) «достатньо»; б) «необхідно і достатньо»; в) «необхідно»; г) «необхідно і достатньо».

10. Записати, використовуючи квантори існування або загальності, дані предикати:

а) $p(x)$: «Число x парне» на множині простих чисел;

б) $g(x)$: «Число x: ділиться на 7» на множині цілих чисел Z;

в) $f(x,y)$: «$x+y=y+x$» на множині дійсних чисел;

г) $h(x,y)$: «$x<y$» на множині дійсних чисел.

Розв'язання.

а) Оскільки на множині простих чисел є просте число 2, а всі інші прості числа непарні, то тут можна використати квантор існування: $\exists x\ p(x)$.

б) На множині цілих чисел існують числа (їх безліч), які діляться на 7, тому даний предикат $g(x)$ можна записати із квантором існування: $\exists x\ g(x)$.

в) Предикат $f(x,y)$ виражає закон комутативності додавання, він має місце для будь-яких x і y з множини дійсних чисел, тому тут треба використати квантор загальності: $\forall(x\in R)\ \forall(y\in R)\ \ f(x,y)$.

г) На множині дійсних чисел для будь-якого числа x знайдеться таке число y, що $x<y$. Тому символічно з застосуванням кванторів загальності та існування предикат $h(x,y)$ можна записати так: $\forall(x\in R)\ \exists(y\in R)\ \ h(x,y)$.

11. На множині прямих площини визначені предикати:

$p(x,y)$: «Пряма x перетинає пряму y»;

$g(x,y)$: «Пряма x паралельна прямій y». Сформулюйте подані нижче висловлення і встановіть їх істинність: а) $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$; б) $\exists x\ \exists y\ \overline{p(x,y)}$; в) $\forall x\ \forall y\ (p(x,y)) \Rightarrow \overline{g(x,y)}$; г) $\forall x\ \forall y\ \big(p(x,y)\vee g(x,y)\big)$.

Розв'язання. а) Для будь-якої прямої x існує пряма y, яку пряма x перетинає. Це висловлення на множині прямих площини істинне.

б) Існують прямі x і y, які не перетинаються. Це висловлення істинне.

в) Для кожної прямої x і кожної прямої y істинне твердження: «Якщо прямі x і y перетинаються, то вони не паралельні».

г) Для кожної прямої x і кожної прямої y істинне твердження: «Прямі x і y або перетинаються, або паралельні».

Вправи

1. Дано X – множина прямих площини. На цій множині задані предикати $p(x,y)$: «Пряма x паралельна прямій y», $g(x,y)$: «Пряма x перетинає пряму y».

З'ясуйте, чи є ці предикати запереченням один одного.

2. Предикат $g(x)$ є запереченням предиката $p(x)$. Чи правильно, що при цьому предикат $p(x)$ є запереченням предиката $g(x)$? Відповідь обґрунтуйте, навівши приклад.

3. На множині дійсних чисел R заданий *предикат* $p(x)$:"$|x| \le 2$". Знайдіть множину істинності предиката $p(x)$ і зобразіть її на координатній прямій.

4. Знайдіть множину істинності предикатів, заданих на множині дійсних чисел: 1) $x+y=y+x$; 2) $x+3=4+x$; 3) $x^2+1=0$; 4) $x^2+1>0$.

5. Нехай X – множина студентів академгрупи. На цій множині задані предикати:

$p(x)$: «Студент x – відмінник»;

$g(x)$: «Студент x – спортсмен».

Складіть кон'юнкцію і диз'юнкцію цих предикатів.

6. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ заданий предикат $p(x)$: «Число x є дільником числа 30». Сформулюйте заперечення цього предиката, знайдіть множини істинності предикатів $p(x)$ і $\overline{p(x)}$, зобразіть їх кругами Ейлера–Венна.

7. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задані предикати $p(x)$: «Число x складене» і $g(x)$: «Число x непарне».

Складіть предикати $\overline{p(x)}$, $\overline{g(x)}$, $p(x)\wedge g(x)$, $p(x)\vee g(x)$, $\overline{p(x)\wedge g(x)}$, $\overline{p(x)\vee g(x)}$.

8. Областю визначення предикатів $p(x)$: «Фігура x – трикутник» і $g(x)$: «Фігура x – многокутник» є множина геометричних фігур. Сформулюйте кон'юнкцію і диз'юнкцію цих предикатів, знайдіть їх множини істинності і дайте графічну ілюстрацію за допомогою кругів Ейлера.

9. Предикати $p(x)$: «Число x кратне 3» і $g(x)$: «Число x кратне 4» визначені на множині $X = \{1, 2, 3, ..., 12\}$. Сформулюйте імплікацію даних предикатів, знайдіть множину її істинності, зобразіть кругами Ейлера.

10. На множині Z цілих чисел задані предикати:

$p(x)$: «x – число від'ємне»;

$g(x)$: «x – число складене»;

$h(x)$: «Число x кратне 4».

Прочитайте (запишіть) предикати, що відповідають таким виразам: 1) $p(x)\Rightarrow g(x)$; 2) $p(x)\Rightarrow h(x)$; 3) $h(x)\Rightarrow \overline{g(x)}$; 4) $p(x)\wedge g(x)\Rightarrow h(x)$.

11. Областю визначення предикатів $p(x)$: «Чотирикутник x – паралелограм» і $g(x)$: «У чотирикутнику x протилежні сторони паралельні» є множина чотирикутників. Сформулюйте еквіваленцію $p(x)\Leftrightarrow g(x)$ і зобразіть графічно її множину істинності кругами Ейлера.

12. Предикати $p(x)$: «Число x ділиться на 9» і $g(x)$ «Сума цифр числа x ділиться на 9», визначені на множині N натуральних чисел. Сформулюйте *еквіваленцію* $p(x)\Leftrightarrow g(x)$ і знайдіть її множину істинності.

13. Предикати $p(x)$: «Число x ділиться на 3» і $g(x)$: «Сума цифр числа x ділиться на 3» визначені на множині N натуральних чисел. З'ясуйте, чи рівносильні дані предикати.

14. Замість крапок поставте слова «необхідно», «достатньо», «необхідно і достатньо» у реченнях:

а) Щоб трикутник був рівнобедреним. ..., щоб він мав хоч би одну вісь симетрії.

б) Щоб число x було натуральним, ..., щоб це число було цілим.

в) Щоб громадянин мав право брати участь у виборах, ..., щоб йому виповнилось 18 років.

г) Щоб прямі перетинались, ..., щоб вони лежали в одній площині.

15. Записати, використовуючи квантори існування або загальності, дані предикати:

а) $p(x)$: «Число x – непарне» на множині простих чисел;

б) $g(x)$: «Число $x > y$» на множині дійсних чисел;

в) $f(x)$: «$x+5>1$» на множині цілих чисел;

г) $h(x,y)$: $x+y>y$» на множині дійсних чисел.

ТЕМА 7. НАТУРАЛЬНІ І ЦІЛІ НЕВІД’ЄМНІ ЧИСЛА. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ НАД ЦІЛИМИ НЕВІД’ЄМНИМИ ЧИСЛАМИ

7.1. Поняття про натуральне число і нуль.

Нагадаємо, що дві множини називаються рівнопотужними (еквівалентним), якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність, тобто якщо можна яким-небудь способом кожному елементу однієї множини поставити у відповідність один і тільки один елемент другої множини і навпаки.

У кількісній теорії натуральне число розглядається як кількісна характеристика деякого класу скінченних еквівалентних між собою множин, тобто як те спільне, незмінне (інваріант), що характеризує всі множини даного класу (незалежно від природи їх елементів).

Числа 1, 2, 3, 4, 5, …, *яким користуються для лічби предметів або для вказання порядкового номера того чи іншого предмета серед однорідних предметів, називаються натуральними*. Будь-яке натуральне число в десятичній системі числення записується за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наприклад, запис 2586 означає, що 2 – цифра тисяч, 5 – цифра сотень, 8 – цифра десятків і 6 – цифра одиниць, тобто $2586 = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6$. Взагалі, якщо a – цифра тисяч, b – цифра сотень, c – цифра десятків, і d – цифра одиниць, то маємо $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$.

Наприклад, число п’ять (5) – кількісна характеристика всіх множин, еквівалентних множині пальців однієї руки. Число нуль (0) є кількісна характеристика порожньої множини, тобто множини, що не містить жодного елемента (порожня множина позначається знаком $\varnothing$).

Якщо множина A має 5 елементів, то це позначають так: $n(A) = 5n$. Якщо B є правильною підмножиною A, тобто $B \subset A$ і $n(B) = b$, $n(A) = a$, то $b < a$. Відношення < не є симетричним, якщо $b < a$, то $\overline{a < b}$ (неправильно, що a менше b), $a > b$.

Натуральними числами називаються елементи будь-якої структури $(N_0, {}', 0)$ *, де* N_0 *– непорожня множина,* $0 \in N_0$ *,* $'$ *– символ унарної алгебрагічної операції (операції слідування), причому справедливі такі властивості (аксіоми Пеано).*

Аксіома 1. $(\forall a)\ (a' \neq 0)$, *тобто нуль не йде ні за яким натуральним числом*.

Аксіома 2. $(\forall a)\ (\exists!\, b)\ (b = a')$, *тобто для кожного натурального числа існує єдине натуральне число, що безпосередньо йде за даним числом (є наступним для даного числа)*.

Аксіома 3. $(\forall a)\ (\forall b)\ (a' = b' \Rightarrow a = b)$, *тобто кожне натуральне число може йти не більше як за одним натуральним числом*.

Аксіома 4. *Нехай підмножина* $M \subset N_0$ *має такі властивості:* 1) $0 \in M$; 2) $(\forall a)\ (a \in M \Rightarrow a' \in M)$*; тоді* $M = N_0$.

Найпростіші наслідки з аксіом Пеано:

1. $a \neq b \Rightarrow a' \neq b'$, тобто числа, що слідують за різними числами, також різні.

2. $(\forall a)\ (a \neq a')$, тобто кожне натуральне число відмінне від числа, що слідує за ним.

Якщо $b' = a$, то число b називається попереднім для a.

3. $(\forall a \neq 0)\ (\exists!\, b)\ (b' = a)$, тобто для кожного числа $a \neq 0$ існує єдине попереднє число.

7.2. Сума натуральних чисел. Закони додавання

Сумою натуральних чисел a, b, c,..., k називається натуральне число s, що є кількісною характеристикою множини S, якає об'єднанням скінченних множин A, B, C; ..., K без спільних елементів, що мають своїми кількісними характеристиками відповідно числа a, b, c, ... k. Числа a, b, c, ..., k називаються доданками, а операція знаходження їх суми – дією додавання: a + b + c + ... + k = = s, якщо $A \cup B \cup C \cup \ldots \cup K$ *– S, при умові, що перетин кожної пари цих множин є порожня множина:* $A \cap B = A \cap C = \cdots = A \cap K = B \cap C = \cdots \varnothing$.

Якщо одна з двох множин порожня, то, як відомо, об'єднанням цих двох множин буде друга з них $A \cup \varnothing = A$, звідси випливає, що $a + 0 = 0 + a = a$. Об'єднанням двох порожніх множин є порожня множина, тому $0 + 0 = 0$.

На основі даного означення та властивостей об'єднання множин доводяться основні закони додавання:

1) $(\forall a,\ b \in N)\ \exists!\ c \in N\ a + b = c$ – існування і однозначність суми;

2) $(\forall a,\ b \in N)\ a + b = b + a$ – комутативний закон (переставний);

3) $(\forall a,\ b,\ c \in N)\ (a+b)+c = a+(b+a)$ – асоціативний закон (сполучний);

4) $(\forall a,\ b,\ m \in N)\ a \lesseqgtr b \Leftrightarrow a+m \lesseqgtr b+m$ – закон монотонності.

Додаванням натуральних чисел називається бінарна операція (якщо вона існує), яка кожній парі чисел $(a, b) \in N_0^2$ *зіставляє єдине число* $a+b \in N_0$ *(суму цих чисел) і має такі властивості:*

1) $(\forall a)\ (a+0=a)$;

2) $(\forall a)\ (\forall b)\ (a+b' = (a+b)')$.

У початкових класах не всі ці закони явно формулюються, але фактично використовуються всі (якщо не самі закони, то наслідки їх). На конкретних множинах учні переконуються в тому, що при додаванні двох натуральних чисел дістаємо натуральне число, притому єдине. Ця властивість поширюється на кількість доданків більше двох.

Уже в першому класі в процесі розв'язування задач діти роблять висновок, що легше, наприклад, до 7 додати 2, ніж до 2 додавати 7.

Розглянемо приклади.

1. (проблемне завдання для першокласників). В одному кутку приміщення лежить купа ящиків, а в другому – один такий же ящик. Треба скласти їх в одну купу. Один учень переніс одного ящика, поклав його на купу і навіть не стомився, стоїть посміхається. Другий учень переносить ящики з купи туди, де лежав один ящик. Стомився, став відпочити, а ящиків ще багато переносити. Який з цих учнів кмітливіший? (наводимо два рисунки).

У першому і другому класах розглядаються правила додавання числа до суми і суми до числа та суми до суми, які є наслідком сполучного закону додавання. Ці правила є основою алгоритмів додавання, тому учні повинні їх свідомо і міцно засвоїти. Для активізації їх мислення доцільно два перші розглянути на одному уроці на одній і тій самій ілюстрації, перефразувавши зручно задачу.

2. На дереві сиділо 4 і 3 пташки. До них прилетіло ще 2 пташки. Скільки всього пташок стало на дереві?

Виконаємо обчислення трьома способами:

1) $(4+3)+2 = 7+2 = 9$;

2) $(4+3)+2 = (4+2)+3 = 6+3 = 9$;

3) $(4+3)+2 = 4+(3+2) = 4+5 = 9$.

Відповідно до ілюстрації учитель, користуючись прийомом укрупнення дидактичних одиниць, пропонує учням видозмінену задачу: «На дереві сиділо 2 пташки. До них прилетіло ще 4 пташки і 3 пташки. Скільки всього пташок стало на дереві?»

Майже всі нададуть правильну відповідь:

– Теж 9!

– Чому ви так думаєте?

– Тому, що тут все так само, тільки навпаки.

Розв'язання запишемо розгорнуто трьома способами:

1) $2 + (4 + 3) = 2 + 7 = 9$;
2) $2 + (4 + 3) = (2 + 4) + 3 = 6 + 3 = 9$;
3) $2 + (4 + 3) = (3 + 2) + 4 = 5 + 4 = 9$.

Після розв'язування ще двох задач, обчислення у яких виконували тільки найбільш раціональним способом, формулюємо загальне правило: «Щоб додати число до суми або суму до числа, досить додати це число до одного з доданків суми, а потім додати другий доданок». І вже випадок «Додавання суми до числа» з громіздкими ілюстраціями до нього є зайвим. У дітей формується узагальнююче мислення, глибше розкриваються взаємозв'язки між окремими властивостями дій:

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c) = c + (a + b).$$

Це правило є теоретичною основою додавання одноцифрового числа до двоцифрового і навпаки. Теоретичною основою додавання двоцифрових чисел є правило додавання суми до суми:

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c).$$

3. (для першокласників). В одному класі 17 дівчаток і 19 хлопчиків, а в другому – 13 дівчаток і 21 хлопчик. Скільки всього учнів у цих двох класах?

Розв'язання

1-й спосіб:

Шукане число складається з усіх учнів першого класу $(17 + 19)$ і усіх учнів другого класу $(13 + 21)$, тобто:

$x = (17 + 19) + (13 + 21)$,
$x = 36 + 34$,
$x = 70$.

2-й спосіб

Шукане число складається з усіх дівчаток першого і другого класів $(17 + 13)$ і усіх хлопчиків обох класів $(19 + 21)$, тобто:

$x = (13 + 17) + (19 + 21)$,
$x = 30 + 40$,
$x = 70$.

Цілком очевидно, що 2-й спосіб обчислень більш раціональний.

Звичайно, навіть ці три формули не охоплюють можливих варіантів мислення учнів при розв'язуванні конкретних подібних задач.

Наприклад: Після вивчення теми «Додавання числа до суми» доцільно запропонувати задачу: «У фермера було 9 вантажних машин і 8 легкових». Фермер придбав ще 3 машини. Скільки всього машин стало?»

Розв'язання запишемо виразом $(8 + 9) + 3$, значення якого обчислимо трьома зазначеними вище способами. Доцільно запропонувати й інший розв'язок: уявимо собі, що фермер придбав одну вантажну машину і дві легкових, тоді розв'язання матиме вигляд:

$$(9 + 8) + 3 = (9 + 1) + (8 + 2) = 10 + 10 = 20.$$

Це спосіб доповнення одного чи кількох доданків до «круглого числа».

Наприклад: $(397 + 289) + 114 = (397 + 3) + (289 + 11) + 100 = 400 + $ $+300 + 100 = 800$.

Звичайно, усі ці операції (розчленування і об'єднання) виконуються мисленно, записується лише результат. Розвиток гнучкості мислення учнів, кмітливості є важливим компонентом при виконанні не тільки додавання, а й інших арифметичних операцій.

Властивість адитивності рівностей і нерівностей

Якщо $a > b$,	якщо $a = b$,	якщо $a < b$,
і $c > d$,	і $c = d$,	і $c < d$,
то $\overline{a + c > b + d}$;	то $\overline{a + c = b + d}$;	то $\overline{a + c < b + d}$.

Тобто рівності або нерівності однакового знака можна почленно додавати. Умовно це можна записати так:

$$a \gtreqless b \wedge c \gtreqless d \Rightarrow a + c \gtreqless b + d,$$

де знаки «>», «=», «<» у правій і лівій частинах беруться однакові.

А чи можна почленно додавати нерівності протилежного знака?

Приклад. а) $4 > 2$, $5 < 6$, $\overline{4 + 5 > 2 + 6}$, $9 > 8$; б) $4 > 2$; $5 < 10$, $\overline{4 + 5 < 2 + 10}$, $9 < 12$.

Як бачимо, в одному випадку зберігається знак першої нерівності, в другому – другої, а можна при додаванні нерівностей дістати рівність.

7.3. Віднімання цілих невід'ємних чисел.

Розглянемо дві множини A і $B \subset A$. Нехай $n(A) = a$ і $n(B) = b$. Позначимо різницю множин A і B через C: $A \setminus B = C$, $n(C) = c$.

Різницею натуральних чисел a і b називається число c, що є потужністю множини C, яка є різницею множини A і її підмножини B.

Знаходження за даними двома числами їх різниці навивається дією віднімання: $a - b = c$; a – зменшуване, b – від'ємник. З означення випливає, що дія віднімання можлива тоді і тільки тоді, коли $a > b$, в множині N або $a \geq b$ в множині N_0. Оскільки $A \setminus A = \varnothing$ то $a - a = 0$.

Як відомо, у випадку, коли $B \subset A$, різниця C є доповненням підмножини B до множини A (див. рис. 9), тобто $A = B \cup C$, а отже, $a = b + c$, тобто дія віднімання є дія, обернена додаванню: дія, яка полягає в знаходженні невідомого доданка c за відомою сумою a і другим доданком b. Уже в першому класі діти знайомляться з умовою виконання дії віднімання в множині цілих невід'ємних чисел і з однозначністю її виконання. Зв'язок між діями додавання і віднімання у підручнику розкривається на конкретних прикладах.

Приклад. Записати результат, не виконуючи обчислень:

а) $(62-48)+48=$; б) $(27+38)-38=$.

Тут результати записуються на основі розуміння дії віднімання як дії, оберненої додаванню, що взагалі можна виразити такими рівностями:

$$(a-b)+b=a; \quad (a+b)-b=a.$$

Теоретичною основою віднімання однозначного числа від двозначного і віднімання двозначних та многозначних чисел є віднімання числа від суми, суми від числа або суми від суми. Ці теоретичні положення розглядаються з учнями, починаючи з першого класу, на конкретних задачах у вигляді відповідних правил. З метою забезпечення більш міцних обчислювальних навичок в учнів доцільно ці правила розглядати у тісному зв'язку з відповідними правилами додавання: «Віднімання числа від суми» – з «Додаванням числа до суми», «Віднімання суми від суми» – з «Додаванням суми до суми» і т. д.

Приклад. Для шкільного буфету привезли молоко в двох бідонах: в одному 14 л, в другому 8 л. На першій зміні на сніданок учням витратили 7 л. Скільки літрів молока залишилося для другої зміни?

Розв'язання записують за допомогою математичного виразу, значення якого обчислюють трьома способами:

$$(14+8)-7=\begin{cases}22-7=15,\\14+(8-7)=14+1=15,\\(14-7)+8=7+8=15,\end{cases}$$

Учні можуть міркувати так.

1-й спосіб. Спочатку можна дізнатися, скільки літрів молока в обох бідонах, а потім – скільки літрів молока залишилося.

2-й спосіб. Якщо для першої зміни молоко брали тільки з другого бідона, то можна дізнатися, скільки залишилося в ньому літрів молока, і додати кількість літрів молока першого бідона.

3-й спосіб. Аналогічний, тільки при умові, що для першої зміни молоко брали тільки з першого бідона.

Приклад. У хованки гралось 12 дітей. До них приєдналось ще 3 дівчинки і 2 хлопчики. Скільки усіх дітей стало гратись у хованки?

Діти самостійно записують вираз $12+(3+2)$ і трьома способами обчислюють його значення, коментуючи усно. Після цього складають задачу з оберненим ходом міркувань при розв'язуванні (не змішувати з оберненою задачею!).

Приклад. У хованки гралось 17 дітей. Потім 3 дівчинки і 2 хлопчики залишили гру. Скільки дітей продовжувало грати у хованки?

Розв'язання.

1) $17-(3+2)=17-5=12;$

2) $17-(3+2)=(17-3)-2=14-2=12;$

3) $17-(3+2)=(17-2)-3=15-3=12.$

Основна властивість різниці.

Якщо зменшуване і від'ємник одноразово збільшити або зменшити на одне і те саме число, то різниця не зміниться: $a - b = c \Leftrightarrow (a + m) - (b + m) = c$.

На цій властивості заснований прийом обчислення – одночасне заокруглення зменшуваного і від'ємника.

Приклад.

21 006 – 5006 = 21 тис – 5 тис. = 16 000;

397 – 297 = 400 – 300 = 100.

Проте частіше доводиться використовувати зміну різниці при зміні лише одного із компонентів, особливо від'ємника.

Приклад. 423 – 199 = 423 – 200 + 1 (відняли одиницю зайву, тому різниця зменшилась на одиницю, а щоб різниця не змінилась, треба цю одиницю додати). Щоб не забути про цю одиницю, зручніше зробити так: одночасно збільшити на одиницю зменшуване і від'ємник: 423 – 199 = 424 – 200 = 224.

Приклади розв'язування задач

1. Довести: $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Доведення складається з двох частин:

1) доведемо, що рівність сум $a + d = b + c$ є достатньою умовою для виконання рівності різниць: $a - b = c - d$, тобто що $a + d = b + c \Leftrightarrow a - b = c - d$;

$a + d = b + c$, звідси за означенням різниці маємо: $a = (b + c) - d$. Перепишемо останню рівність так: $a = b + (c - d)$ – на основі правила додавання різниці до числа. Звідси за означенням різниці: $a - b = c - d$.

Таким чином, довели, що із рівності $a + d = b + c$ випливає рівність $a - b = c - d$.

2) Доведемо, що рівність $a + d = b + c$ є необхідною умовою для рівності $a - b = c - d$, тобто що $a - b = c - d \Rightarrow a + d = b + c$.

$a - b = c - d$, звідси: $a = (c - d) + b = b + (c - d) = (b + c) - d$ або $a + d = b + c$. Отже, $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Тим самим доведено, що дана умова є необхідною і достатньою для рівності двох різниць.

Аналогічно можна довести такі еквівалентності:

$$a - b > c - d \Rightarrow a + d > b + c;$$
$$a - b < c - d \Rightarrow a + d < b + c.$$

2. Поставити знак «>», «=», «<», не виконуючи віднімання:

а) $343 - 256 \ldots 544 - 547$;

б) $892 - 648 \ldots 352 - 108$;

в) $1546 - 789 \ldots 1093 - 454$.

Розв'язання.

а) в обох частинах рівності маємо випадки віднімання з переходом через десяток, і тут легше виконати додавання усно: $343 + 547 = 800$ і $544 + 256 = 800$. Отже, дані різниці рівні.

б) розв'язання виконується аналогічно.

в) відразу видно, що перша сума $1546 + 454 = 2000$, друга менша за 2000 ($1093 + 789 < 2000$), отже, за критерієм порівняння перша різниця більше другої.

3. Знайти логічну помилку у міркуваннях учня при розв'язуванні задачі: «У трамваї їхало 32 пасажири. На першій зупинці вийшло 8 пасажирів, а зайшло – 7. Скільки пасажирів стало в трамваї?»

Учень: Спочатку необхідно визначити, скільки залишилось пасажирів після того, як 8 пасажирів вийшло. Прокоментуйте такий спосіб розв'язання:

$$32 - (8 - 7) = 32 - 1 = 31.$$

4. Обчислити найбільш раціональним способом (усно).

Прийом обґрунтувати:

а) 3997 + 1586 = ;
б) 7824 – 799 = ;
в) 568 + 986 + 432 + 5014 = ;
г) 67 245 + (2839 + 755) = ;
д) (1096 + 839) – 1835 = ;
є) 65 438 – (5800 + 438) = .

Розв'язання.

а) Використаємо властивість суми: сума не зміниться, якщо один доданок збільшити, а другий зменшити на одне і те ж число, тобто $a + b = (a + k) + +(b - k) = (a - k) + (b + k)$. На цій властивості заснований прийом округлення одного додатку за рахунок другого. У нашому випадку віднімемо 3 від другого доданку і додамо до першого. Записати це можна так:

$$3997(+3) + 1586(-3) = 4000 + 1583 = 5583$$

(це розв'язування з поясненням, всі міркування слід проводити усно і записувати тільки результат).

б) Використаємо основну властивість різниці: $a - b = (a + k) - (b + k)$. Додамо до зменшуваного і до від'ємника по одиниці, щоб округлити від'ємник до 800:

$$7824(+1) - 799(+1) = 7825 + 800 = 7025.$$

в) Застосуємо комутативний і асоціативний закони додавання:

$$568 + 986 + 432 + 5014 = (568 + 432) + (986 + 5014) =$$
$$= 1000 + 6000 = 7000$$

г) Застосуємо правило додавання суми до числа (наслідок із переставного і сполучного законів додавання):

$$67245 + (2839 + 755) = (67245 + 755) + 2839 = 68000 + 2839 = 70839.$$

д) Застосуємо правило віднімання суми від суми, зобразивши від'ємник як $1000 + 835$:

$$(1096 + 839) - 1835 = ((1096 - 1000) + (839 - 835) = 96 + 4 = 100.$$

є) $8438 - (5800 + 438) = (8438 - 438) - 5800 = 8000 - 5800 = 2200.$

5. Розв'язати рівняння на основі зв'язку між діями додавання і віднімання:

а) $68 + x = 112;$ г) $x + 99 = 299 + 357;$

б) $x - 42 = 256$; д) $x - 48 = 659 + 252$;
в) $77 - x = 15$; є) $191 - x = 91 + 58$.

Розв'язання.

а) Знаходимо невідомий доданок:

$$68 + x = 112;\quad x = 112 - 68;\quad x = 44.$$

Перевірка. 68 + 44 = 112.

б) Знаходимо невідоме зменшуване:

$$x - 42 = 256;\quad x = 256 + 42;\quad x = 298.$$

Перевірка. 298 – 42 = 256.

в) Знаходимо невідомий від'ємник:

$$77 - x = 15;\quad x = 77 - 15;\quad x = 62.$$

Перевірка. 77– 62 = 15.

г) $x + 99 = 299 + 357$.

Тут недоцільно заміняти суму двох чисел у правій частині її значенням, а зручніше відняти від суми число

$$x = (299 + 357) - 99;\ x = (299 - 99) + 357;\ x = 200 + 357;\ x = 557.$$

Перевірка. 557 + 99 = 299 + 357.

Аналогічно можна розв'язати рівняння у випадках д), є).

Учні здебільшого помиляються не в обчисленні, а у виборі дії для запису невідомого у вигляді виразу. Тому доцільно привчити їх відразу робити перевірку на основі поняття дії, оберненої даній: а)$x - 42 = 256$; $x = 256 + 42$.

Перевірка (усно). (256 + 42) – 42 = 256 і т. д.

6. Задача на знаходження невідомого за двома різницями. Цей вид задач розглядається ще в початкових класах.

Поїзд вирушив о 8 год ранку, а назустріч йому о 9 год ранку з такою ж швидкістю вийшов другий поїзд. Перший пройшов до зустрічі 420 км, а другий – 360 км. Знайти швидкість їх руху.

Розв'язання. Чому перший поїзд пройшов більшу відстань до зустрічі, ніж другий? Тому, що він вирушив на годину раніше $(9 - 8 = 1)$. Отже, досить визначити, на скільки кілометрів він пройшов більше, це й буде шукана швидкість:

$$420 - 360 = 60 \text{ (км/год).}$$

7. У двох ящиках 26 кг яблук. Коли з першого ящика переклали в другий 2 кг, то в обох ящиках яблук стало порівну. Скільки кілограмів яблук було у кожному ящику спочатку? Які властивості суми використовуються для розв'язання даної задачі?

Розв'язання. Використаємо властивість: сума двох чисел не зміниться, якщо одне з них зменшити на кілька одиниць, а друге збільшити на стільки ж одиниць. Після перекладання яблук з одного ящика в другий кількість яблук у двох ящиках не змінилась. Отже, в кожному ящику стало по 13 кг (26 : 2). У першому було 15 кг (13 + 2), а у другому – 11 кг (13 – 2).

Перевірка. Було: 15 + 11 = 26 (кг) у двох ящиках. Стало: 15 – 2 = 11 + 2 (у кожному ящику по 13 кг).

8. Задача-жарт. Батькові 40 років, а синові – 15 років. Через скільки років батько буде на 30 років старший за сина? На 20 років?

Відповідь. Різниця років батька й сина з часом не зміниться, тобто була і залишається сталою 40 – 15 = 25 (років), отже, вона не може бути ні 30, ні 20 років.

9. Як зміниться сума двох чисел, якщо один доданок збільшимо на 10808, а другий зменшимо на 10101?

10. Як зміниться різниця, якщо зменшуване збільшити на 5005, а від'ємник зменшити на 5005?

7.4. Множення цілих невід'ємних чисел.

Існує два підходи до введення добутку натуральних чисел: а) через поняття декартового добутку множин; б) через поняття суми рівних між собою натуральних чисел, що зв'язано з об'єднанням скінченних еквівалентних між собою множин.

Множенням натуральних чисел називається бінарна операція (якщо вона існує), яка кожній парі $(a, b) \in N_0^2$ *зіставляє єдине число* $ab \in N_0$ *(добуток цих чисел) і має такі властивості:* $(\forall a)\ (a \cdot 0 = a)$; $(\forall a)\ (\forall b)\ (ab' = ab + a)$.

Добутком натурального числа m на число n називається число елементів декартового добутку множини A, що має m елементів, на множину B, що має n елементів.

Нехай $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ і $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

$$n(A \times B) = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n} = m \cdot n.$$

		A			
B	α_1	α_2	…	α_m	
β_1	(α_1, β_1)	(α_2, β_1)	…	(α_m, β_1)	n рядків
β_2	(α_1, β_2)	(α_2, β_2)	…	(α_m, β_2)	
…	…	…	…	…	
β_n	(α_1, β_n)	(α_2, β_n)	…	(α_m, β_n)	

m елементів у рядку

Добутком натурального числа m на натуральне число n називається сума n доданків, кожен із яких в m.

Нехай маємо *n* еквівалентних множин, кожна потужністю *m:*

$A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $A_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$, …, $A_n = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$,
тоді об'єднання $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$; $n(S) = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n}$ або $S = m \cdot n$.

Саме так, на конкретних задачах вводять поняття про дію множення у початкових класах.

Приклад. Зошит коштує 3 грн. Скільки коштує 9 таких зошитів?

Розв'язання. Не маючи уявлення ще про дію множення, діти записують розв'язання дією додавання: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 +3 = 27.

Учитель звертає увагу, що так обчислювати і записувати довго навіть при такому невеликому числу доданків. Якщо, наприклад, купили для класу 40 зошитів? Тоді запис не вмістився б у рядок, умовились записувати коротше: $3 \cdot 9 = 27$ і називати дію знаходження суми рівних між собою доданків дією множення, а результат множення – *добутком*. Число, яке беремо доданком, називається *множеним* (його множимо), а число, яке показує кількість доданків – *множником* (на нього множимо), разом ці числа називаються *співмножниками*.

Закони множення

1) $(\forall a,\ b \in N)\ \exists c!\ |c \in N \wedge ab = c$ – закон існування і єдиності добутку;

2) $(\forall a,\ b \in N)\ ab = ba$ – комутативний (переставний) закон множення;

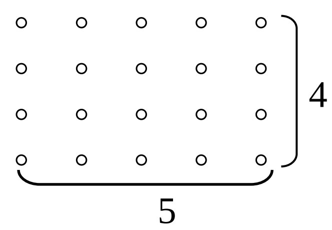
3) $(\forall a,\ b,\ c \in N)\ (ab)c = a(bc)$ – асоціативний (сполучний) закон множення;

4) $(\forall a,\ b,\ c \in N)\ (a + b)c = ac + bc$ – дистрибутивний (розподільний) закон множення відносно суми;

5) $(\forall a,\ b,\ m \in N)\ a \gtreqless b \Leftrightarrow am \gtreqless bm$ – закон монотонності множення відносно рівності та нерівності (знаки «>», «=», «<» у правій і лівій частинах треба брати у строгій відповідності).

У початкових класах ці закони розглядають на конкретних задачах, а потім застосовують при усних і письмових обчисленнях.

Приклад. Учні посадили біля школи 4 ряди дерев по 5 дерев у кожному ряду. Скільки всіх дерев посадили учні?



Учні схематично зарисовують план посадженого садочка.

Кількість дерев на схемі підраховують двома способами:

по рядках: $5 \cdot 4 = 20$;

по стовпчиках: $4 \cdot 5 = 20$.

Роблять висновок: $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$, який після наведення кількох інших прикладів узагальнюється.

Приклад. Щоб виростити саджанці дуба, учні посадили жолуді 5 рядів по 6 ямок у кожному ряду. Скільки жолудів пішло на посадку, якщо у кожну ямку клали по 3 жолуді?

Розв'язання учні виконують двома способами:

1-й спосіб

1) Скільки жолудів пішло на один рядок? $6 \cdot 3 = 18$

2) Скільки всього посадили жолудів? $18 \cdot 5 = 90$

2-й спосіб

1) Скільки було усіх ямок? $6 \cdot 5 = 30$

2) Скільки всього посадили жолудів? $3 \cdot 30 = 90$

Кожен спосіб розв'язування записуємо за допомогою математичного виразу, значення якого обчислюємо двома способами:

$$(3 \cdot 6) \cdot 5 = 90; \quad 3 \cdot (6 \cdot 5) = 90$$

Робимо висновок: $(3 \cdot 6) \cdot 5 = 3 \cdot (6 \cdot 5)$, який після розгляду ще кількох аналогічних прикладів узагальнюємо:

Величина добутку кількох натуральних чисел не зміниться, якщо два будь-які співмножники сполучити (об'єднати) і замінити їхнім добутком.

Учні самі наводять приклади, що ілюструють дану властивість.

Приклад. У класі 3 ряди парт по 5 парт у кожному ряду і за кожною партою сидить по 2 учні. Скільки всього Учнів у класі?

$$\underbrace{(2 \cdot 5)}_{\text{учнів в одному рядку}} \cdot 3 = 2 \cdot \underbrace{(5 \cdot 3)}_{\text{усіх парт}}$$

Приклад. Обчислити найбільш раціональним способом, застосовуючи переставний і сполучний закони множення:

1) $4 \cdot 67 \cdot 25 =$; 2) $5 \cdot 456 \cdot 2 =$; 3) $8 \cdot 49 \cdot 125 =$.

Розв'язання.

1) $4 \cdot 67 \cdot 25 = 67 \cdot (4 \cdot 25) = 67 \cdot 100 = 6700$;
2) $5 \cdot 456 \cdot 2 = 456 \cdot (5 \cdot 2) = 456 \cdot 10 = 4560$;
3) $8 \cdot 49 \cdot 125 = 49 \cdot (8 \cdot 125) = 49 \cdot 1000 = 49000$.

Приклад. (для з'ясування розподільного закону множення відносно суми). Мама купила трьом дітям олівці та фломастери. Скільки заплатила вона за 3 комплекти, якщо олівці коштують 2 грн., а фломастери – 5 грн.

Розв'язання.

1-й спосіб

1) (5 + 2) грн. – коштує один комплект (олівці та фломастери);
2) (5 + 2) · 3 (грн.) – коштує вся покупка.

2-й спосіб

1) 2 · 3 (грн.) – коштує три олівці;
2) 5 · 3 (грн.) – коштує три фломастери;
3) 5 · 3 + 2 · 3 (грн.) – коштує вся покупка.

Висновок. (5 + 2) · 3 = 5 · 3 + 2 · 3
(7 · 3 = 15 + 6; 21 = 21)

Після розв'язання аналогічних прикладів узагальнюємо: щоб помножити суму на число, досить на це число помножити кожен доданок і утворені добутки додати:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

Приклад. Обчислити усно найбільш зручним способом:

1) 88 · 77 + 77 · 12;
2) 36 · 48 + 14 · 48;
3) 78 · 62 – 67 · 62.

Розв'язання.

Застосуємо розподільний закон множення, прочитавши його справа наліво (відносно суми і різниці):

$$ac + bc = (a + b) \cdot c, \qquad ac - bc = (a - b) \cdot c.$$

1) $88 \cdot 77 + 77 \cdot 12 = (88 + 12) \cdot 77 = 100 \cdot 77 = 7700$;
2) $36 \cdot 48 + 14 \cdot 48 = (36 + 14) \cdot 48 = 50 \cdot 48 = 100 \cdot 24 = 2400$;
3) $78 \cdot 62 - 67 \cdot 62 = (78 - 67) \cdot 62 = 11 \cdot 62 = (10 + 1) \cdot 10 = 62 \cdot 10 + 62 \cdot 1 = 682$.

***Наслідки із законів множення*.**

1. Щоб помножити добуток на число або, навпаки, число на добуток, досить помножити на це число один із співмножників добутку і результат помножити на інший співмножник і т. д.

$$(abc) \cdot d = (ad) \cdot bc = (bd) \cdot ac = \ ...$$

Приклад. $(7 \cdot 3 \cdot 15) \cdot 4 = (15 \cdot 4) \cdot 7 \cdot 3 = 60 \cdot 7 \cdot 3 = 420 \cdot 3 = 1260.$

2. Щоб помножити добуток на добуток, досить перегрупувати співмножники для зручності обчислень в будь-якому порядку і виконати всі обчислення.

Приклад. $(125 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 37) = (125 \cdot 8) \cdot (37 \cdot 3) = 100 \cdot 111 = 111000.$

3. Якщо один із співмножників збільшити (зменшити) у кілька разів, то і добуток їх збільшиться (зменшиться) у стільки ж разів:

$$ab = c \Rightarrow (an) \cdot b = c \cdot n$$

У третьому класі ця властивість ілюструється за допомогою задачі на обчислення площі прямокутника.

Приклад. У фермера квітами зайнято дві ділянки прямокутної форми однакової довжини. Ширина першої ділянки 10 м, а її площа 400 м^2. Яка площа другої ділянки, якщо ширина її 30 м?

Розв'язання.

1-й спосіб

1) Яка довжина кожної ділянки? 400 : 10 = 40 (м).
2) Яка площа другої ділянки? $40 \cdot 30 = 1200$ (м^2).

2-й спосіб

1) У скільки разів ширина другої ділянки більша, ніж першої?

30 : 10 = 3 (рази).

2) Яка площа другої ділянки?

$400 \cdot 3 = 1200$ (м^2).

Розв'язуючи задачу другим способом, учні роблять висновок, що коли ширина прямокутника збільшилася в 3 рази, а довжина не змінилась, то й площа збільшиться в 3 рази.

Учитель змінює числові дані так, щоб задачу легше було розв'язувати другим способом. *Наприклад*, якщо взяти площу першої ділянки 312 м^2, ширину першої ділянки 13 м, а другої – 39 м, то видно, що ширина збільшилася в 3 рази, а значить, присталій довжині площа збільшиться в 3 рази, і усно знаходять її:

$312 \cdot 3 = 936$ (м^2).

4. Властивість мультиплікативності (наслідок із закону монотонності множення): *на множині натуральних чисел рівності, а також нерівності одного знака можна почленно перемножати, зберігаючи той самий знак:*

$$\begin{array}{llllll} \text{якщо} & a = b, & \text{якщо} & a > b, & \text{якщо} & a < b, \\ \text{і} & c = d, & \text{і} & c > d, & \text{і} & c < d, \\ \text{то} & \overline{ac = bd}; & \text{то} & \overline{ac > bd}; & \text{то} & \overline{ac < bd}. \end{array}$$

Слід пам'ятати, що дана властивість не поширюється на випадок від'ємних чисел: нерівності з від'ємними членами почленно перемножати не можна, бо в одних випадках знак нерівності зберігається, в інших – змінюється на протилежний.

Приклад.

$$\begin{array}{ll} -4 < 6, & -4 < 2, \\ -4 < 5, & -2 < 3, \\ \overline{8 < 30} \text{ – істинне;} & \overline{8 < 6} \text{ – хибне } 8 > 6. \end{array}$$

5. *При множенні степенів однієї основи показники степенів додаються:*

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} = a^{m=n}.$$

При піднесенні степеня до степеня показники степенів перемножаються:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Приклад. Записати найбільше число трьома дев'ятками.

Розв'язання. Розв'язком даного завдання у початкових класах, де Дія піднесення до степеня не вивчається, буде число 999. Старшокласники часто дають неправильну відповідь: 99^9 або 9^{99}, або $(9^9)^9$. Правильна відповідь: $9^{(9^9)}$. Довести, що $9^{(9^9)} > (9^9)^9$. Для цього досить замінити праву частину нерівності за правилом піднесення степеня до степеня: $(9^9)^9 = 9^{81} = 9^{(9^2)}$. Оскільки $9^9 > 9^2$, то і $9^{(9^9)} > 9^{(9^2)}$. Отже, як бачимо, дія піднесення до степеня не має асоціативної властивості.

Не має місця і властивість дистрибутивності дії піднесення до степеня відносно додавання та віднімання:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n, \ \ (a - b)^n \neq a^n - b^n.$$

6. Властивість дистрибутивності відносно множення степенів: степінь добутку дорівнює добутку степенів:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

7.5. Ділення на множині цілих невід'ємних чисел

Діленням числа a на число b називається операція, яка числам $a, b \in N_0$ *зіставляє число* $\frac{a}{b} \in N_0$ *(або a : b), яке називається їхньою часткою, таке що*

$$\frac{a}{b} b = a.$$

Діленням натурального числа a на натуральне число b називається дія, яка полягає в знаходженні такого натурального числа c, щоб задовольнялась умова: a = cb.

Число *a* називається **діленим**, *b* – **дільником**, *c* – **часткою**. Із означення видно, що ділене дорівнює частці, помноженій на дільник. Ця залежність використовується в початкових класах при розв'язуванні найпростіших рівнянь:

$$ax = b, \qquad x : k = c, \qquad n : x = p,$$
$$x = b : a; \qquad x = ck; \qquad x = n : p.$$

Підставимо, наприклад, у друге рівняння замість x вираз ck, що є розв'язком рівняння. Дістанемо: $ck : k = c$ – тотожність, яка показує, що дія ділення є оберненою до дії множення (тобто, коли c помножили на k, а потім поділили на k, то так і залишилось c).

З означення видно, що дія ділення можлива лише тоді, коли ділене є кратним дільника. Методом від супротивного неважко довести, що коли частка від ділення a на b існує, то вона єдина.

Практично дія ділення використовується при розв'язуванні двох основних видів задач:

1) Задачі на ділення на рівні частини.

Приклад. Катя розклала 8 яблук на дві тарілки порівну. По скільки яблук у кожній тарілці?

Розв'язання. 8 : 2 = 4 (яблука).

2) Задачі на ділення на вміщення.

Приклад. Катя розклала на тарілки 8 яблук по 4 на кожну тарілку. Скільки тарілок використано?

Розв'язання. 8 : 4 = 2 (тарілки).

Теоретико-множинний зміст задач першого виду: скінченну множину A треба розбити на певне число (2, 3, 4 і т. д.) еквівалентних між собою підмножин, визначити потужність цих підмножин. В задачах другого виду дано деяку множину B, що є власною підмножиною множини A, і треба визначити, скільки всіх підмножин, еквівалентних B і таких, що не мають спільних елементів, має множина A.

Обидва ці види задач ведуть до подання скінченної множини A у вигляді об'єднання деяких еквівалентних між собою множин:

$$A = \underbrace{B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_c}_{c\ \text{доданків}},$$

$$B_1 \sim B_1 \sim \cdots \sim B_c \wedge B_i \cap B_j = \varnothing, \text{ де}$$
$$i,\ j = 1, 2, \ldots, c,\ i \neq j.$$

Перехід до чисельної характеристики цих множин приводить до узагальнення цих двох видів задач: до поняття нової арифметичної дії – ділення натуральних чисел:

а) Число a треба зобразити у вигляді суми c однакових доданків, величину яких треба знайти:

$$a = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{c\ \text{доданків}}, \text{ або } a = x \cdot c$$

б) Число a треба зобразити у вигляді суми кількох доданків, кожен з яких b.

Визначити кількість цих доданків:

$$a = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{x \text{ доданків}}, \text{ або } a = b \cdot x$$

В обох випадках задача зводиться до знаходження невідомого співмножника за відомим добутком і другим співмножником.

Дією ділення розв'язуються також прості задачі на зменшення числа у кілька разів та на кратне порівняння чисел, тобто визначення, у скільки разів одне число більше або менше від другого. Всі ці види задач між собою взаємно зв'язані.

Розподільний закон ділення відносно суми (різниці) аналогічний розподільному закону множення. Теоретико-множинний смисл цих законів можна наочно розкрити на конкретних задачах.

Приклад. Мама в магазині купила та порівну розподілила між трьома своїми дітьми 12 яблук і 18 груш. Скільки фруктів дісталося кожній дитині?

Розв'язання.

1-й спосіб

(12 + 18) : 3 = 30 : 3 = 10.

Спочатку дізналися, скільки всього фруктів купила мама, потім скільки яблук та груш одержала кожна дитина.

2-й спосіб

12 : 3 + 18 : 3 = 4 + 6 = 10.

Спочатку дізналися, скільки яблук отримала кожна дитина, потім скільки груш, скільки всього фруктів.

З учнями доцільно розглянути ці два способи за допомогою ілюстрації. Після цього записують:

(12 + 18) : 3 = 12 : 3 + 18 : 3.

Після розв'язування аналогічних задач на ділення суми і різниці на число доцільно записати цей закон паралельно з розподільним законом множення відносно суми та різниці в загальному вигляді:

$$(a \pm b)c = ac \pm bc;$$
$$(a \pm b): c = a: c \pm b: c.$$

Приклад. Обчислити зручним способом:

а) (36 + 64) : 10; б) (36 + 66) : 6; в) 72 : 4; г) 78 : 3.

Розв'язання.

а) (36 + 64) : 10 = 100 : 10 = 10;

б) (36 + 66) : 6 = 36 : 6 + 66 : 6 = 6 + 11 = 17;

в) 72 : 4 = (80 – 8) : 4 = 80 : 4 – 8 : 4 = 20 – 2 = 18;

г) 78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 60 : 3 + 18 : 3 = 20 + 6 = 26.

Ділення добутку на число і числа на добуток:

$$ab: c = (a: c) \cdot b = (b: c) \cdot a,$$
$$a: (bc) = (a: b): c = (a: c): b.$$

Приклад.

$$(48 \cdot 23) : 24 = (48 : 24) \cdot 23 = 2 \cdot 23 = 46,$$
$$(37 \cdot 36) : 12 = 37 \cdot (36 : 12) = 37 \cdot 3 = 111.$$

Ділення частки на число і числа на частку:

$$(a:b):c = (a:c):b = a:(bc),$$
$$a:(b:c) = (ac):b = (a:b) \cdot c.$$

Приклад.

$$(290 : 5) : 29 = (290 : 29) : 5 = 10 : 5 = 2,$$
$$405 : (81 : 2) = (405 \cdot 2) : 81 = 810 : 81 = 10.$$

Окремі випадки множення і ділення:

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$ $\quad 0:a = 0,$ якщо $a \neq 0,$
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$ $\quad a:0$ – не має смислу, якщо $a \neq 0,$
$0 \cdot 0 = 0.$ $\quad 0:0$ – невизначеність.

Для існування частки $\frac{a}{b}$ *(*$a \neq 0,\ b \neq 0$*) необхідно (але не достатньо), щоб було* $a \geq b$*. Якщо частка існує, то вона єдина.*

Доведення. Нехай $(\exists c)\ \left(c = \frac{a}{b}\right),\ c \in N_0$. Тоді за означенням частки $cb = a$. Але $c \neq 0$ (бо $0 \cdot b = 0 \neq a$, тому $c \geq 1$ і завдяки монотонності множення $cb \geq b$, тобто $a \geq b$.

Доведемо єдиність частки. Припустимо, що існує дві частки: $c_1 = \frac{a}{b}$, $c_2 = \frac{a}{b}$, тоді за означенням частки $c_1 b = a$ і $c_2 b = a$, тому $c_1 b = c_2 b$. Якби $c_1 \neq c_2$, то завдяки монотонності множення було б $c_1 b \neq c_2 b$; отже $c_1 = c_2$.

Легко показати, що умова $a \geq b$ не є достатньою для існування частки $\frac{a}{b}$. Нехай, наприклад $a = 3,\ b = 2$; покажемо, що не існує такого c, що $2c = 3$. Справді, якщо таке c існує, $3 = 2c > 1 \cdot c = c$, тобто $c < 3$. Отже, може бути лише $c = 1$ або $c = 2$, але $2 \cdot 1 = 2,\ 2 \cdot 2 = 4$.

Отже, ділення, як і віднімання, не є алгебрагічною операцією на множині N_0 (і навіть на N), бо вона не завжди є виконуваною. Проте для віднімання ми встановили просту необхідну і достатню умову виконуваності, тоді як для ділення поки що встановлено лише необхідну умову. Питання про можливість виконання ділення і про пов’язані з цим властивості чисел визначає так звана теорія подільності.

Розглянемо ще зміст операції ділення у кількісній теорії натуральних чисел; тут є дві різні задачі, які приводять до операції ділення:

1) множину A, що містить a елементів, треба розкласти на підмножини, які попарно не перетинаються і містять по b елементів кожна. Знайти кількість цих підмножин. Якщо шукану кількість позначити через c, то дістанемо, що $bc = a$, тобто $c = \frac{a}{b}$ (якщо ця частка існує).

2) множину A, що містить a елементів, треба розкласти на b рівнопотужних підмножин, які попарно не перетинаються. Скільки елементів міститиме кожна підмножина?

Якщо шукану кількість елементів позначити через b, то $db = a$ і знову $d = \frac{a}{b}$ (якщо ця частка існує).

Приклад. Обчислили раціональним способом:

(85 + 24 · 9) · (21 · 3 – 7 · 9), (75 – 5 · 15) : (39 + 11 · 31).

Відповідь. В обох прикладах у відповіді дістанемо нуль. У першому прикладі, не обчислюючи значення виразу, що в першій дужці, бачимо, що другий співмножник дорівнює нулю (21 · 3 – 7 · 9 = 0), у другому – ділене нуль (75 – 5 · 15 = 0), а значення дільника відмінне від нуля.

Розглянуті властивості множення і ділення є теоретичною основою множення і ділення двоцифрових чисел на одноцифрові і, навпаки, двоцифрових на двоцифрові і т. д.

Приклад.

26 · 3 = (20 + 6) · 3 = 20 · 3 + 6 · 3 = 60 + 18 = 78,

45 · 24 = 45 · (20 + 4) = 45 · 20 + 45 · 4 = 900 + 180= 1080.

При усному і при письмовому виконанні дій треба добре знати таблицю множення і ділення, тому вчителю слід звернути особливу увагу на активізацію пізнавальної діяльності учнів при вивченні табличних випадків множення і ділення, тобто при множенні одноцифрових чисел, діленні одноцифрового числа на одноцифрове та двоцифрового на одноцифрове при одноцифровій частці.

7.6. Ділення з остачею.

Як відомо, ділення не є алгебрагіною операцією на множині N_0. Розглянемо узагальнення операції ділення, ділення з остачею, яке є завжди виконуваним при умові, що дільник відмінний від нуля.

Для довільної пари $a, b \in N_0 \times N$ *існує одна і тільки одна пара* $(q, r) \in N_0^2$, *така що*

$$a = bq + r,\ r < b. \qquad (1)$$

Число а називають ***діленим,*** *b –* ***дільником,*** *q –* ***часткою*** *(або неповною часткою), r –* ***остачею.***

Доведення. 1. Доведемо спочатку існування пари (q, r), для якої справджується співвідношення (1). Розглянемо множину

$$A = \{a - bc | c \in N_0 \wedge bc \leq a\}.$$

За принципом найменшого числа у множині A є найменше число r. Нехай число r відповідає значенню $c = q$, тобто $r = a - bq$, або $a = bq + r$. Покажемо, що $r < b$. Припустимо протилежне, нехай $r \geq b$, тоді існує різниця $r_1 = r - b$, отже, $r = b + r_1$ і $a = bq + r = bq + b + r_1 = b(q + 1) + r_1$; звідси $r_1 = a - b(q + 1)$, тобто $r_1 \in A$ і $r_1 < r$. Це суперечить тому, що r – найменше число множини A, отже, $r < b$, і існування потрібної пари (q, r) доведено.

2. Доведемо тепер єдиність пари (q, r), для якої справджується співвідношення (1). Припустимо, що маємо два такі співвідношення $a = bq + r$,

$a = bq_1 + r_1$.

Тоді

$$bq + r = bq_1 + r_1 \qquad (2)$$

причому $(q, r) \neq (q_1, r_1)$, тобто $q \neq q_1 \vee r \neq r_1$. Якщо $r = r_1$, то з (2) випливає $bq = bq_1 \Rightarrow q = q_1$, і єдиність пари (q, r) встановлена.

Нехай $r < r_1$, тоді за властивостями віднімання $bq + r_1$, дістанемо: $b(q - q_1) = r_1 - r$, отже, $r_1 - r$ ділиться на b. Але $r_1 < b$, тому і $r_1 - r \leq r_1 < b$, що суперечить визначенню існування частки. Для $r > r_1$ міркування аналогічні.

Зазначимо, що тоді, коли a ділиться на b, ділення можна розглядати як окремий випадок ділення з остачею: якщо $a = bq$, то можна записати, що $a = bq + 0$, тобто $r = 0$.

Приклади розв'язування задач

1. Зобразити, де можна, суми у вигляді добутку і обчислити:

9 + 9 + 9+ 121 + 121 + 121 + 121.

Розв'язання. Запишемо цей вираз так:

а) 9 · 3 + 121 · 3 + 121 = (9 + 121) · 3 + 121 = 130 · 3 + 121 = 390 + 121 = 511.

б) 9 · 3 + 121 · 4 = 27 + 484 = 511.

2. Обчислити раціональним способом:

а) 67 · 58 + 33 · 58; б) 44 · 46; 72 – 78; 72 · 79.

Розв'язання.

а) 67 · 58 + 33 · 58 = (67 + 33) · 58 = 100 · 58 = 5800.

б) Тут маємо випадок множення двоцифрових чисел, у яких число десятків однакове, а одиниці в сумі становлять 10, тобто:

$$\overline{ab_1} \cdot \overline{ab_2} = (10a + b_1)(10a + b_2) = 100aa + (10ab_1 + 10ab_2) + b_1b_2 =$$
$$= 100aa + 10a\underbrace{(b_1 + b_2)}_{10} + b_1b_2 = 100aa + 100a + b_1b_2 = 100a(a+1) + b_1b_2$$

Число десятків множимо на число на одиницю більше і множимо на 100, а на місце нулів утвореного добутку дописуємо добуток одиниць даних чисел:

44 · 46 = 4 · (4 + 1) · 100 + 4 · 6 = 4 · 5 · 100 + 24 = 2024.

Коротше:

72 · 78 = 7 · 8 · 100 + 16 = 5616;

72 · 79 = 72 · 78 + 72 = 5616 + 72 = …

3. 1 дм^3 деревини важить 450 г, а 1 дм^2 мармуру – 2 кг 700 г. У скільки разів маса мармуру більша маси деревини? Визначити вид задачі, розв'язати її і побудувати до неї дві обернені задачі.

Розв'язання.

Це задача на кратне порівняння чисел, або на ділення на вміщення: треба дізнатися, скільки разів по 450 г вміщується в 2 кг 700 г, тобто

2700 г : 450 г = 6 (раз).

Відповідь. Мармур у 6 разів важчий деревини. Самостійно побудуйте обернені задачі до даної.

4. Два пароплави відправились одночасно з двох пристаней і пливуть назустріч один одному один з середньою швидкістю 24 км/год, а другий – 26 км/год. Визначити відстань між пристанями, якщо пароплави зустрілися через 7 год. Розв'язати задачу двома способами.

Розв'язання.

1-й спосіб

$$(24 + 26) \cdot 7 = 50 \cdot 7 = 350 \text{ (км)};$$

2-й спосіб

$$24 \cdot 7 + 26 \cdot 7 = 168 + 182 = 350 \text{ (км)}.$$

Порівнюючи ці способи, наочно ілюструємо розподільний закон множення відносно суми.

5. Записати у вигляді рівнянь і розв'язати їх:

а) яке число треба збільшити в 9 разів, щоб дістати 432?

б) на яке число треба розділити 1116, щоб дістати 62?

в) у скільки разів треба зменшити 5656, щоб дістати 28?

Розв'язання.

а) $x \cdot 9 = 432$, $x = 432 : 9$, $x = 48$.

Перевірка. $48 \cdot 9 = 432$.

Відповідь. 48.

б) Виконайте самостійно.

в) $5656 : x = 28$, $x = 5656 : 28$.

Учень третього класу, виконавши ділення, дістав у частці 22 замість 202. Як допомогти йому самостійно відшукати причину помилки? Зверніть увагу на визначення кількості цифр у частці: перше неповне ділене 56 сотень, отже, перша цифра частки 2 означає дві сотні, тому частка буде трицифрова...

6. $296 + 104 : 4 =$ $(296 + 104) : 4 =$

Виконати обчислення усно і порівняти результати, пояснити.

7. Не виконуючи письмових обчислень, поставити знаки «>», «=» або «<», щоб дістати істинні висловлення:

а) 638638 : 638 ... 393393 : 393;

б) 145 : 5 ... 435 : 15 + 5.

Розв'язання.

а) Тут треба мати на увазі, що означає число виду

$$638638 : 638000 + 638 = 638 \cdot 1001.$$

Отже, кожна з часток дорівнює 1001.

б) Ділене й дільник збільшили в 3 рази, частка не змінилася, але справа ще додали 5, тому значення лівого виразу менше, ніж правого.

ТЕМА 8. ВІДНОШЕННЯ ПОДІЛЬНОСТІ НА МНОЖЕННІ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

8.1. Основні властивості подільності

Число а ділиться на число b*, якщо існує таке число с, що* $a = bc$*. Якщо а ділиться на* b*, то пишуть* $a : b$*.*

Відношення подільності має такі властивості:

1) $(\forall b \in N_0)\ b \neq 0 \Rightarrow 0 \vdots b$.

2) $(\forall a \in N)\ a$ не $\vdots\, 0$.

Теорема 1. $(\forall a \in N)\ a \vdots a$ (рефлексивність).

Доведення випливає з рівності $a \cdot 1 = a$, яка справджується для всіх $a \in N$.

Теорема 2. $(\forall a, b, c \in N)\ a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$ (транзитивність).

Доведення. За означенням подільності $a \vdots b \Rightarrow a = bq$; так само $b \vdots c \Rightarrow b = = cq_1$, отже $a = (cq_1)q = c(q_1 q) \Rightarrow a \vdots c$.

Теорема 3. $(\forall a, b \in N)\ a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = b$ (антисиметричність).

Доведення. Якщо $a \vdots b$, то $a \geq b$, так само з $b \vdots a$ випливає, що $b \geq a$. Отже, $a = b$.

Найпростіші теореми про подільність:

Теорема 4. $(\forall a \in N_0)\ a \vdots 1$.

Доведення випливає з рівності $a \cdot 1 = a$.

Теорема 5 (подільність суми). Якщо кожен доданок ділиться на деяке число, то і сума розділиться на це число:

$$(\forall a, b, c \in N_0)\ a \vdots b \wedge c \vdots b \wedge b \neq 0 \Rightarrow (a + c) \vdots b.$$

Доведення. $a \vdots c \Rightarrow a = cq,\ b \vdots c \Rightarrow b = cr$.

Звідси $ma + nb = m(cq) + n(cr) = (mq + nr)c \Rightarrow (mq + nr) \vdots c$.

За допомогою індукції ця теорема легко поширюється на довільне число доданків.

Так, $32 \vdots 4 \wedge 24 \vdots 4 \Rightarrow (32 + 24) \vdots 4$. Але 18 не $\vdots\, 7 \wedge 52$ не $\vdots\, 7$, а $(52 + +18) \vdots 7$. Отже, ця ознака не є необхідною, а лише достатньою.

Необхідна і достатня ознака. Якщо один з двох (або кількох) доданків ділиться на дане число, то для того щоб сума ділилась на це число, необхідно і достатньо, щоб і другий доданок (решта доданків) ділився на це число.

Приклад. $20 \mid a$ – сума двох доданків, перший з яких ділиться, наприклад, на 5. Для того щоб сума ділилась на 5, необхідно і достатньо, щоб $a \vdots 5$. Якщо a не $\vdots\, 5$, наприклад $a = 8$, то сума $(20 + 8)$ не $\vdots\, 5$.

Необхідну й достатню ознаку подільності суми іноді формулюють інакше: *сума двох або кількох доданків ділиться на дане число тоді і тільки тоді, коли на це число ділиться сума остач від ділення кожного доданка на дане число:*

$$(a + b) \vdots c \Leftrightarrow (r_1 + r_2) \vdots c,$$

$$+\begin{array}{l} a = cq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < q, \\ a = cq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < q, \end{array}$$

$\overline{a + b = c(q_1 + q_2)} + (r_1 + r_2) \Rightarrow (a + b) \vdots c \Leftrightarrow (r_1 + r_2) \vdots 0.$

Теорема 6 (подільність різниці). Різниця двох чисел ділиться на дане число, якщо зменшуване і від'ємник діляться на це число.

$$(a \vdots c) \wedge (b \vdots c) \wedge (m, n \in N_0) \wedge (ma \geq nb) \Rightarrow (ma - nb) \vdots c$$

Наслідок. $(a \vdots c) \wedge (b \vdots c) \wedge (a \geq b) \Rightarrow (a - b) \vdots c$ (*якщо зменшуване і від'ємник діляться на с, то й різниця ділиться на с*).

Необхідна і достатня ознака. Різниця двох чисел ділиться на дане число тоді і тільки тоді, коли остачі від ділення на це число зменшуваного і від'ємника рівні між собою.

Наприклад,

45 : 4 = 11 (ост. 1), $r_1 = 1$;

21 : 4 = 5 (ост. 1), $r_2 = 1$,

(45 – 21) : 4, тому що рівні остачі, $r_1 = r_2 = 1$.

Теорема 7. Нехай у рівності $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ про всі числа, крім одного, відомо, що вони діляться на c. Тоді і все число ділиться на c.

Доведення. Нехай, наприклад, відомо, що всі числа, крім a_n, діляться на c. Тоді за означенням різниці $a_n = (b_1 + b_2 + \cdots + b_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$. За теоремою 5 суми в дужках діляться на c, тому за теоремою 6 $a_n \vdots c$.

Теорема 8 (подільність добутку). Для ділення добутку кількох співмножників на дане число достатньо, щоб на це число ділився хоча б один співмножник.

$$(a \vdots c) \wedge (b \in N_0) \Rightarrow ab \vdots c$$

Доведення. $a \vdots c \Rightarrow a = cq \Rightarrow ab = (cq)b = c(qb) \Rightarrow ab \vdots c.$

Необхідна і достатня ознака. Добуток ділиться на дане число тоді і тільки тоді, коли на це число ділиться добуток остач від ділення кожного із співмножників на дане число.

Наприклад,

$245 : 10 = 24\ (\text{ост.}\,5),\ r_1 = 5,$

$312 : 10 = 31\ (\text{ост.}\,2),\ r_2 = 2,$

$234 : 10 = 23\ (\text{ост.}\,4),\ r_3 = 4,$

$(245 \cdot 312 \cdot 345) \vdots 10 \Leftrightarrow (5 \cdot 2 \cdot 4) \vdots 10.$

Зазначимо, що обернене твердження не є правильним – з подільності добутку ще не випливає подільність хоча б одного з співмножників. Так, $(3 \cdot 4) \vdots 6$, але жоден з співмножників на 6 не ділиться.

8.2. Ознаки подільності

Вступні зауваження. З шкільного курсу математики відомі деякі ознаки подільності, наприклад, ознака подільності на 9: для подільності числа на 9 необхідно і достатньо, щоб сума цифр цього числа ділилась на 9. Нехай, наприклад, треба дізнатись, не виконуючи ділення, чи ділиться на 9 число 243587; сума його цифр дорівнює 2 + 4 + 3 + 5 + 8 + 7 = 29, отже, питання про подільність на 9 даного числа звелось до питання про подільність на 9 деякого меншого числа. Оскільки 29 на 9 не ділиться (це можна перевірити безпосередньо, а можна знов застосувати ту саму ознаку), то й число 243587 не ділиться на 9.

З цього прикладу зрозуміло, що ми розуміємо під ознакою подільності. **Ознака подільності** – це твердження, яке зводить питання про подільність будь-якого натурального числа на задане число *m* до питання про подільність на *m* деякого меншого натурального числа.

Загальна ознака подільності (*ознака Паскаля*)

Число a запишемо в позиційній системі числення з будь-якою основою

$$g\colon a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot g + a_0$$

Поділимо на b кожну з розрядних одиниць $g^0, g^1, \dots, g^n$, дістанемо:

$$g^0 = bq_0 + r_0,$$
$$g^1 = bq_1 + r_1,$$
$$g^2 = bq_2 + r_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$g^n = bq_n + r_n.$$

$q_1, q_2, \dots, q_n$ – неповні частки, $r_1, r_2, \dots, r_n$ – остачі, $0 \le r_i < g$. Тоді

$$a = a_n(bq_n + r_n) + a_{n-1}(bq_{n-1} + r_{n-1}) + \cdots + a_1(bq_1 + r_1) +$$
$$+a_0(bq_0 + r_0) = b(a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \cdots + a_1 q_1 + a_0 q_0) +$$
$$+(a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_1 r_1 + a_0 r_0).$$

Отже, $a \vdots b \Leftrightarrow (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_1 r_1 + a_0 r_0) \vdots b$, тобто натуральне число a, задане в позиційній системі числення з основою g, ділиться на число b тоді і тільки тоді, коли на нього ділиться сума добутків цифр цього числа на остачі, утворені при діленні на b відповідних степенів основи $(g^0, g^1, \dots, g^n)$.

На основі цієї ознаки подільності можна вивести ознаки подільності на прості числа.

Ознаки подільності на 2 і на 5.

Теорема 9. *Для подільності числа н-а* 2 *необхідно і достатньо, щоб його остання цифра була парною.*

Доведення. Нехай $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, тобто

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

Це можна переписати так:

$$a = 10(a_n 10^{n-1} + \cdots + a_1) + a_0.$$

або

$$a = 10b + a_0.$$

Оскільки $10 \vdots 2$, то за теоремою $5a_0 \vdots 2 \Rightarrow a \vdots 2$; так само з рівності $a_0 = a - 10b$ за теоремою 6 дістанемо, що $a \vdots 2 \Rightarrow a_0 \vdots 2$.

Теорема 10. *Для подільності числа на 5 необхідно і достатньо, щоб його остання цифра була 0 або 5 (тобто ділилась на 5).*

Доведення аналогічне доведенню теореми 9.

Зазначимо, що обидві ці ознаки можна сформулювати разом, а саме: *для подільності числа на 2 або на 5 необхідно і достатньо, щоб його остання цифра ділилась відповідно на 2 або на 5.*

Зрозуміло, що наявність таких ознак пов'язана з тим, що числа 2 і 5 є дільниками числа 10. Інших дільників (крім 1 і 10) число 10 не має, тому більше подібних ознак подільності ми не дістанемо.

Ознаки подільності на 4 і на 25.

Оскільки 4 і 25 є дільниками числа 100, то легко дістати ознаку подільності на 4 і 25.

Теорема 11. *Для подільності числа на 4 (на 25) необхідно і достатньо, щоб число, утворене двома його останніми цифрами, ділилось на 4 (на 25).*

Доведення. Нехай $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$, тобто

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

Це можна переписати так:

$$a = 100(a_n 10^{n-2} + a_{n-1} 10^{n-3} + \dots + a_2) + a_1 10 + a_0.$$

або

$$a = 100c + \overline{a_1 a_0}.$$

Оскільки 100 c ділиться як на 4, так і на 25, то з рівності завдяки теоремі 7 випливає, що число a ділиться на 4 (на 25) тоді і тільки тоді, коли на 4 (25) ділиться число $\overline{a_1 a_0}$.

Ознаки подільності на 8 і на 125.

Нарешті, розглядаючи 8 і 125 як дільники числа 1000, дістанемо таку ознаку.

Теорема 12. *Для подільності числа на 8 (на 125) необхідно і достатньо, щоб число, утворене трьома його останніми цифрами, ділилось на 8 (на 125).*

Доведення пропонуємо провести самостійно.

Ознаки подільності на 3 і на 9.

Теорема 13. *Для, подільності числа на 3 (на 9) необхідно і достатньо, щоб сума його цифр ділилась на 3 (на 9).*

Доведення. Зазначимо спочатку, що число $10^k - 1$ ділиться на 9 (а отже, і на 3) при будь-якому $k \in N$. Справді, це випливає з рівності

$$10^k - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ дев'яток}} = \underbrace{9 \cdot 11 \dots 1}_{k \text{ одиниць}}.$$

Нехай задано число $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$; $b = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ – сума його цифр, тоді

$$a - b = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) =$$
$$= a_n (10^n - 1) + a_{n-1} (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 (10 - 1)$$

і, згідно з зауваженням на початку доведення, права частина ділиться на 9, тобто

$$a - b = 9m$$

Звідси завдяки теоремі 7 дістаємо, що коли b ділиться на 3 (на 9), то й a ділиться на 3 (на 9) і навпаки.

Зазначимо, що насправді ми довели більше, ніж сформульовано в теоремі. Рівність показує, що число і сума його цифр дають при діленні на 3 (на 9) однакові остачі, отже, остача від ділення числа на 3 (на 9) дорівнює остачі від ділення на 3 (на 9) суми його цифр.

Наприклад. Знайдемо остачу від ділення числа 2453728 на 9. Сума цифр числа дорівнює 2 + 4 + 5 + 3 + 7 + 2 + 8 = 31, 3 + 1 = 4, отже, шукана остача є 4.

Ознака подільності на 11.

Лема. *Якщо m – непарне, то* $10^m + 1 \vdots 11$,

якщо ж m – парне, то $10^m - 1 \vdots 11$.

Доведення. Доведемо твердження методом математичної індукції:

1) для $m = 1$ і $m = 2$ твердження має місце: $10^1 + 1 = 11,\ 10^2 - 1 = 99{:}\,11$;

2) припустимо, що твердження справедливе для всіх $m < k$ і доведемо, що тоді воно справедливе і для $m = k$. Ясно, що $k > 2$ (бо для числа 2 твердження доведено). Є дві можливості:

а) якщо k – непарне, то $k - 1$ – парне, тоді за припущенням індукції

$$10^{k-1} - 1 \vdots 11 \Rightarrow 10^{k-1} - 1 = 11t \Rightarrow 10^{k-1} = 11t + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10^k = 11 \cdot 10t + 10 \Rightarrow 10^k + 1 = 11(10t + 1) \vdots 11;$$

б) якщо k – парне, то $k - 1$ – непарне і за припущенням індукції

$$10^{k-1} + 1 \vdots 11 \Rightarrow 10^{k-1} + 1 = 11q \Rightarrow 10^{k-1} = 11q - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10^k = 11 \cdot 10q - 10 \Rightarrow 10^k - 1 = 11(10q - 1) \vdots 11.$$

Отже, твердження справджується і для $m = k$. Тому воно правильне для всіх $m \in N$.

Теорема 14. *Для подільності числа на 11 необхідно і достатньо, щоб різниця між сумами його цифр, що стоять на парних і непарних місцях (або навпаки), ділилась на 11.*

Доведення. Нехай $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ і нехай $s_1 = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$, $s_2 = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots$ – суми, про які йде мова в теоремі. Нехай, для певності, $s_1 \geq s_2$ (випадок $s_1 < s_2$ розглядається аналогічно). Тоді різниця $s_1 - s_2$ існує і

$$a + (s_1 - s_2) = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + \cdots + a_n 10^n +$$
$$+(a_1 + a_3 + \cdots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots),$$

або

$$a + (s_1 - s_2) = a_1(10 + 1) + a_2(10^2 - 1) + a_3(10^3 + 1) +$$
$$+a_4(10^4 - 1) + \cdots + a_n(10^n + (-1)^{n-1}).$$

За лемою кожний доданок правої частини ділиться на 11, тому й сума ділиться на 11, отже,

$$a + (s_1 - s_2) = 11t.$$

Звідси випливає (теорема 7), що число a ділиться на 11 тоді і тільки тоді, коли $(s_1 - s_2) \vdots 11$.

Два числа a і b називаються порівняльні за модулем m, якщо при діленні на m вони дають однакові остачі. Це записується так: $a \equiv b \pmod{m}$.

Теорема 15. $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a - b) \cdot m$.

Теорема 16. $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv$
$\equiv b + d \pmod{m} \vee ac \equiv bd \pmod{m}$.

Теорема 17. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Приклади розв'язування задач

1. Знайти остачу від ділення на 9 числа

$$a = 23457^2 + 34753^3 + 38997 \cdot 583724$$

Розв'язання. Число a є сумою трьох доданків. За ознакою подільності суми на 9 повинна ділитися сума остач від ділення кожного доданка на 9:

1) $23457 : 9 = 9q_1 + 3,\ r_1 = 3,\ r_1^2 = 9,\ 9 \vdots 9 \Rightarrow 23457^2 \vdots 9,\ r = 0;$

2) $34753 : 9 = 9q_2 + 4,\ r_2 = 4,\ r_2^3 = 64,\ 64 \vdots 9 = 9 \cdot 7 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 34753^3$ не $\vdots\ 9$ і $r = 1;$

3) $38997 : 9 = (38997 \cdot 583724) \vdots 9,\ r = 0$. Отже, при діленні числа a на 9 остача дорівнює 1, тобто $r = 1$.

2. Довести, що при будь-якому $n \in N$

$$(12^{2n+1} + 11^{n+2}) \vdots 133.$$

Розв'язання. $12^{2n+1} = 12 \cdot 12^{2n} = 12 \cdot 144^n,\ 144 \equiv 11 \text{ (mod 133)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 144^n \equiv 11^n \text{ (mod 133)} \Rightarrow 12 \cdot 144^n = 11^n \cdot 12 \text{ (mod 133)}$$

$$12^{2n+1} = 12 \cdot 11^n \text{ (mod 133)}. \qquad (1)$$

$$11^{n+2} = 11^n \cdot 121, \qquad 121 = -12 \text{ (mod 133)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 121 \cdot 11^n = -12 \cdot 11^n \text{ (mod 133)}.$$

$$11^{n+2} = -12 \cdot 11^n \text{ (mod 133)}. \qquad (2)$$

Додамо рівності (1) і (2).

$$12^{2n+1} + 11^{n+2} = (12 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n) \text{ (mod 133)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12^{2n+1} + 11^{n+2} = 0 \text{ (mod 133)} \Rightarrow (12^{2n+1} + 11^{n+2}) \cdot 133.$$

3. Не виконуючи додавання або віднімання, указати, в яких випадках сума або різниця діляться на 5, 6, 18.

а) 7345 + 28540;

б) 15303 – 7283;

в) 37438 – 15362 + 3600.

Розв'язання.

а) Сума 7345 + 28540 ділиться на 5, тому що кожен доданок ділиться на 5. На 6 ця сума не ділиться, тому що перший доданок не ділиться на 2, а другий – ділиться. Для того щоб число ділилось на 18, необхідно і достатньо, щоб воно ділилось на 2 і 9. Перший доданок – непарне число, другий – парне. Отже, сума не розділиться на 2. А це означає, що ця сума не ділиться на 18.

б) Різниця чисел 15303 – 7283 розділиться на 5, тому що при діленні кожного компонента на 5 дістанемо рівні остачі ($r_1 = r_2 = 3$). На 6 ця різниця не розділиться, тому що один з компонентів ділиться, а другий не ділиться на 3. На 18 ця різниця теж не розділиться.

в) Цей вираз не розділиться на 5, тому що сума остач від ділення кожного компонента на 5 не ділиться на 5 (8 – 2 + 0 = 6). Не розділиться цей вираз на 6 і 18, тому що не ділиться на 3: остача від ділення першого компонента на 3 дорівнює 1, другого – 2, третього – 0 (1 – 2 + 0 = –1, –1 не ділиться 3).

4. Знайти остачу від ділення на 3 числа $a = 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$.

Розв'язання. $13 = 1\ (\mathrm{mob}\ 3),\ 2 = -1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ 5 = -1\ (\mathrm{mod}\ 3)$.

Отже, число *a* при діленні на 3 буде порівняльним за модулем 3 з числом $1^{16} - (-1)^{25} \cdot (-1)^{15} = 1 - 1 = 0$, тобто шукана остача дорівнює 0. Отже, число *a* ділиться 3.

5. Довести, що при будь-якому натуральному значенні k

$$(2k-1)^3 - (2k-1) \vdots 24.$$

Розв'язання. Запишемо ділене як добуток співмножників:

$$(2k-1)^3 - (2k-1) = (2k-1)(4k^2 - 4k) = (2k-1) \cdot 4k \cdot (k-1).$$

Цей добуток ділиться на 4. Крім того, з двох послідовних натуральних чисел k, $k - 1$ одне парне, тобто їхній добуток ділиться на 2.

Таким чином, наш вираз ділиться на 8. Доведемо, що даний вираз ділиться на 3.

Студент *A* міркував так:

1) k ділиться на 3, тобто $k = 3a$;
2) k при діленні на 3 дає остачу 1, тобто $k = 3a + 1$;
3) k при діленні на 3 дає остачу 2, тобто $k = 3a + 2$.

У першому випадку маємо:

$$4k(k-1)(2k-1) = 4 \cdot 3a(3a-1)(6a-1) \vdots 3$$

У другому випадку маємо:

$$4(3a+1)(3a+1-1)(6a+2-1) = 4 \cdot 3a(3a+1)(6a+1) \vdots 3.$$

У третьому випадку маємо:

$$4 \cdot (3a+2)(3a+2-1)(6a+4-1) = 4 \cdot 3a(2a+1)(3a+2)(3a+1) \vdots 3.$$

Отже, $4k(k-1)(2k-1)$ ділиться без остачі на 8 і на 3, тобто ділиться без остачі на 24. Які перетворення тут зайві?

6. Довести, що при будь-якому $k \in Z$ число

$$\frac{k^5 - 5k^3 + 4k}{120} \text{ – ціле.}$$

Розв'язання. Перетворимо чисельник дробу:

$$k^5 - 5k^3 + 4k = k(k^4 - 5k^2 + 4) = (k-2)(k-1)k(k+1)(k+2).$$

Дістали добуток п'яти послідовних чисел. Одне з таких чисел обов'язково ділиться на 5, одне з трьох послідовних чисел ділиться на 3, а з чотирьох послідовних чисел одне ділиться на 4 і ще одне – на 2. Отже, чисельник ділиться на $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

7. Яке найбільше число неділь може бути за рік?

Розв'язання. Серед будь-яких 7 послідовних днів завжди є одна неділя. Тоді за рік: 365 = 52 · 7 + 1 або 366 = 52 · 7 + 2. Тобто за рік може бути 52 неділі і ще в остачі один або два дні. Всього маємо не більше 53 неділь.

Вправи

1. Не виконуючи додавання або віднімання, вказати, в яких випадках сума або різниця діляться:

1) на 3, 4, 5:
   а) 2342 + 43 642;

б) 8375 – 3250;
в) 369 + 45 731 – 7021;
г) 45 378 – 14 542 + 3204.
2) на 9, 15, 18:
а) 8 796 516 + 6 755 434;
б) 8 997 886 – 564 376;
в) 2564 + 8 976 445 – 867 543;
г) 9 988 770 – 60 505 + 6655.

2. Довести, що:
а) будь-яке трицифрове число, записане однаковими цифрами, ділиться на 37;
б) різниця між трицифровим числом і числом, записаним тими ж цифрами, але взятими в зворотному порядку, ділиться на 9;
в) добуток двох послідовних парних чисел ділиться на 8;
г) різниця між квадратом непарного числа і одиницею ділиться на 8;
д) добуток будь-яких трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6;
є) різниця кубів двох послідовних чисел при діленні на 6 дає остачу 1;
є) $5^{2k+1} + 2^{k+4} + 2^{k+1}$ ділиться на 23 при будь-якому значенні k;
ж) $3^{2k+1} + 2^{k+4}$ ділиться на 7 при $k \in N$.

4. Знайти остачу від ділення числа $a = (116 + 17^{17})^{21}$ на 8.

5. Чи може бути таке число, яке при діленні на 3 дає в остачі 1, при діленні на 4 дає в остачі 2, при діленні на 5 дає в остачі 3 і при діленні на 6 дає в остачі 4?

6. У порту пришвартувалось 4 теплоходи. Опівдні 2 січня 2021 року вони одночасно залишили порт. Відомо, що перший теплохід повертається до цього порту через кожні 4 тижні, другий – через 8 тижнів, третій – через 12 тижнів, а четвертий – через 16 тижнів. Коли вперше теплоходи знов зустрінуться в цьому порту?

7. Жінка несла на базар кошик яєць. Прохожий ненароком штовхнув жінку, кошик упав, яйця побилися. Винуватець нещастя, щоб відшкодувати збитки, запитав:

– Скільки всього було яєць в кошику?

– Точно не пам'ятаю, – відповіла жінка, – але знаю, що коли я виймала з кошика по 2 яйця, по 3, по 4, по 5 або по 6 яєць, у кошику залишалось одне яйце, а коли я виймала по 7, кошик був порожній.

Скільки яєць було в кошику?

8. Якщо від задуманого трицифрового числа відняти 7, то воно поділиться на 7, якщо відняти від нього 8, то воно поділиться на 8, а якщо відняти від нього 9, то воно поділиться на 9. Яке число задумане?

9. Міркуючи арифметично, знайти число t і числове значення букви a, яка заміняє невідому цифру в такій рівності:

$$[3(230 + t)]^2 = \overline{492a04}$$

10. Чи може сума трьох послідовних натуральних чисел бути простим числом?

11. Дана число, кратне 45. Коли його поділити на 45, а знайдену частку додати до діленого і від суми відняти дільник, то дістанемо 875. Знайти це число.

12. Довести: «Сума двох будь-яких послідовних парних чисел не ділиться на 4».

13. Довести, що різниця квадратів двох будь-яких непарних чисел ділиться на 4.

14. Курйоз подільності.

Розглянемо 4 цікавих десятицифрових числа:

2 438 195 760	4 753 869 120
3 785 942 160	4 876 391 520

У кожному з них є всі цифри від 0 до 9, але кожна цифра тільки по одному разу і кожне з цих чисел ділиться на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 і 18. Перевірити.

15. В одній з єгипетських пірамід вчені знайшли на кам'яній плиті гробниці вигравіруване ієрогліфами число 2520. Важко точно сказати, за що випала така честь цьому числу. Можливо за те, що воно без остачі ділиться на всі без винятку цілі числа від 1 до 10. Справді, немає числа, меншого від 2520, яке б мало таку властивість. Переконайтесь у тому, що це число є найменшим спільним кратним цілих чисел першого десятка.

ТЕМА 9. ПРОСТІ І СКЛАДЕНІ ЧИСЛА. РЕШЕТО ЕРАТОСФЕНА. ДІЛЬНИКИ І КРАТНІ ЧИСЛА. НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК І НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ ЧИСЕЛ.

9.1. Прості і складені числа.

Числа прості і складені. Розглянемо питання про можливе число дільників натурального числа. Число нуль ділиться на будь-яке відмінне від нуля число, отже, нуль має безліч дільників. Всяке число $a \neq 0$ має лише скінченне число дільників, бо всі його дільники не перевищують числа *a.* Серед відмінних від нуля чисел особливе положення займає число 1, оскільки це число має лише один дільник – саме число 1. Всяке число $a > 1$ має принаймні два дільники – воно ділиться на 1 і на a.

Натуральне число, більше 1, *називається* ***простим****, якщо воно ділиться тільки на* 1 *і на себе. Число* $a > 1$ *називається* ***складеним****, якщо у нього є принаймні один дільник, відмінний від* 1 і a.

Число a називається дільником числа *n,* якщо існує таке ціле число b, що $n = a \cdot b$.

Числа, на які ділиться число *n,* називаються його **дільниками**.

Всі числа множини N_0 можна поділити на чотири класи:

1) число 1, яке ділиться лише саме на себе, тобто має один дільник;

2) числа, які мають два дільника, тобто діляться на 1 і самі на себе (прості числа).

Наприклад, числа 2, 3, 11;

3) числа, які крім 1 і самого себе, мають ще й інші дільники. (складені числа).

Наприклад, число 12 має такі дільники: 1, 2, 3, 4, 6, 12;

4) число 0, яке має нескінченну множину дільників: $R\backslash 0$.

Існування простих чисел випливає з наступної теореми.

Теорема 1. *Найменший відмінний від одиниці дільник числа* $a > 1$ *є просте число.*

Доведення. Множина відмінних від 1 дільників числа a непорожня, бо вона містить a. За принципом найменшого числа серед відмінних від 1 дільників числа a є найменший дільник p. Покажемо, що p – просте. Якби p було складеним, то за означенням складеного числа воно мало б дільник p_1, $1 < p_1 < p$, тоді за транзитивністю подільності було б $a \vdots p_1$, а це суперечить тому, що p – найменший з відмінних від одиниці дільників a. Отже, p – просте.

Нескінченність множини простих чисел.

Остання теорема стверджує лише існування простих чисел, але нічого не говорить про те, чи скінченна множина простих чисел, чи нескінченна. Відповідь на це запитання дає теорема Евкліда («Начала» Евкліда, книга IX). Це була єдина проблема теорії простих чисел, яку вдалося розв'язати античним математикам.

Теорема 2. *(Евкліда). Множина простих чисел нескінченна.*

Доведення. Припустимо протилежне, нехай множина простих чисел скінченна і $p_1, p_2, \dots, p_n$ – усі прості числа. Розглянемо число $P = p_1 p_2 \dots p_n + +1$ і позначимо через p його найменший відмінний від одиниці дільник. За теоремою 1 число p просте. Проте число p не може дорівнювати жодному з чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$, оскільки p – дільник числа P, яке не ділиться на жодне з чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ (при діленні на кожне з, них число P дає остачу 1). Отже, p – просте число, відмінне від чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$, що суперечить припущенню.

Теорема 3. *Якщо натуральне число n складене, то воно має хоча б один простий дільник, не більший від* $\sqrt{n}$.

Отже, натуральне число буде простим, якщо воно не ділиться на жодне просте число, яке менше $\sqrt{n}$.

Наприклад. Розглянемо число 2389.

$48 < \sqrt{2389} < 49$ 48, бо $49^2 = 2401 > 2389$, а $48^2 = 2304 < 2389$. Розглянемо всі прості дільники, менші за 49: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Оскільки 2389 не ділиться на жодне з цих простих чисел, то воно просте.

9.2. Решето Ератосфена. Розподіл простих чисел.

Для дослідження закономірностей розподілу простих чисел у натуральному ряді бажано мати таблиці простих чисел. Розглянемо простий спосіб знаходження всіх простих чисел, що не перевищують даного числа n. Цей спосіб відомий під назвою решета Ератосфена.

Випишемо всі натуральні числа від 2 до *n:*

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., n.$$

З цього ряду чисел викреслюватимемо всі складені числа. Число 2 ділиться лишена 1 і на себе, отже, воно є простим. Викреслимо всі числа, кратні 2, крім числа 2. Перше число після 2, що лишилося невикресленим, є 3, воно не ділиться на 2, отже, воно ділиться тільки на 1 і на себе, тому воно просте. Викреслимо всі числа, кратні 3, крім числа 3. Перше невикреслене число, більше 3, є 5; воно не ділиться на жодне з менших простих чисел (бо інакше було б викреслено), отже, число 5 просте. Викреслюємо всі числа, кратні 5, крім числа 5 і т. д.

Після того, як викреслено кратні всіх простих чисел, менших за p, викреслювати кратні числа p слід починати з p^2. Справді, припустимо, що якесь невикреслене число $m < p^2$ є складеним. Якщо q – найменший відмінний від 1 дільник числа m, то q – просте число, $m = qr$, $q \leq r$. Тоді $q^2 \leq qr = m < p^2$, звідки $q < p$. Отже, q – просте число, менше за p, тому всі кратні числа q уже викреслені і число m не могло лишитись невикресленим.

Таким чином, після того, як викреслено всі кратні простих чисел, менших за p, всі невикреслені числа, менші за p^2, є простими. Отже, якщо $p^2 > n$, то складання таблиці закінчено.

Як приклад розглянемо складання таблиці простих чисел, менших 100. Оскільки $\sqrt{100} = 10$, а 10 знаходиться між простими числами 7 і 11, то, закресливши всі числа, кратні числу 7, дістанемо невикресленими всі прості числа до 100, тобто складання цієї таблиці буде закінчено, коли буде викреслено всі числа, кратні 7, і залишиться 25 чисел:

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
		71	73	79	83	89	97		

Розглянутий метод, мабуть, вперше застосував грецький математик Ератосфен близько 2000 років тому. В ті часи писали загостреною паличкою на дощечках, вкритих шаром воску. Числа Ератосфен не закреслював, а проколював, внаслідок чого дощечка ставала схожою на решето, на якому лишилися «непросіяними» прості числа. Тому цей метод і дістав назву решета Ератосфена.

Цим самим методом (звичайно, з деякими удосконаленнями) і користуються для складання таблиць простих чисел. В 1909 р. було видано таблиці простих чисел, менших 10 мільйонів. В 1959 р. складено таблиці, що містять перші 6000000 простих чисел від 2 до 104395301. Але відомі і значно більші прості числа. Найбільшим з відомих нам простих чисел є тепер, мабуть, число $2^{11213} - 1$; десятковий запис цього числа містить понад 3300 цифр. Зазначимо, що простим є також 23-цифрове число, всі цифри якого – одиниці: 11 111 111 111 111 111 111 111.

Безпосередні спостереження за таблицями простих чисел довгий час не давали змоги виявити якоїсь закономірності в розподілі простих чисел. Річ у тому, що прості числа розподілені в натуральному ряді дуже нерівномірно. Про це свідчать, наприклад, такі факти. З одного боку, існують як завгодно довгі відрізки натурального ряду, які не містять жодного простого числа. Так, наприклад, серед n – 1 послідовних натуральних чисел

$$n! + 2, \quad n! + 3, \quad n! + 4, \quad \ldots, \quad n! + n$$

немає жодного простото (бо перше з них ділиться на 2, друге на 3, ..., останнє – на n). З другого боку зустрічаються так звані прості числа близнюки, тобто пари простих чисел, різниця яких дорівнює 2. Прикладами близнюків можуть бути 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13, 29 і 31, 71 і 73 тощо. Відомі ще такі прості числа-близнюки 1 000 000 009 649 і 1 000 000 009 651. Досі невідомо, чи множина простих чисел-близнюків скінченна чи нескінченна.

9.3. Найменше спільне кратне.

Число b є кратним числа a, якщо $b \vdots a$, тобто $b = aq$. Зрозуміло, що нуль є кратним будь-якого числа, тому надалі розглядатимемо лише відмінні від нуля кратні.

Всяке число, кратне числам $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N$, *називається їхнім спільним кратним. Найменше із спільних кратних називається найменшим спільним кратним (НСК) даних чисел і позначається* $K(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Існування найменшого спільного кратного випливає з таких міркувань. Множина A всіх нерівних нулю спільних кратних даних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ непорожня, оскільки вона містить добуток даних чисел $a_1 a_2 \ldots a_k$. За принципом найменшого числа у множині A існує найменше число – це і є найменше спільне кратне даних чисел.

Теорема 4. *Кожне спільне кратне даних чисел ділиться на їхнє найменше спільне кратне.*

Доведення. Нехай M – довільне спільне кратне чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; m – їхнє НСК. За діленням з остачею можна знайти частку q і остачу r від ділення M на m:

$$M = mq + r, \;\; r < m.$$

За умовою M і m діляться на кожне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, тому число r також ділиться на кожне з них; але $r < m$, отже, r – спільне кратне чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, яке менше їхнього найменшого спільного кратного m, що можливо лише при $r = 0$. Отже, $r = 0$ і $M = mq$.

9.4. Найбільший спільний дільник.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N$; *всяке число, на яке ділиться кожне з даних чисел, називається їхнім спільним дільником. Найбільший із спільних дільників даних чисел називається їхнім найбільшим спільним дільником (НСД) і позначається* $D(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Існування НСД випливає з таких міркувань. Множина спільних дільників даних чисел непорожня, оскільки вона містить число 1. З другого боку, кожен спільний дільник даних чисел не перевищує найменшого з цих чисел. Тому в множині спільних дільників даних чисел є найбільше число; це і є їхній НСД.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ *називаються взаємно простими, якщо* $D(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$. *Ці числа називають попарно взаємно простими, якщо* $D(a_i, a_j) = 1$ *при* $i \neq j$.

Очевидно, попарно взаємно прості числа є також взаємно простими, але обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне. Так, наприклад, числа 6, 35, 11 попарно взаємно прості, оскільки $D(6, 35) = 1$, $D(6, 11) = 1$, $D(35, 11) = 1$. Числа 8, 12, 15 взаємно прості: $D(8, 12, 15) = 1$, але вони не є попарно взаємно простими, бо, наприклад, $D(8, 12) = 4$. Встановимо дві властивості НСД.

Теорема 5. *Якщо* $a \vdots b$, то $D(a, b) = b$, $K(a, b) = a$.

Доведення. Оскільки $a \vdots b$ і $b \vdots b$, то b – спільний дільник чисел a і b; але дільник числа b не може бути більше b,тому b – найбільший спільний дільник a і $b:\ b = D(a, b)$.

Аналогічно з того, що $a \vdots a$ і $a \vdots b$, випливає, що a – спільне кратне чисел a і b; але кратне числа a не може бути менше a, тому a – найменше спільне кратне чисел a і $b:\ a = K(a, b)$.

Теорема 6. *Будь-який спільний дільник даних чисел є дільником їхнього найбільшого спільного дільника.*

Доведення. Нехай $d = D(a_1, a_2, \dots, a_k)$, d_1 – спільний дільник цих чисел, $d_1 \leq d$. Треба довести, що $d \vdots d_1$. Припустимо, що це не так і позначимо $m = K(d, d_1)$. Оскільки за припущенням d не ділиться на d_1, то $m > d$. Але, з другого боку, кожне з чисел a_i є спільним кратним d і d_1, тому за теоремою 4 $a_i \vdots m (i = 1, 2, \dots, k)$. Отже, m – спільний дільник всіх чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ більший числа d, а це суперечить тому, що d – їхній найбільший спільний дільник.

9.5. Зв'язок між НСК І НСД двох чисел. Властивості НСД і НСК.

Теорема 7. *НСК двох чисел дорівнює їхньому добутку, поділеному на НСД цих чисел:*

$$K(a, b) = \frac{ab}{D(a, b)}.$$

Доведення. Нехай $m = K(a, b)$; оскільки ab – спільне кратне чисел a і b, то за теоремою 4 $ab \vdots m$. Покладемо $d = \frac{ab}{m}$; теорему буде доведено, якщо покажемо, що $d = D(a, b)$.

Оскільки $m \vdots b$, то $m = bt$, тому з рівності $md = ad$ дістаємо: $btd = ad \Rightarrow td = a \Rightarrow a \vdots d$. Аналогічно встановлюємо, що $b \vdots d$. Отже, d – спільний дільник чисел a і b.

Нехай d_1 – який-небудь спільний дільник чисел a і b, тоді число $M = \frac{ab}{d_1}$ буде спільним кратним чисел a і b (бо $M = a\frac{b}{d_1} = \frac{a}{d_1}b$), тому за теоремою 4 $M \vdots m$, тобто $M = km$. Таким чином,

$$d_1 = \frac{ab}{M} = \frac{ab}{km},$$

або $d_1 = \frac{d}{k}$. Звідси видно, що спільний дільник d_1 чисел a і b буде найбільшим при $k = 1$, отже, $D(a,b) = d$.

Наслідок. $K(a,b) = ab \Rightarrow D(a,b) = 1$, тобто НСК двох чисел дорівнює їхньому добутку тоді і тільки тоді, коли ці числа взаємно прості.

Теорема 8. $d = D(a,b) \Leftrightarrow D\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, *тобто для того, щоб число d було НСД чисел a і b, необхідно і достатньо, щоб числа* $\frac{a}{d}$ *і* $\frac{b}{d}$ *були взаємно-простими.*

Доведення.

Необхідність. Нехай $d = D(a,b)$. Треба довести, що $D\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. Припустимо, що числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ не взаємно прості, тоді вони мають спільний дільник $k > 1$: $\frac{a}{d} = ka'$, $\frac{b}{d} = kb'$; звідси $a = kda'$, $b = kdb'$, тобто числа a і b мають спільний дільник $kd > d$, що неможливо, бо d – найбільший спільний дільник a і b.

Достатність. Нехай $D\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, треба довести, що $d = D(a,b)$. Припустимо протилежне, нехай $D(a,b) = d_1 \neq d$, тоді за теоремою 6 $d_1 \vdots d$, тобто $d_1 = dk$, $k > 1$. Звідси видно, що $a \vdots dk$, $b \vdots dk$, отже, $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ мають спільний дільник $k > 1$, що суперечить умові.

Теорема 9. $D(ac,bc) = D(a,b)c$; $K(ac,bc) = K(a,b)c$, *тобто спільний дільник двох чисел можна виносити як за знак НСД, так і за знак НСК.*

Доведення. Позначимо $D(a,b) = d$ і розглянемо частки від ділення чисел ac і bc на число $d_1 = dc$; $\frac{ac}{d_1} = \frac{ac}{dc} = \frac{a}{d}$, $\frac{bc}{d_1} = \frac{bc}{dc} = \frac{b}{d}$ і за теоремою 8 (необхідність) $D\left(\frac{ac}{d_1}, \frac{bc}{d_1}\right) = D\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. Отже, за тою самою теоремою (достатність) $D(ac,bc) = d_1 = dc = D(a,b)c$.

Для доведення другої формули застосуємо теорему 7:

$$K(ac,bc) = \frac{ac \cdot bc}{D(ac,bc)} = \frac{ac \cdot bc}{D(a,b)c} = \frac{ac \cdot bc}{D(a,b)}c = K(a,b)c.$$

Зазначимо, що аналогічне твердження виконується також для НСД і НСК кількох чисел.

9.6. Деякі теореми про взаємно-прості числа

Теорема 10. *(основна властивість взаємно-простих чисел). Якщо* $D(a,c) = 1$ *і* $ab \vdots c$, *то* $b \vdots c$.

Доведення. Оскільки $D(a,c) = 1$, то за наслідком з теореми 7 $K(a,c) = ac$. З другого боку, $ab \vdots a$ і за умовою $ab \vdots c$, отже, ab – спільне кратне a і c і тому за теоремою 4 ab ділиться на НСК чисел a і c, тобто $ab \vdots ac$ і тому $b \vdots c$.

Теорема 11. *Нехай* $a \in N$, *p – просте число. Якщо a не ділиться на p, то* $D(a,p) = 1$.

Доведення. Число p як просте число має лише два дільники 1 і p, тому $D(a,p)$ може дорівнювати або 1, або p. Але якщо $D(a,p) = p$, то $a \vdots p$, що суперечить умові. Отже, $D(a,p) = 1$.

Теорема 12. *Якщо добуток кількох чисел ділиться на просте число p, то принаймні одне з цих чисел ділиться на p.*

Доведення. Застосуємо індукцію за числом співмножників.

1. Доведемо теорему для двох співмножників. Нехай $a_1 a_2 \vdots p$. Якщо a_1 не ділиться на p, то за теоремою 11 $D(a_1, p) = 1$. Застосовуючи теорему 10, дістаємо, що $a_2 \vdots p$. Отже, для двох співмножників твердження доведено.

2. Припустимо, що твердження теореми має місце для *n* співмножників і доведемо його для *n* + 1 співмножників. Нехай $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \vdots p$; це можна переписати так: $(a_1 a_2 \dots a_n) a_{n+1} \vdots p$. Оскільки тут два співмножники, то згідно з доведеним хоча б один з них ділиться на *p*. Є дві можливості: а) $)a_{n+1} \vdots p$, тоді маємо співмножник, що ділиться на *p*; б) $(a_1 a_2 \dots a_n) \vdots p$, тоді згідно з припущенням індукції хоча б одне з чисел $a_1 a_2 \dots a_n$ ділиться на *p*. Отже, твердження теореми має місце і для добутку *n* + 1 чисел. Згідно з принципом математичної індукції теорему доведено.

9.7. Основна теорема арифметики.

Встановлені в попередньому пункті теореми дають змогу довести так звану основну теорему арифметики – теорему про розклад натурального числа на прості співмножники.

Теорема 13. *Будь-яке натуральне число, більше 1, може бути розкладено в добуток простих співмножників. Цей розклад є єдиним, якщо не враховувати порядок слідування співмножників.*

Доведення. Нехай $a > 1$, тоді за теоремою 1 число *a* має простий дільник. Позначивши його через p_1, дістанемо $a = p_1 a_1$. Якщо $a_1 > 1$, то, знов застосувавши теорему 1, дістанемо $a_1 = p_2 a_2$, де p_2 – просте, отже, $a = p_1 p_2 a_2$. Якщо $a_2 > 1$, то знов знаходимо $a_2 = p_3 a_3$ і $a = p_1 p_2 p_3 a_3$ і т. д. Оскільки $a > a_1 > a_2 > \cdots$, то після скінченного числа кроків дістанемо $a_n = 1$, отже, $a = p_1 p_2 \dots p_n$. Це і є шуканий розклад числа *a* на прості співмножники.

Доведемо єдиність знайденого розкладу. Припустимо, що для числа *a* є ще один розклад на прості співмножники: $a = p_1 p_2 \dots p_m$. Тоді

$$p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m \qquad (1)$$

Звідси видно, що добуток $p_1 p_2 \dots p_n$ ділиться на просте число q_1 тому за теоремою 12 принаймні один з співмножників ділиться на q_1. Нехай, наприклад, p_1 ділиться на q_1; оскільки p_1 і q_1 – прості, то з $p_1 \vdots q_1$ випливає, що $p_1 = q_1$. Скоротивши обидві частини рівності (1) на p_1, дістанемо $p_2 p_3 \dots p_n = q_2 q_3 \dots q_m$. Повторюючи аналогічні міркування, знайдемо $p_3 \dots p_n = q_3 \dots q_m$ і т. д. Після скінченного числа кроків в одній з частин рівності (наприклад, в лівій) скоротяться всі співмножники. Якби в правій частині при цьому скоротилися не всі співмножники, то прийшли б до неможливої рівності: $1 = q_{n+1} \dots q_m$. Отже, другий розклад нічим (крім, можливо, порядку) не відрізняється від першого.

9.8. Канонічний розклад числа

В розкладі числа a деякі прості співмножники можуть повторюватись. Нехай $p_1, p_2, \dots, p_k$ – різні співмножники цього розкладу і нехай p_i входить співмножником α_i раз. Тоді

$$a = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}.$$

Це є так званий канонічний розклад числа *a*.

Знаходження канонічного розкладу на практиці здійснюють послідовним діленням даного числа і часток $a_1, a_2, \dots$ (дивись доведення теореми) на прості дільники. При цьому ділення для зручності починають з найменшого простого дільника. Знайдемо, наприклад, канонічний розклад числа 14520. Це число ділиться на 2 і 14520 : 2 = 7260; частка знову ділиться на 2, 7260 : 2 = 3630. Це число знову ділиться на 2, 3630 : 2 = 1815. Число 1815 ділиться на 3 (бо 1 + 8 + 1 + 5 = 15 : 3), тому дістаємо 1815 : 3 = 605 і т. д. Записують це здебільшого так:

$$\begin{array}{r|l}
14520 & 2 \\
7260 & 2 \\
3630 & 2 \\
1815 & 3 \\
605 & 5 \\
121 & 11 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}$$

Отже, ми знайшли канонічний розклад: $14520 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$.

9.9. Загальний вигляд дільників натурального числа.

Поняття канонічного розкладу числа дає змогу встановити загальний вигляд усіх дільників заданого числа. Це зроблено в наступній теоремі.

Теорема 14. *Нехай* $a = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}$.*– канонічний розклад числа a. Число b є дільникам числа a тоді і тільки тоді, коли його канонічний розклад є*

$$b = p_1^{\beta_1}, p_2^{\beta_2}, \dots, p_k^{\beta_k} \; (0 \le \beta_1 \le \alpha_1, 0 \le \beta_2 \le \alpha_2, \dots, 0 \le \beta_k \le \alpha_k. \qquad (2)$$

Доведення.

Необхідність. Нехай $a \vdots b$, тобто $a = bq$, або $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k} = bq$. Внаслідок єдиності розкладу на прості співмножники до канонічних розкладів чисел b і q не можуть входити прості числа, відмінні від $p_1, p_2, \dots, p_k$, отже, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, $q = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ тому

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}\right)\left(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}\right) = p_1^{\beta_1+\gamma_1} p_2^{\beta_2+\gamma_2} \dots p_k^{\beta_k+\gamma_k}$$

Звідси завдяки єдності канонічного розкладу

$$\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1,\ \alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2,\ \dots,\ \alpha_k = \beta_k + \gamma_k$$

і тому $\alpha_1 \geq \beta_1,\ \alpha_2 \geq \beta_2,\ \dots,\ \alpha_k \geq \beta_k$, тобто b має канонічний розклад (2).

Достатність. Нехай *b* має канонічний розклад виду (2). Тоді число *a* можна записати так:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = \left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}\right)\left(p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \dots p_k^{\alpha_k-\beta_k}\right)$$

(оскільки всі різниці $\alpha_i - \beta_i$ існують завдяки умові $\beta_i \leq \alpha_i$). З цієї рівності видно, що число $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ є дільником числа *a*.

Так, дільниками числа $14520 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$ є, наприклад, числа $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30,\ 2^3 \cdot 5 = 40,\ 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 1320,\ 2^3 = 8,\ 3 \cdot 5 = 15$ і т. ін. (деякі показники β_i можуть дорівнювати нулю). Числа $2^4 \cdot 3,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 3^2 \cdot 11$ не є дільниками заданого числа.

Встановлена теорема дає змогу вивести формулу для знаходження числа всіх дільників натурального числа. Позначимо число всіх дільників числа *a* через $\tau(a)$. Так, наприклад, дільниками числа 12 є числа 1, 2, 3, 4, 6, 12, отже, $\tau(12) = 6$.

Теорема 15. *Нехай* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ *– канонічний розклад числа a. Тоді число дільників a буде таким:*

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

Доведення. Згідно з теоремою 14 множина всіх дільників числа *a* – це множина чисел виду

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}\ (0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k).$$

Оскільки число β_1 можна вибрати $\alpha_1 + 1$ способами (з чисел 0, 1, 2, ..., α_1), число β_2 можна вибрати $\alpha_2 + 1$ способами, …, число β_k можна вибрати $\alpha_k + 1$ способами, то за правилом добутку число всіх способів, якими можна дістати число b, що ділить a, дорівнює $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Завдяки єдиності розкладу на прості співмножники (теорема 13) це і є число всіх дільників числа *a*.

Приклад. Знайти число дільників числа 720.

Оскільки канонічний розклад числа 720 є

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

то число всіх дільників цього числа дорівнює

$$\tau(720) = (4+1)(2+1)(1+1) = 30.$$

9.10. Знаходження НСД та НСК за допомогою канонічного розкладу.

Знаючи канонічні розклади даних чисел, легко знайти їхні НСД та НСК. Нехай $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, …, $l = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ (деякі з показників степенів у цих канонічних розкладах можуть дорівнювати нулю).

Позначимо через μ_1 найменше, а через ν_1 – найбільше з чисел $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1$: $\mu_1 = \min\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1\}$, $\nu_1 = \max\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_1\}$; аналогічно покладемо $\mu_2 = \min\{\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2\}$, $\nu_2 = \max\{\alpha_2, \beta_2, \dots, \gamma_2\}$; ...; $\mu_k = \min\{\alpha_k, \beta_k, \dots, \gamma_k\}$, $\nu_k = \max\{\alpha_k, \beta_k, \dots, \gamma_k\}$.

Приклад. Знайти НСД і НСК чисел 240, 504, 490. Знайдемо спочатку канонічні розклади цих чисел:

240	2	504	2	490	2
120	2	252	2	245	5
60	2	126	2	49	7
30	2	63	3	7	7
15	3	21	3	1	
5	5	7	7		
1		1			

Таким чином $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$. Звідси видно, що найменшими показниками для простих чисел 2, 3, 5, 7 є відповідно 1, 0, 0, 0, а найбільшими – 4, 2, 1, 2. Тому:

$$D(240, 504, 490) = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2,$$
$$K(240, 504, 490) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 35280.$$

9.11. Ознаки подільності на складені числа.

Ряд ознак подільності на складені числа можна дістати, користуючись наступною теоремою.

Теорема 16. *Якщо* $D(a,b) = 1$*, то для подільності числа с на добуток ab необхідно і достатньо, щоб* $c \vdots a$ *і* $c \vdots b$.

Необхідність безпосередньо випливає з транзитивності подільності (навіть якщо a і b не взаємно-прості). Справді, $c \vdots ab \wedge ab \vdots a \Rightarrow c \vdots a$ і так само $c \vdots b$.

Достатність. Нехай $D(a,b) = 1$; якщо $c \vdots a$ і $c \vdots b$, то c є спільним кратним чисел a і b і за теоремою 4 c ділиться на $K(a,b)$. Але за наслідком з теореми 7 $K(a,b) = ab$, отже, $c \vdots ab$.

Іншими словами, *якщо ділиться на кожне з двох взаємно простих чисел, то воно ділиться на їхній добуток*:

$$(a \vdots b) \wedge (a \vdots c) \Rightarrow a \vdots (bc), \qquad (bc) = 1.$$

Наведемо приклади ознак подільності, що випливають з цієї теореми. Оскільки 6 = 2 · 3, 12 = 3 · 4, 15 = 3 · 5, 18 = 2 · 9, 22 = 2 · 11, 36 = 4 · 9 тощо і в кожному з добутків множники взаємно-прості, то дістаємо відповідні ознаки подільності. Сформулюємо, наприклад, ознаку подільності на 15.

Для подільності числа на 15 необхідно і достатньо, щоб воно ділилось на 3 *і на* 5. Так, число 247321425 має останню цифру 5 і сума його цифр ділиться на 3, отже, воно ділиться на 5 і на 3, а тому і на 15.

Приклад. Число a ділиться на 6, якщо воно ділиться на 2 і на 3, бо НСД (2, 3) = 1; число a ділиться на 12, якщо воно ділиться на 3 і на 4, бо НСД (3, 4) = 1. А чи можна сказати, що число a ділиться на 12, якщо воно ділиться на 2 і на 6? Ні, не можна, бо НСД (2, 6) $\neq$ 1. Наприклад, число 18 ділиться і на 2, і на 6, але на 12 не ділиться.

Властивості НСК (a, b) і НСД (a, b):

1) кожне спільне кратне даних чисел ділиться на їхнє найменше спільне кратне;

2) $a \vdots b \Rightarrow \text{НСД}(a,b) = b,\ \text{НСК}(a,b) = a$;

3) найбільшим спільним дільником кількох чисел є найменше спільне кратне всіх спільних дільників цих чисел;

4) $\text{НСД}(a,b) = 1 \Rightarrow \text{НСК}(a,b) = a \cdot b$;

5) $\text{НСД}(a,b) \cdot \text{НСК}(a,b) = a \cdot b \Leftrightarrow \text{НСК}(a,b) = \frac{ab}{\text{НСД}(a,b)}$.

9.12 Алгоритм Евкліда

Якщо задані числа досить великі, то знаходження їхніх НСД і НСК за допомогою канонічного розкладу є досить трудомістким завданням, оскільки розклад великих чисел на прості співмножники пов'язаний з громіздкими обчисленнями. Розглянемо інший метод відшукання НСД двох чисел – алгоритм Евкліда, який не потребує попереднього розкладу чисел на прості співмножники. НСК двох чисел можемо тоді знайти за теоремою 7.

Лема. *Якщо числа a, b, q, r пов'язані співвідношенням $a = bq + r$, то множина спільних дільників чисел a і b збігається з множиною спільних дільників чисел b і r, Зокрема, $D(a,b) = D(b,r)$.*

Доведення. За теоремою 7 попередньої теми кожний спільний дільник чисел a і b є дільником числа r і тому є спільним дільником чисел b і r. За тією самою теоремою кожний спільний дільник чисел b і r є дільником числа a і тому є спільним дільником чисел a і b. Отже, множина спільних дільників чисел a і b збігається з множиною спільних дільників чисел b і r. Зокрема, найбільші числа в цих множинах дорівнюють одне одному, тобто $D(a,b) = D(b,r)$.

На доведеній лемі ґрунтується спосіб знаходження НСД двох чисел, відомий як спосіб послідовного ділення, або алгоритм Евкліда. Цей спосіб був викладений ще Евклідом у VII книзі «Начал». Розглянемо його.

Нехай a, b відмінні від нуля. Якщо $a \vdots b$, то за теоремою 1 $D(a,b) = b$. Якщо a не ділиться на b, то за визначенням ділення з остачею: $a = bq_1 + r_1$, $0 < r_1 < b$. Якщо b не ділиться на r_1, то знов виконаємо ділення з остачею: $b = r_1 q_2 + r_2$, $0 < r_2 < r_1$. Якщо r_1 не ділиться на r_2, то так само дістанемо: $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, $0 < r_3 < r_2$ і т. д. Оскільки $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots \geq 0$, то не пізніше, ніж через b кроків, дістанемо остачу, що дорівнює нулю: $r_{n+1} = 0$. Дістаємо ряд рівностей:

$$\begin{aligned} &a = bq_1 + r_1, \\ &b = r_1 q_2 + r_2, \\ &r_1 = r_2 q_3 + r_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \\ &r_{n-1} = r_n q_{n+1}. \end{aligned}$$

Застосовуючи лему до перших *n* рівностей і теорему 5 до останньої рівності, дістаємо звідси послідовно:

$$D(a,b) = D(b,r_1) = D(r_1,r_2) = D(r_2,r_3) = \cdots = D(r_{n-1},r_n) = r_n$$

(останнє випливає з того, що $r_{n-1} \vdots r_n$). Оскільки r_n – це остання відмінна від нуля остача, то приходимо до такої теореми.

Теорема 17. *НСД двох чисел дорівнює останній відмінній від нуля остачі в алгоритмі Евкліда для цих чисел.*

Приклад. Знайти НСД і НСК чисел 2625 і 1988.

Для знаходження НСД застосуємо алгоритм Евкліда. При цьому після кожного ділення будемо приписувати нове ділене зліва від остачі (яка є новим дільником):

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & & & 2625 & 1988 \\
 & & & & & 1988 & 1 \\
 & & & & 1988 & 637 & \\
 & & & & 1911 & 3 & \\
 & & & 637 & 77 & & \\
 & & & 616 & 8 & & \\
 & & 77 & 21 & & & \\
 & & 63 & 3 & & & \\
 & 21 & 14 & & & & \\
 & 14 & 1 & & & & \\
14 & 7 & & & & & \\
14 & 2 & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}$$

Таким чином,

$$
\begin{aligned}
2625 &= 1988 \cdot 1 + 637,\\
1988 &= 637 \cdot 3 + 77,\\
637 &= 77 \cdot 8 + 21,\\
77 &= 21 \cdot 3 + 14,\\
21 &= 14 \cdot 1 + 7,\\
14 &= 7 \cdot 2.
\end{aligned}
$$

Отже, остання відмінна від нуля остача є 7 і тому

$$D(2625, 1988) = 7.$$

Для відшукання НСК цих чисел використаємо теорему 7:

$$K(2625, 1988) = \frac{2625 \cdot 1988}{7} = 745500.$$

Приклади розв'язування задач

1. Подати у вигляді поетапного алгоритму правило обчислення остачі від ділення одного числа на друге.

Розв'язання. Вихідні дані: $m, n \in N$.

1) порівняти m з n. Якщо $m < n$, то перейти до 2), у противному разі перейти до 3);
2) прийняти $r = m$, перейти до 4);
3) замінити значення m значенням $m - n$; перейти до 1);
4) закінчити процес обчислень, взявши r за потрібне значення.

Застосуємо, наприклад, цей алгоритм до вихідних даних: $m = 25$ і $n = 12$.

Виконуючи 1), бачимо, що нерівність 25 < 12 неправильна.

Переходимо до 3). Виконаємо вказівки 3): 25 – 12 = 13.

Переходимо до 1). Виконуючи 1), бачимо, що нерівність $13 < 12$ неправильна.

Переходимо до 3). Виконаємо вказівки 3): 13 – 12 == 1.

Переходимо до 1). Нерівність 1 < 12 правильна.

Переходимо до 2). Приймаємо $r = 1$. Переходимо до 4).

Закінчуємо процес обчислення, взявши за шукану остачу $r = 1$. Отже, результатом застосування цього алгоритму до вихідних даних $m = 25$ і $n = 12$ маємо остачу $r = 1$.

2. Подати у вигляді поетапного алгоритму алгоритм Евкліда для знаходження НСД(a, b).

Розв'язання. Вихідними даними є числа: $a, b \in N$.

1) порівняти a і b. Якщо $a \geq b$, то перейти до 2), в противному разі – до 3);
2) присвоїти x значення a, y – значення b; перейти до 4);
3) присвоїти x значення b, y – значення a; перейти до 4);
4) обчислити остачу r від ділення x на y; перейти до 5);
5) порівняти r з 0. Якщо $r = 0$, то перейти до 7), в противному разі – до 6);
6) прийняти x, рівним значенню y, y – значенню r; перейти до 4);
7) прийняти y за результат і закінчити обчислення.

3. Довести, що якщо у двох числах сума цифр однакова, то їхня різниця ділиться на 9.

Розв'язання. Різниця двох чисел ділиться на будь-яке число, якщо остачі від ділення зменшуваного і від'ємника на це число рівні. Якщо дані числа мають однакову суму цифр, то остачі від ділення цих чисел на 9 будуть рівні. Отже, твердження доведене.

4. Нехай n – довільне натуральне число. Довести, що n, $n+1$, $2n+1$ попарно взаємно прості.

Розв'язання. Числа n і $n+1$ взаємно прості, бо їхня різниця дорівнює 1 (1 не $\vdots\, d$, якщо $d \neq 1$). Число $2n+1 = n + (n+1)$ є сумою цих чисел. Тому що НСД $(n, n+1) = 1$, то коли $n \vdots a$, число $2n+1$ не $\vdots\, a$ (за необхідною і достатньою ознакою подільності суми). Отже, НСД $(n, 2n+1) = 1$.

Міркуючи аналогічно, дістанемо $(n+1) \vdots d \Rightarrow (2n+1)$ не $\vdots\, d$, тобто НСД $(n+1, 2n+1) = 1$. Отже, $(n, n+1, 2n+1) = 1$.

5. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел:

а) 6160 і 1560; б) 1980, 702 і 936.

Розв'язання.

а)

$$\begin{array}{r|l}
6160 & 2 \\
3080 & 2 \\
1540 & 2 \\
770 & 2 \\
385 & 5 \\
77 & 7 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
1560 & 2 \\
780 & 2 \\
390 & 2 \\
195 & 5 \\
39 & 3 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}$$

$6160 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11;\ 1560 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 13.$

$\text{НСД}(6160, 1560) = 2^3 \cdot 5 = 40.$

б) Знайдемо НСД чисел 1980, 702 і 936 скороченим способом

$$\begin{array}{rrrr}
1980 & 702 & 936 & 2 \\
990 & 351 & 468 & 3 \\
330 & 117 & 156 & 3 \\
110 & 39 & 52 &
\end{array}$$

Числа 110, 39, 52 взаємно прості. Отже, $\text{НСД}(1980, 702, 936) = 2 \cdot 3^2 = 18.$

6. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД і НСК чисел 2911 і 1763.

Розв'язання.

1) Знаходимо НСД (2911, 1763). Для цього більше з цих чисел ділимо на менше, якщо залишиться остача, то менше ділимо на остачу, потім першу остачу на другу і т. д., поки дістанемо остачу нуль. Остання не рівна нулю остача і буде шуканим найбільшим спільним дільником даних чисел.

$$\begin{array}{r|l} -\,2911 & 1763 \\ 1763 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1763 & 1148 \\ 1148 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1148 & 615 \\ 615 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,615 & 533 \\ 533 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,533 & 82 \\ 492 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,82 & 41 \\ \underline{82} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

НСД (2911, 1763) = 41.

1) $\text{НСК}(a,b) = \frac{ab}{\text{НСД}(a,b)}$;

$\text{НСК}(2911, 1763) = \frac{2911 \cdot 1763}{41} = 125173.$

7. Найбільший спільний дільник двох чисел – 27, а їхнє найменше спільне кратне 324. Знайти ці числа, якщо одне з них становить $\frac{3}{4}$ другого.

Розв'язання. Знаходимо добуток цих чисел:

$$ab = \text{НСК}(a,b) \cdot \text{НСД}(a,b) = 27 \cdot 324.$$

За умовою $b = \frac{3}{4}a \Rightarrow a \cdot \frac{3}{4}a = 27 \cdot 324 \Rightarrow a^2 = 36 \cdot 324 \Rightarrow a = 6 \cdot 18;$

$a = 108,\ b = 108 \cdot \frac{3}{4} = 81.$

Відповідь. Шукані числа – 108 і 81.

Виконайте перевірку, склавши і розв'язавши обернену задачу.

8. Турист в перший день проїхав на велосипеді 80 км, в другий – 64, а в третій – 96 км. Скільки годин велосипедист був у дорозі за 3 дні, якщо швидкість його була однакова і найбільша з можливих?

Розв'язання. Швидкість велосипедиста знайдемо як НСД (80, 64, 96).

80	64	96	2
40	32	48	2
20	16	24	2
10	8	12	2
5	4	6	

$\text{НСД}(80, 64, 96) = 2^4 = 16.$

Отже, швидкість велосипедиста була 16 км/год, тоді весь час його руху дорівнює:

$$(80 + 64 + 96) : 16 = 15 \text{ (год)}.$$

Відповідь. Велосипедист був у дорозі 15 год.

Вправи

1. Довести, що всяке просте число, більше 3, дає при діленні на 4 достачу 1 або 3, тобто має вигляд $4m+1$ або$4m+3$, де $m \in N$. Чи справедливе обернене твердження?

2. Довести, що всяке просте число, більше 5, дає при діленні на 6 достачу 1 або 5, тобто має вигляд $6m+1$ або $6m+5$, де $m \in N$. Чи справедливе обернене твердження?

3. Довести, що існує безліч простих чисел виду $6m+5$.

Вказівка: Показати спочатку, що добуток чисел виду $4m+1$ є знов число такого виду і тому число виду $4m+3$ має хоча б один простий дільник виду $4m+3$.

4. Довести, що існує безліч простих чисел виду $6m+5$.

5. Знайти всі прості числа p, для яких $p+10$ і $p+14$ також прості.

6. Довести, що число n^4+4 є складеним при будь-якому натуральному $n>1$.

7. Сформулювати ознаки подільності на 6, 18, 21, 22, 36, 44, 72.

8. Довести, що два послідовні непарні числа завжди взаємно-прості.

9. Довести, що НСД двох послідовних парних чисел дорівнює 2.

10. Довести, що для довільного натурального $n \geq 1$ числа n, $n+1$, $2n+1$ попарно взаємно-прості.

11. Знайти канонічний розклад таких чисел: а) 714285; б) 131952

12. Знайти канонічний розклад числа 10800 і число всіх дільників цього числа.

13. Знайти канонічний розклад числа 15561000 і число всіх дільників цього числа.

14. Знайти за допомогою канонічного розкладу НСД і НСК таких чисел:

а) 218, 345, 180;
б) 48, 240, 876;
в) 24, 64, 160, 288;
г) 3640 і 14300;
д) 37730 і 46550.

15. За алгоритмом Евкліда знайти НСД і НСК таких чисел:

а) 11647 і 2831;
б) 21361 і 10291;
в) 13566 і 8211;
г) 315432 і 745344.

ТЕМА 10. ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ. МНОЖИНА ДОДАТНІХ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ.

10.1. Поняття дробу

Історично поява дробів пов'язана з вимірюванням величин. З'ясуємо, які, наприклад, можуть з'явитись дроби при вимірюванні довжини відрізка.

Візьмемо відрізок *a*. Щоб знайти його довжину, виберемо за одиницю довжини відрізок *e*.

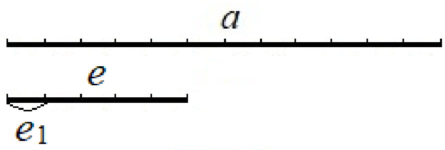


Рис. 48

При вимірюванні виявилось, що довжина відрізка *a* більша 3*e*, але менша 4*e*. Тому її не можна виразити натуральним числом (при одиниці довжини *e*). Але якщо розбити відрізок *e* на 4 рівних частини, кожна з яких дорівнює e_1, то довжина відрізка *a* виявиться рівною $14e_1$. Якщо повернутись до початкової одиниці довжини *e*, то мусимо сказати, що відрізок *a* складається з 14 відрізків, що дорівнюють четвертій частині відрізка *e*, тобто, кажучи про довжину відрізка *a*, ми оперуємо двома натуральними числами 14 і 4. Домовились у такій ситуації довжину відрізка записувати у вигляді $\frac{14}{4}e$, а символ $\frac{14}{4}$ – називати дробом.

Нехай $n \in N$, тоді існує така величина B, що $nB = E$; величину B називають n-частиною величини E і записують це так: $B = \frac{1}{n}E$. Якщо задано величину A, $A = pB$ $(p \in N_0)$, то пишуть $A = \frac{p}{n}E$ і кажуть, що величини A **сумірна** з E. У цьому разі покладемо $m(A) = \frac{p}{n}$ і символ $\frac{p}{n}$ назвемо **дробом** з *чисельником* p і *знаменником* n.

У загальному вигляді поняття дробу визначають так:

нехай дано відрізок *a* і одиничний відрізок *e*, причому відрізок *e* є сумою *n* відрізків, що дорівнюють e_1. Якщо відрізок *a* складається з *m* відрізків, рівних e_1, то його довжина може бути подана у вигляді $\frac{m}{n}e$. Символ $\frac{m}{n}$ називається дробом, в ньому *m* і *n* натуральні числа. Читають цей символ «ем енних».

Повернемось до рисунка 2 вибраний відрізок e_1 є четвертою частиною відрізка *e*. Очевидно, що це не єдиний варіант вибору такої частини відрізка *e*, яка вкладається ціле число разів у відрізку *a*. Можна, наприклад, взяти восьму частину відрізка *e*, тоді відрізок *a* буде складатися з 28 таких частин і його довжина буде дорівнювати $\frac{28}{8}e$. Можна взяти шістнадцяту частинку відрізка *e*, тоді відрізок *a* буде складатися з 56 таких частин і його довжина буде дорівнювати $\frac{56}{16}e$. Якщо уявити цей процес продовженим необмежено, будемо мати, що довжина відрізка *a* може бути виражена нескінченною множиною різних дробів: $\frac{14}{4}, \frac{28}{8}, \frac{56}{16}, \frac{112}{32}, \ldots$

Взагалі, якщо при одиниці довжини e довжина відрізка a виражається дробом $\frac{m}{n}$, то вона може бути виражена будь-яким дробом $\frac{mk}{nk}$, де k – натуральне число.

Отже, дріб – це пара чисел $(p, n) \in N_0 \times N$, яку для зручності записують у вигляді $\frac{p}{n}$. При цьому рівність і нерівність дробів і правило дій з дробами визначають так, щоб виконувались вимоги, які повинна задовільняти міра величини. Введемо спочатку поняття рівності дробів.

Нехай $m(A) = \frac{p}{n}$, тоді згідно з означенням $nB = E$, $pB = A$, що рівносильно рівності $nA = pE$. Якщо при іншому вимірюванні дістали $m(A) = \frac{q}{k}$, то аналогічно $kA = qE$. Тоді $(nq)A = (pq)E$ і $(kp)A = (qp)E$, звідки $(nq)A = (kp)A$, що можливо лише при $nq = kp$. З другого боку, якщо при вимірюванні даної величини дістали два числа, то вони мають дорівнювати одне одному. Ці міркування роблять природним таке означення.

$\left(\frac{p}{n} = \frac{q}{k}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (pk = nq)$, *тобто дроби* $\frac{p}{n}$ *і* $\frac{q}{k}$ *називаються рівними, якщо* $pk = nq$.

Отже, $\frac{14}{4} = \frac{28}{8} = \frac{56}{16} = \frac{112}{32} = \cdots$

Якщо дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ рівні, то пишуть $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Існує ознака, користуючись якою, визначають рівні дроби чи ні: для того, щоб дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ були рівними, необхідно і достатньо, щоб $mq = np$.

1. Покажемо, що $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Rightarrow mq = np$. Оскільки $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ для будь-якого натурального q, а $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$ для будь-якого натурального n, то з рівності дробів $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ слідує рівність $\frac{mk}{nk} = \frac{pn}{qn}$, з якої, в свою чергу, випливає, що $mq = np$.

2. Покажемо, що $mq = np \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Якщо поділити обидві частини істинної рівності $mq = np$ на натуральне число qn, то отримаємо істинну рівність $\frac{mq}{nq} = \frac{pn}{qn}$. Але $\frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$, а $\frac{pn}{qn} = \frac{p}{q}$. Отже, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Приклад. Визначимо, чи рівні дроби $\frac{17}{19}$ і $\frac{23}{27}$. Для цього порівняємо добутки $17 \cdot 27$ і $19 \cdot 23$: $17 \cdot 27 = 459$; $19 \cdot 23 = 437$. Оскільки $459 \neq 437$, то $\frac{17}{19} \neq \frac{23}{27}$.

Теорема 1 *(основна властивість дробу). Якщо чисельник і знаменник дробу помножити на довільне натуральне число, відмінне від нуля, або поділити на довільний їхній спільний дільник, то дістанемо дріб, що дорівнює даному.*

Доведення. Для доведення теореми досить показати, що $(\forall m \in N)$ $\left(\frac{p}{n} = \frac{pm}{nm}\right)$; згідно з означенням рівності дробів це випливає з очевидної рівності $p(nm) = n(pm)$.

Основну властивість дробу широко використовують на практиці.

Ділення чисельника і знаменника дробу на їхній спільний дільник називають **скороченням дробу**. Якщо треба дістати дріб, що дорівнює даному, з якомога меншими чисельником і знаменником, то треба ділити чисельник і знаменник на їх НСД; дріб, у якого чисельник і знаменник взаємно-прості, називають **нескоротним**. Так, якщо $D(n,p) = d$, то $p = p_1 d$, $n = n_1 d$ і $\frac{p}{n} = \frac{p_1 d}{n_1 d} = \frac{p_1}{n_1}$; при цьому згідно з теоремою 8 п.9.5 $D(n_1, p_1) = 1$, тобто дріб $\frac{p_1}{n_1}$ нескоротний. Наприклад, $\frac{5}{17}$ нескоротний дріб.

У результаті скорочення дробу, як правило, маємо одержати нескоротний дріб, рівний даному.

Приклад. Скоротимо дріб $\frac{48}{80}$. Необхідно чисельник і знаменник даного дробу поділити на їх найбільший спільний дільник: НСД (48;80) = НСД (48;32) = НСД (32;16) = НСД(16;16) = 16 (за алгоритмом Евкліда). Маємо: $\frac{48}{80} = \frac{48:16}{80:6} = \frac{3}{5}$.

Розглянемо ще одне застосування основної властивості дробу – зведення дробів до спільного знаменника.

Зведення дробів до спільного знаменника – це заміна дробів рівними їм дробами, що мають однакові знаменники.

Нехай задано дроби $\frac{p_1}{n_1}$, $\frac{p_2}{n_2}$, …, $\frac{p_k}{n_k}$; позначимо через n довільне спільне кратне знаменників $n_1, n_2, \dots, n_k$, тоді $n = n_1 t_1 = n_2 t_2 = \cdots = n_k t_k$. Помноживши чисельники і знаменники даних дробів відповідно на $t_1, t_2, \dots, t_k$, дістанемо:

$$\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_1 t_1}{n_1 t_1} = \frac{p_1 t_1}{n}, \qquad \frac{p_2}{n_2} = \frac{p_2 t_2}{n}, \qquad \dots, \qquad \frac{p_k}{n_k} = \frac{p_k t_k}{n},$$

тобто дані дроби замінили дробами, що дорівнюють їм, з однаковими знаменниками. Число n називають **спільним знаменником** даних дробів, а проведену заміну – зведенням дробів до спільного знаменника. Часто намагаються дістати найменший спільний знаменник; ним очевидно буде НСК даних знаменників.

Спільним знаменником двох дробів $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ є спільне кратне чисел n і q, а найменшим спільним знаменником їх найменше спільне кратне.

Приклад.

1. Скоротити дріб $\frac{336}{714}$. Оскільки чисельник і знаменник парні, то дріб можна скоротити на 2, але ми скоротимо цей дріб на НСД чисельника і знаменника, який знайдемо за алгоритмом Евкліда:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \begin{array}{r|l} 714 & 336 \\ \hline 672 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{r|l} 336 & 42 \\ \hline 366 & 8 \end{array} & \\
0 &
\end{array}
$$

Отже, $D = (336, 714) = 42$; поділивши чисельник і знаменник дробу на 42, дістанемо $\frac{336}{714} = \frac{8}{17}$, причому останній дріб нескоротний.

2. Звести до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{8}{15}$ і $\frac{4}{35}$. Знайдемо НСК (15;35) = 3 · 5 · 7 = 105. Оскільки 105 = 15 · 7= 35 · 3, то $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{56}{105}$; $\frac{4}{35} = \frac{4 \cdot 3}{35 \cdot 3} = \frac{12}{105}$.

10.2. Поняття додатного раціонального числа

Відомо, що одному і тому ж відрізку можна поставити у відповідність нескінченну множину рівних дробів, які виражають його довжину при вибраній одиниці *е*. Але довжина відрізка повинна виражатись єдиним числом. Тому рівні дроби вважають записами одного і того ж числа, а саме число називають додатним раціональним числом.

Додатне раціональне число *– це множина рівних дробів, а кожен дріб, що належить цій множині, є запис (подання) цього числа.*

Наприклад, множина $\left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}, \dots\right\}$ є деяке додатне раціональне число, а дроби $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}$ і т. д. – це різні записи цього числа.

Множина $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \frac{8}{28}, \dots\right\}$ визначає друге додатне раціональне число.

Згідно з поданим вище означенням, ми, побачивши запис $\frac{m}{n}$, повинні говорити, що – це дріб або додатне раціональне число, записане у вигляді дробу $\frac{m}{n}$. Частіше говорять коротше: «Дано додатне раціональне число $\frac{m}{n}$». Але це не означає, що ми ототожнюємо поняття додатного раціонального числа і дробу. Це різні поняття. Що являє собою запис $\frac{5}{9}$? Можливі відповіді: «Це дріб», «Це запис додатного раціонального числа».

Чи можна сказати, що $\frac{5}{9}$ – це додатне раціональне число? Можна, заради того, щоб було коротше. Серед усіх записів деякого додатного раціонального числа виділяють нескоротний дріб, тобто дріб, у якому чисельник і знаменник такі, що їх найбільший спільний дільник 1. Наприклад, серед дробів $\frac{2}{7}, \frac{4}{14}, \frac{6}{21}, \frac{8}{28}, \dots$, що визначають раціональне число, таким дробом є $\frac{2}{7}$.

Теорема 2. *Для будь-якого додатного раціонального числа існує один і тільки один нескоротний дріб, що є записом цього числа.*

Доведення. Нехай $a \in Q_+$ і $\frac{p}{n}$ – деякий представник класу a. Покладемо $d = D(p, n)$, тоді $p = p_1 d$, $n = n_1 d$, а отже $\frac{p}{n} = \frac{p_1 d}{n_1 d} = \frac{p_1}{n_1}$, причому дріб $\frac{p_1}{n_1}$ нескоротний. Отже, нескоротний дріб, що зображує число a, існує.

Доведемо єдиність такого зображення. Припустимо, що нескоротний дріб $\frac{p_2}{n_2}$ також зображує число a. Тоді $\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2}$, звідки за означенням рівності дробів випливає, що $p_1 n_2 = n_1 p_2$.

Звідси видно, що $(p_1 n_2) \vdots n_1$, аде $D(p_1, n_1) = 1$, тому за теоремою 16 п.9.11 $n_2 \vdots n_1$. Аналогічно можна показати, що $(n_1 p_2) \vdots n_2$, але $D(p_2, n_2) = 1$, тому $n_1 \vdots n_2$. Завдяки антисиметричності відношення подільності (теорема 3 п. 8.1.) дістанемо: $n_2 \vdots n_1 \wedge n_1 \vdots n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$, тоді $p_1 n_2 = n_1 p_2 \Rightarrow p_1 = p_2$.

Визначаючи поняття додатного раціонального числа, ми скористались вимірюванням відрізків. Необхідність виразити точно довжину відрізка єдиним числом привела до появи додатних раціональних чисел.

Розглянемо обернену задачу. Нехай $\frac{m}{n}$ запис деякого раціонального числа. Чи знайдеться такий відрізок, довжина якого виражається цим числом?

Доведемо, що для будь-якого додатного числа, поданого дробом $\frac{m}{n}$, існує відрізок, довжина якого виражається цим числом при вибраній одиниці довжини.

Приклад. Побудуємо відрізок, довжина якого виражається числом $\frac{13}{4}$. Для цього:

1) вибираємо одиницю довжини e;

2) ділимо відрізок e на 4 рівні частини;

3) відкладаємо на промені O_x 13 відрізків, кожен з яких дорівнює четвертій частині відрізка *e*.

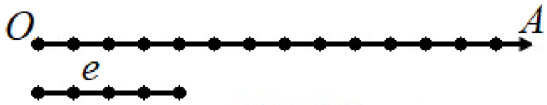


Рис. 49

У результаті будемо мати відрізок *OA*, довжина якого виражається числом $\frac{13}{4}$ (рис.49)

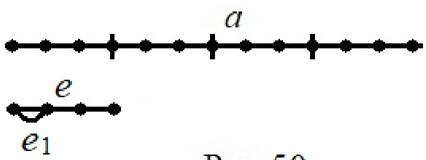


Рис. 50

Множина додатних раціональних чисел позначається Q_+.

Покажемо, що всі натуральні числа містяться в цій множині, тобто що $N \subset Q_+$. Нехай довжина відрізка a при одиниці довжини e виражається натуральним числом *m.*

Наприклад, на рисунку 50 вона подана числом 4:

$$a = 4e$$

$$a = \frac{4 \cdot 3}{3} e$$

Розбиваємо відрізок e на *n* рівних частин. Тоді *n -на* частина відрізка e буде вкладатися у відрізок a $m \cdot n$ разів, тобто довжина відрізка *a* буде виражатись дробами виду $\frac{m\cdot n}{n}$. Але множина цих дробів є додатним раціональним числом. Отже, довжина відрізка a , з одного боку, виражається натуральним числом m, а з другого – додатним раціональним числом $\frac{m\cdot n}{n}$. Але це має бути одне і те ж число. Тому доцільно вважати, що дроби виду $\frac{m\cdot n}{n}$ є записами натурального числа *m*. Отже, ми показали, що будь-яке натуральне число *m* можна подати у вигляді дробу $\frac{m\cdot n}{n}$, тому $N \subset Q_+$.

Усі натуральні числа містяться у множині додатних раціональних чисел (рис.51). Числа, які доповнюють множину натуральних чисел до множини додатних раціональних чисел, називають дробовими числами.

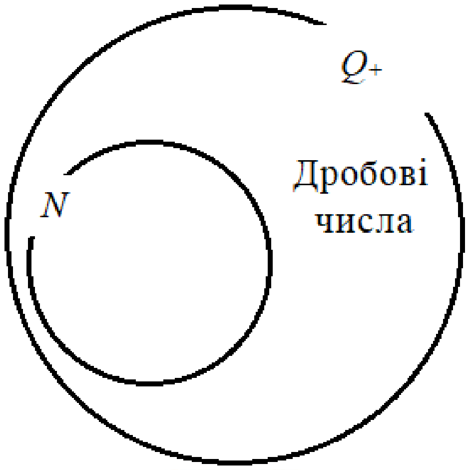


Рис. 51

10.3. Додавання додатних раціональних чисел

Нехай відрізки *a, b, c* такі, що $c = a + b$ і при вибраній одиниці довжини *e* $a = \frac{6}{4}e$, $b = \frac{7}{4}e$.

Тоді $c = a + b = \frac{6}{4}e + \frac{7}{4}e = 6e_1 + 7e_1 = \;= (6+7)e_1 = \frac{13}{4}e$, тобто довжина відрізка *c* виражається числом $\frac{13}{4}e$, яке доцільно розглядати, як суму чисел $\frac{6}{4}$ і $\frac{7}{4}$.

Нехай задано два дроби з однаковими знаменниками, які дістали при вимірюванні деякої адитивно-скалярної величини: $m(A) = \frac{p}{n}$, $m(B) = \frac{q}{n}$. Це означає, що $A = pC$, $B = qC$, де $C = \frac{1}{n}E$ (E – одиниця вимірювання). Звідси $A + B = (p+q)C$, тому $m(A+B) = \frac{p+q}{n}$. Отже, щоб виконувалась вимога адитивності $m(A+B) = m(A) + m(B)$, тобто для дробів з однаковими знаменниками треба покласти $\frac{p}{n} + \frac{q}{n} = \frac{p+q}{n}$. Якщо ж задано два дроби з різними знаменниками, то їх треба спочатку звести до спільного знаменника.

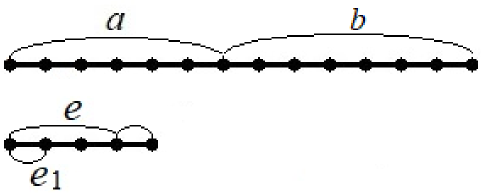


Рис. 52

Наведені міркування роблять цілком природним наступне означення.

Нехай $a, b \in Q_+$ і нехай ці раціональні числа подані дробами $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{n}$ (якщо ці дроби мають різні знаменники, то їх треба звести до спільного знаменника). Сумою $a + b$ називається раціональне число, що зображується дробом $\frac{p+q}{n}$. Операція відшукання суми називається додаванням.

Неважко показати, що сума двох раціональних чисел не залежить від вибору дробів, що зображують цілі числа, тобто $\frac{p}{n}=\frac{p_1}{n_1} \wedge \frac{q}{k}=\frac{q_1}{k_1} \Rightarrow \frac{p}{n}+\frac{q}{k}=\frac{p_1}{n_1}+\frac{q_1}{k_1}$. Пропонуємо зробити це самостійно.

Зазначимо, що коли натуральні числа розглядати як елементи Q_+, то їх додавання за попереднім означенням зводиться до звичайного додавання натуральних чисел. Справді, якщо $p,q \in N_0$, то, розглядаючи ці числа як елементи Q_+, можемо їх зобразити відповідно дробами $\frac{p}{1}$ і $\frac{q}{1}$, тому їхня сума за попереднім означенням дорівнює числу, що зображується дробом $\frac{p}{1}+\frac{q}{1}=$ $=\frac{p+q}{1}=p+q$.

Приклад. Знайти суму дробів $\frac{12}{35}$ і $\frac{8}{15}$

Оскільки ці дроби мають різні знаменники, їх треба спочатку звести до спільного знаменника: $K(35,15)=K(5\cdot 7, 3\cdot 5)=3\cdot 5\cdot 7=105$, отже,

$$\frac{12}{35}+\frac{8}{15}=\frac{36}{105}+\frac{56}{105}=\frac{36+56}{105}=\frac{92}{105}.$$

Теорема 3. *Операція додавання додатних раціональних чисел має такі властивості:*

а) комутативність: $(\forall a)(\forall b)(a+b=b+a),\ a,b \in Q_+$

б) асоціативність: $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\big((a+b)+c=a+(b+c)\big),\ a,b,c \in Q_+$.

Доведення. Доведемо комутативність додавання. Асоціативність доводять аналогічно.

Нехай, $a,b \in Q_+$. Зобразимо ці числа дробами з однаковими знаменниками; нехай дріб $\frac{p}{n}$ подає число a, дріб $\frac{q}{n}$ – число b. Тоді завдяки комутативності додавання в N_0 маємо: $p+q=q+p \Rightarrow \frac{p+q}{n}+\frac{q+p}{n}$. Дріб $\frac{p+q}{n}$ зображує число $a+b$, а дріб $\frac{q+p}{n}$ – число $b+a$, отже, $a+b=b+a$.

Таким чином, можна сказати, що переставний закон додавання додатних раціональних чисел випливає із означення цих чисел і переставного закону додавання натуральних чисел.

Нехай, $a,b \in Q_+$; $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{k}$ – дроби, що зображують ці числа. Говорять, що $a<b$ (або $b>a$), якщо $\frac{p}{n}<\frac{q}{k}$, тобто $pk<nq$.

З цього означення випливає, що коли $a \neq 0$, то $a>0$.

Теорема 4. *Для довільних $a,b \in Q_+$ виконується одне і тільки одне з таких трьох співвідношень: $a=b,\ a<b,\ b<a$.*

Доведення. Нехай числа a,b подані відповідно дробами $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{k}$; тоді для натуральних чисел pk і nq, згідно з теоремою розподілу порядку має місце одне і тільки одне і тільки одне з трьох співвідношень $pk=nq,\ pk<nq,\ pk>nq$, що внаслідок означення рівності дробів та додавання додатних раціональних чисел доводить теорему.

Встановимо тепер властивості відношення $<$, аналогічні властивостям цього відношення на множині N_0.

Теорема 5 *(транзитивність відношення $<$).*

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a < b \land b < c \Rightarrow a < c), \qquad a, b, c \in Q_+$$

Доведення. Нехай числа a, b, c подані дробами відповідно $\frac{p}{n}, \frac{q}{k}, \frac{r}{m}$. Тоді $a < b \Rightarrow pk < nq$, $b < c \Rightarrow qm < kr$. Перемноживши нерівності почленно, дістанемо: $pkqm < nqkr$, звідки $pm < nr$, тобто $a < c$.

Теорема 6 *(несиметричність відношення $<$).*

$$(\forall a)(\forall b)(a < b \Rightarrow \overline{b < a}), \qquad a, b \in Q_+$$

Доведення. Нехай числа a, b подані відповідно дробами $\frac{p}{n}, \frac{q}{k}$.

Тоді $a < b \Rightarrow pk < nq \Rightarrow \overline{nq < pk} \Rightarrow \overline{b < a}$.

Таким чином, відношення $<$ на множині Q_+ є несиметричним і транзитивним відношенням, тобто відношенням строгого порядку.

Наступна теорема показує істотну відмінність між впорядкованими множинами $(N_0, <)$ і $(Q_+, <)$. Натуральний ряд $(N_0, <)$ є дискретною множиною, тобто для кожного натурального числа існує сусіднє число; множина $(Q_+, <)$ є щільною.

Теорема 7. *Множина додатних раціональних чисел є щільною, тобто між будь-якими двома різними числами $a, b \in Q_+$ міститься безліч чисел цієї множини.*

Доведення. Нехай $a, b \in Q_+$, $a \neq b$. Тоді, згідно з теоремою 4, або $a < b$, або $b < a$. Нехай, наприклад, $a < b$ і числа a і b представляються відповідно дробами $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{n}$ (для зручності беремо дроби з однаковим знаменником). Оскільки $a < b$, то $p < q$, звідки $2p < p + q < 2q$ і тому $\frac{2p}{2n} < \frac{p+q}{2n} < \frac{2q}{2n}$. Якщо позначити через c раціональне число, що представляється дробом $\frac{p+q}{2n}$, то з останньої нерівності випливає, що $a < c < b$. Отже, між числами a і b міститься число c. Міркуючи так само, знайдемо число c_1, що міститься між a і c, число c_2, що міститься між a і c_1 і т. д., тобто знайдемо безліч чисел, що містяться між a і b.

Теорема 8 *(монотонність додавання).*

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a < b \Rightarrow a + c < b + c), \qquad a, b, c \in Q_+$$

10.4. Віднімання додатних раціональних чисел

Операція віднімання в Q_+, як і в N_0, визначається як обернена для операції додавання: різниця двох чисел $a, b \in Q_+$, є за означенням таке число $a - b \in Q_+$, що $b + (a - b) = a$.

Різницею додатних раціональних чисел a і b називається таке додатне раціональне число c, що $a = b + c$.

Поняття різниці визначено, а як практично від одного додатного раціонального числа відняти друге?

Нехай $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$, а різниця $a - b$ нехай подається дробом $\frac{x}{n}$. Знайдемо x. За означенням різниці $\frac{m}{n} = \frac{p}{n} + \frac{x}{n}$, а за правилом суми $\frac{p}{n} + \frac{x}{n} = \frac{p+x}{n}$. Таким чином, $m = p + x$, але m, p і x – числа натуральні, а для них цей запис означає, що $x = m - p$, отже:

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n}$$

Теорема 9. *Нехай $a, b \in Q_+$; різниця $a - b$ існує тоді і тільки тоді, коли $a \geq b$. Якщо різниця існує, то вона єдина.*

Доведення. Необхідність: $(\exists c)(c = a - b) \Rightarrow a \geq b$. Справді, нехай існує різниця $c = a - b$. Якщо $c = 0$, то $a = b$; якщо $c \neq 0$, то $c > 0$, тоді за теоремою 8 $b + c > b + 0$, тобто $a > b$. Отже $a = b \vee a > b \Rightarrow a \geq b$.

Достатність: $a \geq b \Rightarrow (\exists c)(c = a - b)$. Справді, представимо числа a і b дробами з однаковими знаменниками, $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{n}$. Оскільки $a \geq b$, то $p \geq q$, тому існує різниця $p - q \in N_0$. Розглядаючи дріб $\frac{p-q}{n}$, маємо: $\frac{p}{n} = \frac{q}{n} + \frac{p-q}{n}$; отже, якщо позначити через c раціональне число, подане дробом $\frac{p-q}{n}$, то $a = b + c$, тобто $c = a - b$.

Єдиність різниці доведіть самостійно.

Властивості віднімання на множині натуральних чисел переносяться на операцію віднімання в Q_+.

10.5. Множення і ділення додатних раціональних чисел

Добутком двох дробів будемо називати дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник – добутку знаменників:

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{pq}{nk}.$$

Нехай задано два додатних раціональних числа a, b і нехай дроби $\frac{p}{n}$ і $\frac{p_1}{n_1}$ зображують число a, а дроби $\frac{q}{k}$ і $\frac{q_1}{k_1}$ – число b. Покажемо, що тоді $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{k} = \frac{p_1}{n_1} \frac{q_1}{k_1}$. Справді, за умовою $\frac{p}{n} = \frac{p_1}{n_1}$, тому за означенням рівності дробів $pn_1 = np_1$ і аналогічно $\frac{q}{k} = \frac{q_1}{k_1} \Rightarrow qk_1 = kq_1$. Перемноживши знайдені рівності, дістанемо: $(pn_1)(qk_1) = (np_1)(kq_1)$, або $(pq)(n_1k_1) = (nk)(p_1q_1)$, тобто, згідно з означенням рівності дробів $\frac{p}{n}\frac{q}{k} = \frac{p_1}{n_1}\frac{q_1}{k_1}$.

Доведене твердження підказує природність наступного означення.

Нехай $a, b \in Q_+$*;* $\frac{p}{n}, \frac{q}{k}$ *– дроби, що зображують ці числа. Добутком* ab *чисел* a *і* b *називається раціональне число, що подається дробом* $\frac{p}{n}\frac{q}{k} = \frac{pq}{nk}$ *(як було щойно показано, добуток* ab *не залежить від вибору дробів, що зображують дані числа).*

Зазначимо, що коли натуральні числа розглядати як елементи множини Q_+, то їх множення зводиться до звичайного множення натуральних чисел. Справді, якщо $p, q \in Q_+$, то, розглядаючи ці числа як елементи Q_+, можемо їх подати відповідно дробами $\frac{p}{1}$ і $\frac{q}{1}$, тому їхній добуток дорівнює числу, що зображується дробом $\frac{p}{1}\frac{q}{1} = \frac{pq}{1} = pq$.

Безпосередньо перевіряється також, що $(\forall a \in Q_+)(a \cdot 1 = a; a \cdot 0 = 0)$.

Теорема 10. *Операція множення додатних раціональних чисел має такі властивості:*

а) *комутативність* $(\forall a)(\forall b)(ab = ba),\ a, b \in Q_+$;

б) *асоціативність* $(\forall a)(\forall b)(\forall c)\big((ab)c = a(bc)\big),\ a, b, c \in Q_+$;

в) *дистрибутивність відносно додавання*

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)\big((a + b)c = ac + bc\big), \qquad a, b, c \in Q_+$$

г) *монотонність* $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a < b \Rightarrow ac < bc),\ a, b, c \in Q_+,\ c \neq 0$.

Доведення всіх сформульованих властивостей безпосередньо випливає з відповідних властивостей множення в N_0.

Доведемо комутативність множення.

Нехай число a подано дробом $\frac{p}{n}$, число b – дробом $\frac{q}{k}$; тоді за означенням добутку раціональних чисел добуток abзображується дробом $\frac{pq}{nk}$, а добуток ba – дробом $\frac{pq}{nk}$. Але завдяки комутативності множення в N маємо: $pq = qp$ і $nk = kn$, звідки $\frac{pq}{nk} = \frac{qp}{kn}$, тобто $ab = ba$.

Операція ділення в Q_+, як і в N_0, визначається як обернена до операції множення: частка двох чисел $a, b \in Q_+$ є, за означенням, таке число $c \in Q_+$, що $bc = a$; частка чисел a і b позначається через $a{:}\,b$.

Зрозуміло, що, як і в N_0, ділення на нуль неможливе. Але при будь-якому $b \neq 0$ частка $a{:}\,b$ існує.

Теорема 11. *Для будь-яких* $a, b \in Q_+$ $(b \neq 0)$ *існує єдина частка* $a{:}\,b$*, тобто таке* $c \in Q_+$*, що* $bc = a$*; частка чисел* a *і* b *подані відповідно дробами* $\frac{p}{n}$ *і* $\frac{q}{k}$*, то* $a{:}\,b$ *подається дробом* $\frac{pk}{nq}$.

Доведення. Нехай числа a, b подані відповідно дробами $\frac{p}{n}$ і $\frac{q}{k}$ $(q \neq 0)$.

Позначимо через c раціональне число, що зображується дробом $\frac{pk}{nq}$; тоді $\frac{q}{k}\frac{pk}{nq}=\frac{qpk}{knq}=\frac{p}{n}$, тобто $bc=a$. Отже, $c=a{:}b$, тобто частка існує.

Для доведення єдиності частки припустимо, що ми знайшли частку, подану дробом $\frac{r}{s}$; $\frac{q}{k}\frac{r}{s}=\frac{p}{n}$, або $\frac{qr}{ks}=\frac{p}{n}$. Звідси за означенням рівності дробів дістанемо: $(qr)n=(ks)p$, або $r(qn)=s(pk)$, а це означає, що $\frac{r}{s}=\frac{pk}{nq}$.

Знайдемо, зокрема, частку двох натуральних чисел, розглядаючи їх як елементи Q_+.

Якщо $p,q\in N_0,\ q\neq 0$, то, розглядаючи ці числа як елементи Q_+, можемо їх подати відповідно дробами $\frac{p}{1}$ і $\frac{q}{1}$, тому їхня частка за теоремою 11 дорівнює числу, що зображується дробом $\frac{p\cdot 1}{1\cdot q}=\frac{p}{q}$. Отже дріб $\frac{p}{q}$ можемо розглядати як частку від ділення p і q. В зв'язку з цим частку довільних раціональних чисел a і b часто записують у вигляді $\frac{a}{b}$.

10.6. Зчисленність множини додатних раціональних чисел

Нагадаємо, що множину називають зчисленою, якщо вона еквівалентна, або рівнопотужна, множині натуральних чисел. Іншими словами, множина M зчисленна, якщо між множиною M і множиною N_0 натуральних чисел можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Множина Q_+ додатних раціональних чисел містить множину N_0 . Встановимо, що ці множини мають однакову потужність, тобто що множина Q_+ зчисленна.

Теорема 12. *Множина Q_+ додатних раціональних чисел зчисленна.*

Доведення. Подамо кожне додатне раціональне число нескоротним дробом; згідно з теоремою 2 таке подання завжди існує і єдине. Тому для доведення теореми досить встановити зчисленність множини всіх нескоротних дробів.

Назвемо висотою нескінченного дробу суму його чисельника і знаменника. Зрозуміло, що існує лише скінченне число нескоротних дробів, які мають задану висоту. Так, висоту 1 має лише дріб $\frac{0}{1}=0$, висоту 2 – дріб $\frac{1}{1}=1$, висоту 3 = дроби $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{1}$, … Впорядкуємо усі нескоротні дроби в порядку зростання висоти, а при однаковій висоті – в порядку зростання чисельників. Тим самим буде встановлено взаємно-однозначну відповідність між множинами Q_+ і N_0. Для зручності задамо цю відповідність таблицею:

Q_+	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	…
N_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

Існування такої відповідності і доводить зчисленність множини Q_+.

Вправи

1. Чи правильні наступні висловлення:

1) Дріб $\frac{3}{8}$ є записом деякого раціонального числа;

2) $\frac{7}{15}$ – дріб; 3) $\frac{7}{15}$ – додатне раціональне число?

2. Раціональні числа представлені дробами $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$. При якій умові ці раціональні числа будуть рівними?

3. Доведіть, що: 1) $\frac{171717}{252525} = \frac{1717}{2525} = \frac{17}{25}$; 2) $\frac{313131}{757575} = \frac{3131}{7575} = \frac{31}{75}$.

4. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні a наступні дроби нескоротні:

1) $\frac{2a+1}{a}$; 2) $\frac{2a+3a+7+a^2}{5a}$.

5. Які цифри потрібно підставити замість *, щоб одержати правильний нескоротний дріб:

1) $\frac{285}{2*7}$; 2) $\frac{378}{3*9}$?

6. Дріб $\frac{a}{b}$ – нескоротний. Чи буде скоротним дріб $\frac{a}{b+ab}$?

7. Виберіть одиницю довжини і побудуйте відрізок, довжина якого виражається дробом:

1) $\frac{11}{3}$; 2) $\frac{2}{7}$.

8. Додайте дроби, попередньо скоротивши їх, якщо це можливо:

1) $\frac{15}{120} + \frac{17}{68} + \frac{39}{78}$; 2) $3\frac{11}{12} + 5\frac{3}{15} + 1\frac{2}{9}$; 3) $1\frac{4}{40} + 5\frac{4}{5} + \frac{10}{30}$.

9. Обчисліть найбільш раціональним способом, застосовуючи закони додавання:

1) $\frac{2}{15} + 1\frac{5}{13} + 3\frac{1}{5} + 4\frac{3}{26}$; 2) $2\frac{4}{9} + 3\frac{1}{14} + 5 + 2\frac{5}{9} + 3\frac{5}{9}$;

3) $5\frac{15}{24} + 3\frac{22}{33} + 1\frac{32}{48} + 1\frac{7}{24} + \frac{2}{3}$.

10. Знайдіть різницю: 1) $10\frac{59}{63} - 8\frac{37}{45}$; 2) $105\frac{2}{17} - 3\frac{1}{13}$.

11. Суму чисел $24\frac{5}{24}$ і $22\frac{5}{6}$ зменшіть на $7\frac{7}{15}$. Скількома способами це можна зробити?

12. Яке з чисел ближче до 1: $\frac{79}{97}$ чи $\frac{67}{85}$?

13. Знайдіть значення виразу:

1) $2\frac{7}{15} - 1\frac{1}{12} + \left(2\frac{7}{90} - \left(1\frac{1}{2} - \frac{8}{45}\right)\right)$;

2) $\left(24 - 3\frac{7}{36}\right) - \left(21\frac{5}{12} - \frac{11}{18}\right)$.

14. Розв’яжіть арифметичним способом:

1) Дівчинка прочитала книгу на 234 сторінки за чотири дні. Першого дня вона прочитала $\frac{2}{9}$ всієї книги, другого і третього днів – по $\frac{3}{7}$ того, що залишилося після першого дня. Скільки сторінок прочитала дівчинка четвертого дня?

2) В квартирі дві кімнати. Довжина однієї $5\frac{1}{4}$м, довжина другої становить $\frac{2}{3}$ цієї довжини. Ширина кожної кімнати $3\frac{1}{5}$м. Площа цих кімнат становить $\frac{7}{10}$ площі всієї квартири. Чому дорівнює площа квартири?

3) Група туристів намітила пройти шлях від турбази до озера за чотири дні.

Першого дня вони намітили пройти $\frac{1}{4}$ всього шляху, другого $\frac{3}{7}$ того, що залишився, а третього і четвертого проходити по 12км. Яка довжина всього шляху від турбази до озера?

15. Нижче подані задачі розв’яжіть різними способами:

1) Шлях від міста А до міста В складається із двох рівних за довжиною частин. На першій частині шляху автобус рухався зі швидкістю 55км/год, а на другій – зі швидкістю 65км/год, витративши на весь шлях 6 год. Скільки часу витратив автобус на проходження кожної частини шляху?

2) Всю відстань між містами А і В вантажний автомобіль проходить за 4год 15хв з середньою швидкістю 48км/год. За скільки часу пройде цю ж відстань легковий автомобіль, якщо його середня швидкість 84км\год?

ТЕМА 11. ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ.

11.1. Десяткові дроби

Одним із джерел появи дробів є вимірювання величин, а точніше, перехід від однієї одиниці величини до іншої, причому знаменник дробу показує, на скільки частин ділиться вихідна одиниця величин.

У практичній діяльності люди користуються десятковою системою числення, тому нові одиниці величин одержують із вихідних, зменшених у 10, 100, 1000 і т.д. разів. Наприклад, 1 дм = 10 см = 100 мм; 1 км = 1000 м = 10 000 дм; 1 кг = 1000 г і т.д. Тому для практики особливе значення мають ті дроби, знаменники яких є степенями 10. Такі дроби можна записати у вигляді десяткового дробу.

Наприклад, $\frac{341}{10^2} = 3{,}14$, $\frac{4}{10^3} = 0{,}004$.

На відміну від десяткових дробів, дроби виду $\frac{m}{n}$ називаються звичайними.

З’ясуємо зміст запису числа у вигляді десяткового дробу на конкретному прикладі:

$$\frac{4362}{10^2} = \frac{4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2}{10^2} = 4 \cdot 10 + 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2}$$

Сума $4 \cdot 10 + 3$ є записом цілого числа 43, а сума $\frac{6}{10} + \frac{2}{10^2}$ є записом дробової частини числа $\frac{4362}{10^2}$. Цю дробову частину прийнято записувати без знаменника, відокремлюючи від цілої частини числа комою: $\frac{4362}{10^2} = 43{,}62.$

Порівняння десяткових дробів і виконання дій над ними зводиться, по суті, до порівняння і дій над натуральними числами.

Простота порівняння і виконання дій над десятковими дробами приводить до запитання: чи будь-який дріб виду $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$ можна записати у вигляді десяткового дробу?

Розглянемо дроби $\frac{8}{25}$ і $\frac{3}{7}$.

Дріб $\frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 0{,}32.$

Але для дробу $\frac{3}{7}$ не можна знайти рівного йому дробу зі знаменником, що є степенем 10.

Чому? Відповідь на це запитання дає наступна ***теорема:*** Для того, щоб нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ був рівним десятковому дробу, необхідно і достатньо, щоб до розкладу його знаменника на прості множники входили лише числа 2 або 5.

Приклади

1) Дріб $\frac{19}{80}$ можна записати у вигляді десяткового дробу, оскільки він нескоротний і

$$80 = 2^4 \cdot 5: \frac{19}{80} = \frac{19}{2^4 \cdot 5} = \frac{19 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{19 \cdot 5^3}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{19 \cdot 5^3}{10^4} = \frac{19 \cdot 125}{10^4} = \frac{2375}{10^4} = 0{,}2375.$$

2) Дріб $\frac{11}{15}$ не можна записати у вигляді десяткового, оскільки $15 = 3 \cdot 5$, тобто в розкладі на прості множники знаменника міститься число 3.

Згідно з попереднім маємо:

1) якщо приписати до десяткового дробу довільну кількість нулів справа, то дістанемо дріб, що дорівнює даному;
2) для того щоб помножити (поділити) десятковий дріб на 10^s, досить перенести у записі цього дробу кому на s цифр праворуч (ліворуч).

Зручність десяткових дробів порівняно із звичайними особливо помітна, коли розглядати дії над ними.

11.2. Порівняння десяткових дробів.

Якщо раціональні числа подані рівними дробами, то вони рівні.

Наприклад, якщо раціональне число *а* подане дробом $\frac{3}{4}$ $\left(a = \frac{3}{4}\right)$, а раціональне число b подано дробом $\frac{6}{8}$ $\left(b = \frac{6}{8}\right)$, то $a = b$, оскільки $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Отже, легко порівнювати звичайні дроби з однаковими знаменниками:

$\frac{p}{n} > \frac{q}{n} \Leftrightarrow p > q$. Тому для порівняння двох десяткових дробів треба спочатку звести їх до спільного знаменника. Для цього досить дописуванням нулів справа зрівняти у цих дробів кількість цифр праворуч від коми. Тепер для порівняння дробів досить порівняти їх чисельники, тобто відкинути в обох дробах коми і порівняти знайдені натуральні числа. Так, нехай треба порівняти десяткові дроби 23,7318 і 23,72395; зводячи їх до спільного знаменника, дістанемо 23,73180 і 23,72395; оскільки 2373180 > 2372395, то і 23,7318 > 23,72395.

На практиці, порівнюючи дроби, нулі можна не дописувати, а просто підписати дроби один під другим так, щоб кома стояла під комою, тобто щоб відповідні розряди стояли один під другим; після цього досить порівняти відповідні цифри, ідучи від вищих розрядів до нижчих; більшим буде той з двох дробів, в якого перша з нерівних цифр більша. Так, у попередньому прикладі запишемо дроби так:

23,7318
23,72395

звідки видно, що перший дріб більше другого.

Нехай a і b – додатні раціональні числа. Тоді a менше b $(a < b)$, якщо існує таке додатне раціональне число c, що $a + c = b$. У цьому ж випадку говорять, що b більше a $(b > a)$.

Дане означення дає можливість сформулювати необхідну і достатню умови існування різниці на множині додатних раціональних чисел.

Для того, щоб різниця додатних раціональних чисел a і b існувала, необхідно і достатньо, щоб $b < a$. Доведення аналогічне доведенню теореми про існування різниці на множині натуральних чисел.

З наведеного означення відношення «менше» можна вивести практичні прийоми встановлення цього відношення:

1. Якщо $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$, то $a < b$ тоді і тільки тоді, коли $m < p$.

   Наприклад, якщо $a = \frac{3}{14}$, $b = \frac{9}{14}$, то $a < b$, оскільки $3 < 9$.

2. Якщо $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, то $a < b$ тоді і тільки тоді, коли $mq < np$. Дійсно, зведемо дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ до спільного знаменника: $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$; $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$. Порівняння даних дробів зводиться до порівняння їх чисельників: якщо $mq > np$, то $a > b$; якщо $mq < np$, то $a < b$.

   Наприклад, якщо $a = \frac{7}{8}$, $b = \frac{11}{3}$, то $b < a$, оскільки $7 \cdot 13 = 91$, $8 \cdot 11 = 88$ і $8 \cdot 11 < 7 \cdot 13$.

11.3. Дії над десятковими дробами.

Щоб **додати** два десяткові дроби, потрібно зрівняти число цифр праворуч від коми дописуванням нулів, відкинути коми і додати знайдені натуральні числа; після цього відокремити комою стільки цифр, скільки їх було у кожному доданку. На практиці можна кількість нулів можна не зрівнювати і коми не відкидати, а підписати дроби один під одним так, щоб кома стояла під комо, і додавати їх так само, як натуральні числа. Результат буде той самий.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} +\;281{,}345 \\ 32{,}87 \\ \hline 314{,}215 \end{array}$$

Аналогічно виконується **віднімання** десяткових дробів.

Обмежимось прикладом:

$$\begin{array}{r} -\;36{,}82 \\ 8{,}3181 \\ \hline 28{,}5019 \end{array}$$

Зазначимо, що в попередніх прикладах не дописували нулі, щоб зрівняти кількість цифр праворуч від коми, але дії виконуються так, ніби ці нулі було дописано.

Перейдемо до **множення** десяткових дробів. Записавши десяткові дроби у формі звичайних дробів (знаменник дорівнює 10^k, де k – кількість цифр після коми), можемо перемножити їх за правилом множення звичайних дробів. Проте ділення десяткового числа на 10^{k+l} зводиться до відокремлення комою $k+l$ цифр справа. Отже, для того, щоб перемножити два десяткових дроби, треба відкинути коми, перемножити знайдені натуральні числа і в добутку відокремити комою справа стільки цифр, скільки їх в обох співмножниках разом.

Розглянемо **ділення** десяткових дробів.

Щоб поділити десятковий дріб на розрядну одиницю (на 10, 100, 1000, …), треба в десятковому дробі перенести кому вліво на стільки знаків, скільки нулів містить розрядна одиниця: 379,12 : 1**0000** = 0,**0379**12.

Щоб поділити десятковий дріб на розрядну одиницю (на 0,1; 0,01; 0,001 …), треба в десятковому дробі перенести кому вправо на стільки знаків, скільки знаків після коми містить розрядна одиниця 14,2 : 0,**001** = 14**200**.

Ділення десяткового робу на натуральне число виконується так само, як ділення натуральних чисел, тільки, закінчивши ділення цілої частини числа, треба в частці поставити кому.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} 10{,}5 & 3 \\ \cline{2-2} -\;9 & 3{,}5 \\ \cline{1-1} -\;15 & \\ 15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} -\;0 & 0{,}75 \\ \cline{1-1} -\;30 & \\ 28 & \\ \cline{1-1} -\;20 & \\ 20 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Щоб поділити на десятковий дріб, треба в діленому і дільнику перенести кому вправо на стільки знаків, скільки їх є в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число: 0,**009**45 : 0,**035** = 9,45 : 35 = 0,27.

Наприклад:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,9{,}45 & 35 \\ \cline{2-2}
\underline{0} & 0{,}27 \\
-\,94 & \\
\underline{70} & \\
-\,245 & \\
\underline{245} & \\
0 &
\end{array}
$$

Щоб число поділити на десятковий дріб, потрібно у діленому і дільнику кому перенести вправо на стільки знаків, скільки їх стоїть після коми у дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

11.4. Перетворення звичайних дробів у десяткові.

Всякий десятковий дріб можна замінити звичайним дробом (зокрема, нескоротним), що дорівнює йому. Для цього досить лише згадати означення десяткового дробу. Так наприклад:

$$0{,}43=\frac{43}{100};\quad 0{,}275=\frac{275}{1000}=\frac{11}{40};\quad 1{,}15=1\frac{15}{100}=1\frac{3}{20}=\frac{23}{20}.$$

Розглянемо обернене питання – про можливість заміни звичайного дробу десятковим, що дорівнює йому, тобто про перетворення звичайного дробу у десятковий. Повна відповідь на це питання міститься у наступній теоремі.

Теорема 1. *Для того щоб нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ можна було записати у вигляді десяткового дробу, необхідно і достатньо, щоб до канонічного розкладу знаменника n входили лише прості множники 2 і 5.*

Доведення. Достатність. Нехай канонічний розклад знаменника має вигляд $n=2^{\alpha}5^{\beta}$ і нехай, для певності, $\alpha\le\beta$. Якщо чисельник і знаменник даного дробу помножити на $2^{\beta-\alpha}$, то дістанемо:

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{2^{\alpha}5^{\beta}}=\frac{2^{\beta-\alpha}m}{2^{\alpha}5^{\beta}2^{\beta-\alpha}}=\frac{2^{\beta-\alpha}m}{2^{\beta}5^{\beta}}=\frac{2^{\beta-\alpha}m}{(2\cdot5)^{\beta}},$$

тобто

$$\frac{m}{n}=\frac{2^{\beta-\alpha}m}{10^{\beta}},$$

отже, даний дріб дорівнює десятковому дробу.

Необхідність. Нехай нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ дорівнює десятковому дробу: $\frac{m}{n}=\frac{c}{10^{\alpha}}$, тобто $10^{\alpha}m=nc$.

Треба довести, що канонічний розклад числа *n* не містить простих співмножників, відмінних від 2 і 5. Припустимо протилежне, нехай до розкладу числа *n* входить просте число p, відмінне від 2 і 5. Зрозуміло, що 10^{α} не ділиться на p, тому за теоремою 11 п.9.6 $D(10^{\alpha},p)=1$. Але з останньої рівності видно, що $(10^{\alpha}m)\ \vdots\ p$, тому за теоремою 10 п.9.6 $m\ \vdots\ p$. Отже, p є спільним дільником чисел m і n, що суперечить нескоротності дробу $\frac{m}{n}$. Ця суперечність і доводить, що *n* не може ділитись на просте число, відмінне від 2 і 5.

Приклад. Встановити, які з дробів $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{28}$, $\frac{21}{150}$ можна перетворити у десяткові, і там, де можливо, виконати це перетворення.

Перші два дроби нескоротні; оскільки $40 = 2^3 \cdot 5,\ 28 = 2^2 \cdot 7$, то дріб $\frac{3}{40}$ можна перетворити у десятковий, а $\frac{5}{28}$ – не можна; при цьому

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{75}{10^3} = 0{,}075.$$

Розглянемо третій дріб. Знаменник цього дробу має канонічний розклад $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, але звідси не можна зробити висновок, що дріб $\frac{21}{150}$ не перетворюється у десятковий, оскільки цей дріб – скоротний. Скоротивши його, дістанемо $\frac{21}{150} = \frac{7}{50}$, причому $50 = 2 \cdot 5^2$, тому цей дріб можна перетворити у десятковий:

$$\frac{21}{150} = \frac{7}{50} = \frac{7}{2 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{14}{10^2} = 0{,}14.$$

Доведення достатності у теоремі дає одночасно і метод перетворення звичайного дробу у десятковий; цей метод проілюстрований у попередньому прикладі. Але перетворення звичайного дробу у десятковий (якщо таке перетворення можливе) можна здійснити і інакше.

Нехай дріб $\frac{m}{n}$ може бути перетворений у десятковий $\frac{m}{n} = \frac{c}{10^\alpha}$, тоді $10^\alpha m = nc$. Звідси видно, що $(10^\alpha m) \vdots n$ і *c* є часткою від ділення $10^\alpha m$ на *n*. Тому для перетворення дробу $\frac{m}{n}$ у десятковий треба до чисельника приписати α нулів і знайдене число поділити на знаменник, а у частці відокремити комою справа α цифр.

На практиці виконують ділення чисельника на знаменник, дописуючи до чисельника нулі по одному, доки ділення не завершиться.

Наприклад, дріб $\frac{23}{80}$ можна перетворити у десятковий, оскільки $80 = 2^4 \cdot 5$. Маємо:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;23 & 80 \\ \cline{2-2}
\underline{230} & 0{,}2875 \\
-\;\underline{700} & \\
\underline{600} & \\
-\;\underline{400} & \\
0 &
\end{array}
$$

Отже, $\frac{23}{80} = 0{,}2875$.

11.5. Періодичні десяткові дроби. Довжина періоду.

Нехай нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ не перетворюється у десятковий, тобто канонічний розклад знаменника містить прості співмножники, відмінні від 2 і 5. Якщо тепер виконувати ділення чисельника на знаменник, дописуючи у діленому нулі, то цей процес ділення ніколи не закінчиться. Справді, якби він закінчився то в результаті мали б десятковий дріб, що дорівнював би $\frac{m}{n}$, а це суперечить припущенню.

Виконаємо, наприклад, таке ділення для дробу $\frac{15}{22}$:

```
-15  |22
 132 |0,68181…
 -180
  176
  -40
   22
  -180
   176
   -40
    22
    18
```

Оскільки остачі періодично повторюються (4, 18, 4, 18, …), то й цифри частки періодично повторюватимуться. Тому говорять, що в результаті ділення чисельника на знаменник дістаємо **періодичний** десятковий дріб; групу десяткових знаків, що повторюються, називають **періодом**. При цьому говорять, що цей періодичний дріб дорівнює даному дробові, або що даний дріб перетворюється у періодичний десятковий дріб, і пишуть так:

$$\frac{15}{22} = 0{,}6818181\ \ldots,$$

або

$$\frac{15}{22} = 0{,}6(81),$$

де у дужки взято період дробу.

Періодичний дріб 0,6(81) називають **мішаним**, оскільки період починається не зразу після коми. Періодичний дріб, у якого період починається відразу після коми, наприклад 0,321321…, називають **чистим**.

11.6. Перетворення періодичних дробів у звичайні.

Покажемо, що кожний періодичний десятковий дріб (чистий або мішаний) можна розглядати як зображення декого раціонального числа, тобто що кожний періодичний десятковий дріб дорівнює деякому звичайному дробу.

Нехай маємо 0,(28). Позначимо відповідне цьому дробу раціональне число через a. Тоді a = 0,282828... . Помножимо обидві частини цієї рівності на 100, одержимо: $100a$ = 28,2828..., або$100a$ = 28 + 0,2828… = 28 + a

Розв'язуємо рівняння $100a = 28+a$ відносно a:

$100a - a=28$;

$99a = 28;$

$a = \dfrac{28}{99}$

Одержаний дріб нескоротний.

Чистий періодичний нескінченний десятковий дріб дорівнює такому звичайному дробу, чисельник якого дорівнює періоду, а знаменник складається зі стількох дев’яток, скільки цифр у періоді дробу.

Дістаємо таке правило: *чистий періодичний дріб* $a = \frac{q_1 q_2 \dots q_\tau}{10^\tau - 1}$ *дорівнює звичайному дробові, чисельник якого є період даного дробу, а знаменник – число, записане одними дев’ятками, кількість яких дорівнює довжині періоду (бо* $10^\tau - 1 = 99\dots9$*, де справа записано* τ *дев’яток).*

Наприклад, $0,(72) = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$; $0,(234) = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}$.

Нехай маємо мішаний періодичний дріб 0,8(61). Позначимо відповідне йому число через a, тоді $a = 0{,}8616161...$

Обидві частини рівності помножимо на 10, одержимо: $10a = 8{,}616161...$ – чистий періодичний дріб.

Нехай $x = 8{,}6161...$. Помножимо обидві частини рівності на 100: $100x = 861{,}6161\ldots$, або $100x = 861 + 0{,}6161...$.

Додамо до обох частин 8: $100x + 8 = 861 + 8{,}6161...$, або $100x + 8 = 861 + x$.

Розв’язуємо одержане рівняння відносно x: $100x - x = 861 - 8$; $x = \frac{861-8}{99}$.

Але $10a = 8{,}6161...$, тому $10a = \frac{861-8}{99}$, звідси $a = \frac{861-8}{990} = \frac{853}{990}$.

Мішаний періодичний дріб з нулем у цілій частині дорівнює такому звичайному дробу, чисельник якого дорівнює різниці між числом, записаним цифрами, що стоять до початку другого періоду, і числом, записаним цифрами, що стоять до початку першого періоду, а знаменник складається з такого числа дев’яток, скільки цифр у періоді, і такого числа нулів, скільки цифр стоїть до початку першого періоду.

Отже, можна сформулювати таке правило: *мішаний періодичний дріб дорівнює звичайному, у якого чисельник – різниця між числом, що стоїть між комою і другим періодом, і числом між комою і першим періодом, а знаменник складений з дев’яток, кількість яких дорівнює довжині періоду, до яких дописано стільки нулів, скільки є цифр між комою і періодом.*

Наприклад, $0{,}23(742) = \frac{23742-23}{99900} = \frac{23719}{99900}$;

$$2{,}5(18) = 2 + \frac{518-5}{990} = 2 + \frac{513}{990} = 2\frac{57}{110}.$$

Вправи

1. Установіть різними способами, яке із чисел більше:

1) $\frac{19}{34}$ чи $\frac{28}{54}$; 2) $\frac{39}{8513}$ чи $\frac{26}{5675}$; 3) $\frac{37}{99}$ чи $\frac{3737}{9999}$.

2. Що більше і на скільки: сума чисел $20\frac{5}{7}$, $42\frac{5}{6}$ і $2\frac{20}{21}$ чи різниця чисел $125\frac{5}{14}$ і $51\frac{5}{18}$?

3. Порівняйте, не використовуючи множення, значення вирази:

1) $315 \cdot \frac{5}{7}$ і $317 \cdot \frac{3}{4}$; 2) $\frac{17}{3} \cdot 12\frac{4}{3}$ і $\frac{15}{4} \cdot 12\frac{4}{7}$.

4. Не використовуючи обчислень, порівняйте вирази:

1) $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4}\right)$ і $34\frac{1}{3}\left(8\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}\right)$;

2) $82\frac{19}{17}\left(13\frac{51}{52} + 17\frac{1}{6}\right)$ і $\left(13\frac{51}{52} + 17\frac{1}{7}\right) \cdot 82\frac{19}{17}$.

5. Не виконуючи обчислень, розташуйте в порядку зростання значень виразу: $7\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$; $8\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7}$; $\frac{5}{6} \cdot 7\frac{1}{2}$; $\frac{6}{7} \cdot 8\frac{2}{3}$; $8\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$.

6. Назвіть три раціональних числа, які знаходяться між числами $\frac{3}{11}$ і $\frac{4}{11}$.

7. Доведіть, що якщо a, b, c, d – натуральні числа і $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

8. Розв’яжіть нижче подані задачі різними способами:

1) В місті три середні школи. Число учнів першої становить $\frac{3}{10}$ всіх учнів цих трьох шкіл, у другій школі учнів в $1\frac{1}{2}$ разів більше, ніж у першій, а в третій школі на 420 учнів менше, ніж у другій. Скільки всього учнів у трьох школах?

2) Із двох населених пунктів, відстань між якими 25 км, вийшли одночасно назустріч один одному два пішохода. Один із них проходив за одну годину на $\frac{3}{4}$ км більше ніж другого. З якою швидкістю йшов кожний, якщо через 2 год. після виходу відстань між ними була $7\frac{1}{2}$ км?

9. Скоротити дроби: а) $\frac{105}{180}$; б) $\frac{162}{2538}$; в) $\frac{288}{756}$; г) $\frac{2016}{3888}$.

10. Звести до спільного знаменника дроби: а) $\frac{55}{126}$, $\frac{40}{231}$, $\frac{91}{132}$; б) $\frac{12}{91}$, $\frac{88}{105}$, $\frac{65}{84}$.

11. Поясніть, чому дроби $\frac{17}{19}$ і $\frac{8}{33}$ не можна записати скінченним періодичним дробом.

12. Представте число $\frac{10}{11}$ нескінченим десятковим дробом і поясніть, чому цей дріб є періодичним.

13. Запишіть нескінченними десятковими дробами наступні звичайні дроби:

1) $\frac{8}{33}$; 2) $\frac{137}{18}$; 3) $\frac{127}{28}$.

14. Запишіть звичайним дробом:

1) 0,(43); 2) 0,(301); 3) 5,7(27); 4) 6,31(8); 5) 15,43(29).

15. Доведіть, що 0,27(9) = 0,28(0).

16. Установіть, які із наступних рівностей істинні:

1) $\frac{66}{33} = 2,(6)$; 2) $\frac{56}{11} = 5,(09)$; 3) $20,8 + \frac{7}{11} = 20,8(63)$.

17. Розташуйте числа в порядку зростання:
1) 0,125; 2,(7); 0,1(25); 2,78; 2) 1,(5); 0,(12); 2,778; 2,(778).

ТЕМА 12. ПОНЯТТЯ ВІДСОТКА. ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА ВІДСОТКИ.

12.1. Поняття відсотка. Розв'язування задач на застосування основних понять про відсотки

Сота частина метра – це сантиметр, сота частина карбованця – копійка, сота частина центнера – кілограм. Люди давно помітила, що соті частини величин зручні в тактичній діяльності. Тому для них було придумано спеціальну назву – відсоток. Значить одна копійка – один відсоток від одного карбованця, а один сантиметр – один відсоток від одного метра.

Один відсоток – це одна сота частина числа. Математичними знаками один відсоток записується так: 1%.

На практиці у відсотках виражають частини величини. Та говорять: «Ціни на товари знижені на 20%», «Цукрова тростина містить 15% цукру».

Розрізняють три види задач на відсотки - задачі на знаходження:
1) відсотків від числа;
2) числа за відсотками;
3) відсоткового відношення величин.

Означення одного відсотка можна записати рівністю: $1\% = 0{,}01a$.

$$5\% = 0{,}05, \qquad 23\% = 0{,}23, \qquad 130\% = 1{,}3 \text{ і т. д}$$

Як знайти 1% від числа? 1% це одна сота частина, треба число поділити на 100. Ділення на 100 можна замінити множенням на 0,01. Тому, щоб знайти 1% від цього числа, потрібно помножити його на 0,01.

А якщо потрібно знайти 5% від числа, то множимо дане число на 0,05 і т.д.

Приклад 1. Знайти: 25% від 120.

Розв'язання:
1) $25\% = 0{,}25$;
2) $120 \cdot 0{,}25 = 30$.

Відповідь: 30.

Правило 1. Щоб знайти дане число відсотків від числа, треба записати відсоток десятковим дробом, а потім число помножити на цей десятковий дріб.

Приклад 2. Токар виточував за годину 40 деталей. Застосувавши різець з більш міцної сталі, він став виточувати на 10 деталей у годину більше. На скільки відсотків підвищилася продуктивність праці токаря?

Розв'язання: Щоб розв'язати цю задачу, треба дізнатися, скільки відсотків становлять 10 деталей від 40. Для цього знайдемо спочатку, яку частину становить 10 від числа 40. Ми знаємо, що потрібно розділити 10 на 40. Вийде 0,25. А тепер запишемо у відсотках – 25%.

Отримуємо *відповідь:* продуктивність праці токаря підвищилася на 25%.

Правило 2. Щоб знайти, скільки відсотків одне число становить від іншого, потрібно розділити перше число на друге і отриманий дріб записати у вигляді відсотків.

Приклад 3. При плановому завданні 60 автомобілів в день завод випустив 66 автомобілів. На скільки відсотків завод виконав план?

Розв'язання: 66:60 – таку частину складають виготовлені автомобілі від кількості автомобілів за планом. Запишемо у відсотках 110%.

Відповідь: 110%

Приклад 4.

1. На скільки процентів 10 більше 6?
2. На скільки процентів 6 менше 10?

Розв'язання:

1. $\frac{(10-6)\cdot 100\%}{6} = 66\frac{2}{3}\%$
2. $\frac{(10-6)\cdot 100\%}{10} = 40\%$

Відповідь: $66\frac{2}{3}\%,\quad 40\%.$

Приклад 5. Бронза є сплавом олова і міді. Скільки відсотків сплаву становить мідь в шматку бронзи, що складається з 6 кг олова і 34 кг міді?

Розв'язання:

1) 6 + 34 =40 (кг) – маса всього сплаву.
2) 34 : 40·100 = 85% – сплаву складає мідь.

Відповідь. 85%.

Приклад 6. Що станеться з ціною товару, якщо спочатку її підвищити на 25%, а потім знизити на 25%?

Розв'язання: Нехай ціна товару x грн, тоді після підвищення товар коштує 125% попередньої ціни, тобто 1,25x;, а після зниження на 25%, його вартість становить 75% або 0,75 від підвищеної ціни, тобто $0{,}75 \cdot 1{,}25x = 0.9375x$, тоді ціна товару знизилася на 6,25%, тому $x - 0{,}9375x = 0{,}0625x$;

$$\frac{0{,}0625x}{x} \cdot 100\% = 6.25\%.$$

Відповідь: початкова ціна товару знизилася на 6,25%.

Правило 3. Щоб знайти відсоткове відношення двох чисел a і b, *треба відношення цих чисел помножити на 100%, тобто обчислити* $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.

Приклад 7. Знайти число, якщо 15% його дорівнюють 30.

Розв'язання:

1) 15% = 0,15;

2) 30 : 0,15 = 200.

або: x – дане число; $0{,}15x = 300$; $x = 200$.

Відповідь: 200.

Приклад 8. З бавовни-сирцю виходить 24% волокна. Скільки треба взяти бавовни-сирцю, щоб отримати 480 кг волокна?

Розв'язання. Запишемо 24% десятковим дробом 0,24 і отримаємо задачу про знаходження числа за відомою йому частиною (дробом).

480 : 0,24 = 2000 кг = 2 т

Відповідь: 2 т.

Приклад 9. Скільки кг білих грибів треба зібрати для отримання 1 кг сушених, якщо при обробці свіжих грибів залишається 50% їх маси, а при сушінні залишається 10% маси оброблених грибів?

Розв'язання: 1 кг сушених грибів – це 10% або 0,01 частина оброблених, тобто 1 кг : 0,1 = 10 кг оброблених грибів, що становить 50% або 0,5 зібраних грибів, тобто 10 кг : 0,05 = 20 кг

Відповідь: 20 кг.

Приклад 10. Свіжі гриби містили по масі 90% води, а сухі 12%. Скільки вийде сухих грибів з 22 кг свіжих?

Розв'язання:

1) $22 \cdot 0{,}1 = 2{,}2$ (кг) – грибів по масі в свіжих грибах;
   (0,1 це 10% сухої речовини)
2) $2{,}2 : 0{,}88 = 2{,}5$ (кг) – сухих грибів, одержуваних з свіжих
   (кількість сухої речовини не змінилася, але змінився її процентний вміст у грибах і тепер 2,2 кг це 88% або 0,88 сухих грибів).

Відповідь: 2,5 кг.

Правило 4. Щоб знайти число за даними його відсотками, треба виразити відсотки у вигляді дробу, а потім значення відсотків розділити на цей дріб.

12.2. Розв'язування задач на поняття «процентний вміст», «процентний розчин», «концентрація», «%-й розчин»

Приклад 1. Скільки кг солі на 10 кг солоної води, якщо процентний вміст солі 15%.

Розв'язання. $10 \cdot 0{,}15 = 1{,}5$ (кг) солі.

Відповідь: 1,5 кг.

Процентний вміст речовини в розчині (наприклад, 15%), іноді називають %-м розчином, наприклад, 15%-й розчин солі.

Приклад 2. Сплав містить 10 кг олова і 15 кг цинку. Який процентний вміст олова і цинку в сплаві?

Розв'язання: Процентний вміст речовини в сплаві – це частина, яку складає маса даної речовини від маси всього сплаву.

1) $10 + 15 = 25$ (кг) – сплав;

2) $\frac{10}{25} \cdot 100\% = 40\%$ – відсотковий вміст олова в сплаві;

3) $\frac{15}{25} \cdot 100\% = 60\%$ – відсотковий вміст цинку в сплаві;

Відповідь: 40%, 60%.

Якщо концентрація речовини в з'єднанні по масі становить р%, то це означає, що маса цієї речовини складає н% від маси всього з'єднання.

Приклад 3. Концентрація срібла у сплаві 300 г становить 87%. Це означає, що чистого срібла в сплаві 261 р.

Розв'язання: $300 \cdot 0{,}87 = 261$ (р).

У цьому прикладі концентрація речовини виражена у відсотках.

Відношення об'єму чистого компонента в розчині до всього об'єму суміші називається об'ємною концентрацією цієї компоненти. Сума концентрацій всіх компонент, що складають суміш, дорівнює 1. Якщо відомо процентний вміст речовини, то його концентрація знаходиться за формулою: $K = \frac{p}{100\%}$, *де К – концентрація речовини; р – процентний вміст речовини (у відсотках).*

Приклад 4. Є 2 сплава, в одному з яких міститься 40%, а в іншому 20% срібла. Скільки кг другого сплаву потрібно додати до 20 кг першого, щоб після сплавки разом одержати сплав, що містить 32% срібла?

Розв'язання: Нехай до 20 кг першого сплаву потрібно додати x кг другого сплаву. Тоді отримаємо (20 + x) кг нового сплаву. В 20 кг першого сплаву міститься $0{,}4 \cdot 20 = 8$ (кг) срібла, в x кг другого сплаву міститься 0,2x кг срібла, а в (20 + x) кг нового сплаву міститься $0{,}32 \cdot (20 + x)$ кг срібла. Складемо рівняння: $8 + 0{,}2x = 0{,}32 \cdot (20 + x)$; $\quad x = 13\frac{1}{3}$.

Відповідь: $13\frac{1}{3}$ кг другого сплаву потрібно додати до 20 кг першого, щоб одержати сплав, що містить 32% срібла.

Приклад 5. До 15 л 10%-ного розчину солі додали 5%-ний розчин солі і отримали 8%-ний розчин. Яку кількість літрів 5%-ного розчину додали?

Розв'язання: Нехай додали x л 5%-ного розчину солі. Тоді нового розчину стало (15 + x) л, в якому міститися $0{,}8 \cdot (15 + x)$ л солі. У 15 л 10%-ного розчину міститься $15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$ (л) солі, у x л 5%-ного розчину міститься 0,05x (л) солі.

Складемо рівняння: $1{,}5 + 0{,}05x = 0{,}08 \cdot (15 + x)$; $\quad x = 10$.

Відповідь: додали 10 л 5%-ного розчину.

12.3. Розв'язування задач з використанням поняття коефіцієнта збільшення

Щоб збільшити додатне число а на р процентів, слід помножити числа а на коефіцієнт збільшення до = (1 + 0,01р). Щоб зменшити додатне число а на р процентів, слід помножити числа а на коефіцієнт зменшення до = (1 – 0,01р).

Приклад 6. Внесок, вкладений в ощадбанк два роки тому, досяг суми, що дорівнює 13125 грн. Яким був початковий внесок при 25% річних?

Розв'язання. Якщо a (гривень) – розмір початкового внеску, то в кінці першого року вклад складе 1,25a, а наприкінці другого року розмір вкладу становитиме $1{,}25 \cdot 1{,}25a$. Розв'язуючи рівняння $1{,}25 \cdot 1{,}25a = 13125$, знаходимо $a = 8400$.

Відповідь: 8400 грн.

Приклад 7. У лютому ціна на нафту збільшилася на 12% у порівнянні з січневою. У березні ціна нафти впала на 25%. На скільки відсотків березнева ціна змінилася в порівнянні з січневою?

Розв'язання. Якщо *x* – січнева ціна нафти, то лютнева ціна нафти дорівнює $(1 + 0{,}01 \cdot 12)x = 1{,}12x$.

Щоб обчислити березневу ціну на нафту, слід помножити лютневу ціну $1{,}12x$ на $(1 - 0{,}01 \cdot 25) = 0{,}75$, тобто $y = 0{,}75 \cdot 1{,}12x = 0{,}84x$, березнева ціна відрізняється від січневої на $\frac{0{,}84x}{100} - 100 = 84 - 100 = -16(\%)$, тобто ціна впала на 16 %

Відповідь: ціна впала на 16%.

Правило 5. Щоб знайти, на скільки % одне число у відрізняється від іншого числа а, слід вирахувати, скільки % у становить від а і від отриманого числа відняти а.

12.4. Розв'язування задач на сушіння

***Приклад* 8.** Свіжі гриби містять 90% води, а сухі 12% . Скільки сухих грибів вийде з 22 кг.

Розв'язання:

Склад речовини	I	II
С	22	x
К	0,1	0,88
М	2,2	2,2

$$x = \frac{2{,}2}{0{,}88} = 2{,}5.$$

Відповідь: 2,5.

12.5. Розв'язування задач на переливання

Приклад 9. У посудині 729 літрів чистої кислоти. Відлили *а* літрів і долили водою. Так зробили 6 разів, отримали 64 літрів чистої кислоти. Знайти *а*.

Розв'язання:

$$A_{\text{к}} = A_{\text{н}}\left(1 - \frac{a}{A_{\text{н}}}\right)^n$$

$$\frac{64}{729} = \left(1 - \frac{a}{729}\right)^6,$$

$a = 243.$

Відповідь: 243.

Приклад 10. У посудині 20 літрів спирту. Частину відлили і долили водою. Потім ще раз відлили і долили водою. Після цього в посудині виявилося спирту втричі менше, ніж води. Скільки спирту відлили вперше?

Розв'язання:

$A_н = 20, \qquad A_к = 5.$

$\frac{5}{20} = \left(1 - \frac{a}{20}\right)^2,$

$1 - \frac{a}{20} = 0{,}5. \quad a = 10.$

Відповідь: 10 л.

12.6. Способи розв'язування задач на відсотки

Метод розв'язування задач з використанням символьної рівності назвемо методом відсоткових символів.

Формула 1: $p\%[a] = \frac{pa}{100} = 0{,}01pa$ (1)

Наслідок: $p\%[a] = b; \; p \cdot a = b \cdot 100$ (2)

У загальному виді:

$p\%[a] = x$, тобто $p \cdot a = x \cdot 100; \; x = \frac{p \cdot a}{100}$ (відсоток від числа);

$p\%[x] = b$, тобто $p \cdot x = 100 \cdot b$, звідки $x = \frac{100 \cdot b}{p}$ (число за його відсотком);

$x\%[a] = b$, або $x \cdot a = 100 \cdot b$, звідси $x = \frac{100 \cdot b}{a}$ (відсоткове відношення двох чисел).

Як бачимо, всі три елементарні задачі на відсотки розв'язуються подібно, фактично як одна.

Розв'язати символічне рівняння легко, важкість полягає в його складанні, а саме в тому, щоб у символічні дужки попало саме те число (відоме чи невідоме), яке приймається за 100% і ніяке інше.

Для цього поняття «відсоток» повинно бути засвоєне учнями ґрунтовно, іншими словами, учень повинен твердо засвоїти, що саме в тій чи іншій задачі приймається за 100%.

Розмірковувати над тим, до яких з трьох типів задач потрібно звернутись немає потреби.

Можна підвести учнів до самостійного формулювання правил на підсумковому занятті гуртка, не ставлячи вимоги знати їх напам'ять.

Використовуючи відсоткові символи, пропонується виведення формул, тверджень, наслідків, які полегшують розв'язування багатьох складних задач.

Формула 1:

$$p\%[a] + q\%[b] + c\%[d] + \cdots + t\%[k] = u\%[w] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow pa + qb + cd + \cdots + tk = uw$$

Доводиться дане твердження на основі формули (1)

Приклад 1:

1. $50\%[45] + 40\%[35] - 30\%[25] = p\%[55] \leftrightarrow$
   $\leftrightarrow 50 \cdot 45 + 40 \cdot 35 - 30 \cdot 25 = p \cdot 55$
2. $a\%[5] - b\%[15] = 15\%[a - b] \leftrightarrow a \cdot 5 - b \cdot 15 = 10(a - b)$.

Формула 2:

$$p\%[a] + p\%[b] + p\%[c] + \cdots + p\%[h] = p\%[a + b + c + \cdots + h]$$

Доведення за формулою (1) ліва частина:

$$p\%[a] + p\%[b] + p\%[c] + \cdots + p\%[h] = \frac{pa}{100} + \frac{pb}{100} + \frac{pc}{100} + \cdots + \frac{ph}{100} =$$
$$= \frac{p(a + b + c + \cdots + h)}{100} = p\%[a + b + c + \cdots + h].$$

Таким чином, ліва частина рівна правій частині. Правильність формули доведена.

Приклад 2:

1. $5\%[9] - 5\%[6] + 5\%[3] = 5\%[9 - 6 + 3] = 5\%[6]$.
2. $a\%[9] - a\%[7] = a\%[2]$.

Формула 3:

$$p\%[a] + q\%[a] + r\%[a] + \cdots + t\%[a] = (p + q + r + \cdots + t)\%a$$

Доведення за формулою (1) ліва частина рівності:

$$p\%[a] + q\%[a] + r\%[a] + \cdots + t\%[a] = \frac{pa}{100} + \frac{qa}{100} + \frac{ra}{100} + \cdots + \frac{ta}{100} =$$
$$= \frac{(p + q + r + \cdots + t)a}{100} == (p + q + r + \cdots + t)\%a$$

Таким чином, ліва частина рівна правій частині. Правильність формули доведена.

Означення:

$$p\%[p\%[p\%[\ldots p\%[a] \ldots a]a]a] = (p\%)^n[a]$$

Приклад 3:

$$8\%\Big[8\%[8\%[10]]\Big] = (8\%)^3[10]$$

Формула 4:

$$(p\%)^n[a] = \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot a$$

Довести дану формулу можна методом математичної індукції.

Для $n = 1$ формула очевидна. Припускаємо правильність її для $n = k$. Легко доводиться, що вона буде правильна і для $n = k + 1$.

Наслідок:

$(p\%)^0[a] = a$ або $a = (p\%)^0[a]$.

Доведення: за формулою $(p\%)^0[a] = \left(\frac{p}{100}\right)^0 \cdot a = a$.

Виняток: $(p\%)^n[a] \neq (p^n)\%[a]$

Приклад 4:
$(5\%)^0[25] = 20;\;\; x = (c\%)^0[x].$

Приклад 5:
$(100\%)^2[25] \neq 100^2\%[25].$

Означення:
$$p\%[a] = pa\%[1]$$

Приклад 6:
$10\%[50] = \frac{10}{100} \cdot 50 = 10 \cdot \frac{50}{100} \cdot 1 = 10 \cdot 50\%[1].$

Формула 5:
$$(p\%)^n[a] = a \cdot (p\%)^n[1]$$
Доведення: за формулою (1):
$(p\%)^n[a] = \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot a;\qquad a \cdot (p\%)^n[1] = a \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot 1 = \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot a.$
Таким чином, ліва частина рівна правій. Формула доведена.

Приклад 7:
$(3\%)^5[13] = 13 \cdot (3\%)^5[1];$
$(4\%)^3[a-1] = (a-1) \cdot (4\%)^3[1].$

Формула 6:
$$(p\%)^n[ka] = k \cdot (p\%)^n[a]$$
Доведення: за формулою 1:
$(p\%)^n[ka] = \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot ka;\qquad k \cdot (p\%)^n[a] = k \cdot \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot a = \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot ka.$
Таким чином, ліва частина рівна правій. Формула доведена.

Приклад 8:
$(105\%)^2[15] = 5 \cdot (105\%)^2[3];$
$(b\%)^4[a(x+1)] = a \cdot (b\%)^4[x+1].$

Формула 7:
$$(p\%)^n[1] = (p\%[1])^n$$
Доведення: за формулою 1:
$(p\%)^n[1] = \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot 1 = \left(\frac{p}{100}\right)^n;\qquad (p\%[1])^n = \left(\frac{p \cdot 1}{100}\right)^n = \left(\frac{p}{100}\right)^n.$
Отже, ліва частина рівна правій. Формула доведена.
Виняток: $(p\%[1])^n \neq \left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot a$ при $a \neq 1;\; a \neq 0;\; n \neq 1.$
Доведення: за формулою 1: $\left(\frac{p}{100}\right)^n \cdot a = (p\%)^n[a];$
$(p\%[1])^n = \left(\frac{p \cdot a}{100}\right)^n = (p\%[a])^n$, що і треба було довести.

Використання відсоткових символів досить ефективне, особливо при розв'язуванні задач на суміші та сплави.

Задача. У лабораторії є суміш, загальна маса якої на 3,3*кг* більша від маси титану, що міститься у ній. Якщо добавити до неї 2*кг* суміші з 25% вмісту титану, одержимо суміш, у якій 20% титану. Визначити початкову масу суміші і відсоток титану в ній.

Розв'язання

I спосіб (традиційний)

Нехай m *кг* – початкова маса суміші, *x%* – вміст у ній титану.

Тоді 0,01 *mx кг* – маса титану в суміші.

У 2кг нової суміші маса титану дорівнює $2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$ (*кг*).

Загальна маса титану при змішуванні сумішей становитиме $(0{,}01mx + 0{,}5)$ кг, а загальна маса змішаних сумішей (m + 2) *кг*.

Складаємо систему рівнянь:

$\begin{cases} m - 0{,}01mx = 3{,}3; \\ \frac{0{,}01mx+0{,}5}{m+2} \cdot 100 = 20 \end{cases}$. Домноживши перше рівняння на 100, отримали:

$\begin{cases} 100m - mx = 330; \\ mx + 50 = 20m + 40 \end{cases}$. Розв'язавши систему, отримали: $m = 4;\ x = 17{,}5$.

II спосіб: (метод відсоткових символів)

Нехай маса титану в суміші – *x кг*, тоді маса титану – (x + 3,3) *кг*. Відсоток титану в суміші позначимо через *y*. За умовою задачі:

$y\%[x + 3{,}3] + 25\%[2] = 20\%[x + 5{,}3]$. Крім того, за умовою:

$y\%[x + 3{,}3] = x$. Отже, $x + 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}2 \cdot (x + 5{,}3)$;

$5x + 2{,}5 = x + 5{,}3; \quad x = 0{,}7; \quad x + 3{,}3 = 4.$

За умовою: $y \cdot (x + 3{,}3) = 100 \cdot x; \quad y \cdot 4 = 100 \cdot 0{,}7; \quad y = \frac{70}{4} = 17{,}5.$

Відповідь: 4 *кг* і 17,5%.

12.7. Задачі на складання рівнянь

Приклад 9. Під використання хімічних засобів захисту рослин було виведено на 480 *га* менше, ніж біологічних. Після того як було оброблено 25% хімічними і 80% біологічними засобами, площа, ще не оброблена біозасобами, виявилася на 300 *га* меншою, ніж площа, не оброблена хімічними засобами. Яку площу було відведено під хімічні і яку під біологічні засоби захисту рослин?

Розв'язання:

	ХІМІЧНІ	**БІОЛОГІЧНІ**
Відведено	*x га*	*x* + 480 *га*
Оброблено	25% – 0,25*x га*	80% – 0,8(*x* + 480) *га*
Залишилося	*x* – 0,25*x*	(*x* + 480) – 0,8(*x* + 480)
300 *га*		

$x - 0{,}25x - \big((x + 480) - 0{,}8(x + 480)\big) = 300;$

$0{,}75x - x - 480 + 0{,}8x + 384 = 300;$

$0{,}55x = 396; \quad x = 720.$

хімічні – 720 *га*, *біологічні* – 1200 *га*.

12.8. Задачі на знаходження наближеного значення числа

Екологічні спостереження часто супроводжуються вимірюванням кількісних характеристик екосистем. З цією метою у польових умовах застосовують різноманітні прилади, чутливість та точність вимірювань яких коливається в широкому діапазоні. Інформативність вимірювань, можна значно покращити, провівши математичну обробку кількісних показників. Корисними можуть стати в даному випадку нерівності. Потреба нерівностей виникає при оцінці точності наближених обчислень. Відхилення результату від точного значення величини характеризують похибкою наближення-це різниця між точним і наближеним значенням величини. Причини виникнення похибок різноманітні:

- похибки, пов'язані з приладом, яким проводить вимірювання – інструментальні;
- обумовлені методом вимірювання – теоретичні;
- залежать від дослідника, який здійснює вимірювання – суб'єктивні.

Похибка наближення може бути з недостачею(додатна) і надлишком (від'ємна).

Проте важливіше знати не характер наближення, а те, на скільки близьке воно до точного значення – модуль похибки наближення.

Коли за наближене значення числа x беруть число a і відомо, що модуль похибки такого наближення не перевищує деякого числа h, тобто $|x-a|<h$, *то кажуть, що число a є наближенням числах x точністю до h. Записують це так:* $x=a\pm h$.

Приклад 10. Пропустивши крізь сепаратор молоко, в якому масова частка жиру становить 3,8%, одержують вершки з масовою часткою жиру 7,0% і молоко з пониженим вмістом жиру. Обчислити межі масової частки жиру в молоці після сепаратора, якщо маса молока більша за масу вершків, а загальна маса жиру в молоці менша, ніж у вершках.

Розв'язання:

Нехай через сепаратор пропустили 100*кг* молока. Тоді позначимо через: *x кг* – масу вершків; *y кг* – масу знежиреного молока; *z кг* – масову частку жиру в молоці, яке пройшло через сепаратор.

Тоді $x+y=100$ (1)

Так як сума мас жиру в молоці після переробки і в вершках залишилася такою як в 100 *кг* молока, то: $y+0{,}07x=100\cdot 0{,}038$ (2)

За умовою задачі: $x<y, \quad zy<0{,}07x$ (3)

Знайдемо y: $y=100-x$, підставимо значення (2),(3).

$$\begin{cases} x<100-x; \\ z(100-x)<0{,}07x; \\ (100-x)+0{,}07x=100\cdot 0{,}038. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язки рівняння з кожної нерівності.

$$\begin{cases} x < 50; \\ 0{,}07x + zx > 100; \\ 0{,}07xz + zx + 100z = 3{,}8. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} z > 0{,}006 \\ z < 0{,}026 \end{cases}$$

Отже $0{,}006 < z < 0{,}026$.

Вправи.

1. Площа земельної ділянки 84 га, 75% її вже зорали. Скільки гектарів ділянки землі залишилось зорати?

2. Із свіжих яблук отримали 18% сушених. Скільки сушених яблук отримають із 250 кг свіжих ?

3. За три дні машина проїхала 300 км. За перший день вона пройшла 30% шляху, за другий день – 35% шляху, за третій день – залишок шляху. Скільки кілометрів пройшла машина за третій день?

4. Різниця двох чисел дорівнює 72. Знайти ці числа, якщо 4,5 % від одного з них дорівнює 8,5 % другого.

5. У класі навчається 30 учнів, серед яких - 21 дівчинка. Скільки відсотків дівчат навчається в цьому класі ?

6. За два дні турист пройшов 50 км. За перший день він пройшов 30 км. Скільки відсотків шляху йому залишилось пройти?

7. В 450 г розчину міститься 27г солі. Знайти відсоток солі в цьому розчині.

8. Комбайнер перевиконав завдання на 15% і зібрав зернові з площі 230 га. Скільки гектарів за планом йому треба було обробити?

9. Із свіжих груш виходить 18 % сушених. Скільки було взяти свіжих, щоб отримати 45 кг сушених?

10. Свіжі гриби містять 90 % води, а сушені – 12 % води. Скільки сушених грибів отримають із 20 кг свіжих?

11. З двох сплавів перший містить 7 кг, другий 8 кг міді. Отримали новий сплав, що містить 18 % міді. Який % зміст міді в першому сплаві, якщо в другому на 20 % її більше?

12. Є два сплави міді і цинку. Першому міді в 2 рази більше, ніж цинку, а в другому – в 5 разів менше. У скільки разів більше потрібно узяти другого сплаву, чим першого, щоб отримати новий сплав, в якому цинку було б в 2 рази більше, ніж міді.

13. У яких пропорціях треба змішати 50 % - ий розчин кислоти і 70 % - ий, щоб отримати 65 %-ий розчин кислоти?

14. Зібрали 140 кг. грибів, вологість яка складає 98% після підсушування їх вологість знизилася до 93%. Яка стала маса грибів.

ТЕМА 13. МНОЖИНА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

13.1. Аксіоматика множини дійсних чисел.

З формального погляду множина дійсних чисел означається як математична структура $(R, 0, 1, \le, +, \cdot)$ з базисною множиною R, виділеними елементами 0, 1, відношенням порядку $\le$, алгебраїчними операціями $+$, $\cdot$, яка задовольняє такі властивості (аксіоми).

I. Аксіоми порядку:

1° $(\forall x \in R)(x \le x)$;

2° $(\forall x, y \in R)(x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y)$;

3° $(\forall x, y, z \in R)(x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z)$;

4° $(\forall x, y \in R)(x \le y \vee y \le x)$.

II. Аксіоми додавання:

1° $(\forall x, y \in R)(x + y = y + x)$;

2° $(\forall x, y, z \in R)(x + (y + z) = (x + y) + z)$;

3° $(\forall x \in R)(x + 0 = x)$;

4° $(\forall x \in R)(\exists -x \in R)(x + (-x) = 0)$.

III. Аксіоми множення:

1° $(\forall x, y \in R)(x \cdot y = y \cdot x)$;

2° $(\forall x, y, z \in R)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$;

3° $(\forall x \in R)(x \cdot 1 = x)$;

4° $(\forall x \in R\backslash\{0\})(\exists x^{-1} \in R)(x \cdot x^{-1} = 1)$.

IV. Аксіома зв'язку додавання і множення:

$(\forall x, y, z \in R)((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$.

V. Аксіоми зв'язку додавання і порядку, множення і порядку:

1° $(\forall x, y, z \in R)(x \le y \Rightarrow x + z \le y + z)$;

2° $(\forall x, y, z \in R)(x \le y \wedge 0 \le z \Rightarrow x \cdot z \le y \cdot z)$.

V. Аксіома неперервності:

$(\forall X, Y \in 2^R)(X \ne \emptyset \wedge Y \ne \emptyset \wedge (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \le y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists z \in R)(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \le z \le y)$.

Будь-яку множину, яка задовольняє перелічені властивості, називають множиною дійсних чисел, а елементи – дійсними числами.

Перша група аксіом характеризує множину R як лінійно впорядковану множину, відносно додавання R – абелева група, відносно множення $R\backslash\{0\}$ теж абелева група, а II, III, IV групи аксіом характеризують множину R як поле, причому V група аксіом наділяє R структурою впорядкованого, навіть більше, розташованого поля. Аксіома неперервності, у якій стверджується, що для будь-яких непорожніх підмножин X, Y множини R таких, що кожен елемент першої не перевищує будь-якого елемента другої, то в R існує елемент z такий, що для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$, характеризує поле R як неперервне поле.

Подана аксіоматика несуперечлива (точніше несуперечлива в рамках теорії множин,), оскільки множини, які задовольняють пераховані аксіоми, існують.

При побудові конкретної моделі, як правило, виходять з множини раціональних чисел Q. Найбільш популярними є моделі Вейєрштрасса, Дедекінда і Коші.

У першій множина R – множина всіх можливих нескінченних десяткових дробів за винятком тих, у яких 9 є періодом, у другій множина R – множина розрізів множини Q, у третій – фактор-множина, що породжується відношенням еквівалентності на множині фундаментальних послідовностей раціональних чисел. Зрозуміло, що найбільш практична є модель Вейєрштрасса, яка дозволяє ототожнювати дійсні числа з послідовностями їх наближень (наприклад, десятковими дробами). Якраз на цій моделі базуються фрагменти теорії дійсних чисел у шкільному курсі математики.

Основне місце в аксіоматиці посідає аксіома неперервності (властивість повноти множини R). Якраз вона виводить за межі алгебри і дозволяє ввести основну неалгебраїчну операцію – граничний перехід, а з геометричної точки зору означає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між множиною R і множиною точок числової (координатної) прямої, тобто геометризувати множину R. Як наслідок, ми дістаємо чудову геометричну інтерпретацію відношення порядку, означаємо відстань між числами (точками), яка добре узгоджується з поняттям відстані на прямій.

13.2. Властивість неперервності множини дійсних чисел.

Властивість неперервності може бути вираженою іншими (еквівалентними аксіомі VI) способами, наприклад, через поняття нижньої і верхньої грані (підхід Вейерштрасса).

Оскільки множина R наділена лінійним порядком $\leq$, (а, отже, і лінійними порядками $<$, $\geq$, $>$), то в очевидний спосіб означається поняття множини обмеженої зверху (знизу), найбільшого і найменшого елемента. А саме, множина X $(X \subset R)$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке дійсне число a, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \leq a$ $(a \leq x)$. Природно множину обмежену як знизу так і зверху називати обмеженою, іншими словами, множина X – обмежена, якщо існують дійсні числа a і b такі, що для всіх $x \in X$ $a \leq x \leq b$. Між іншим зауважимо, що з огляду на геометричне подання множини R природно говорити про обмеженість зліва (обмеженість справа). Елемент (число) $a \in X$ будемо називати мінімальним (найменшим) елементом множини X, якщо $a \leq x$ для будь-якого $x \in X$, а елемент (число) $b \in X$ будемо називати максимальним (найбільшим) елементом множини X, якщо $x \leq b$ для будь-якого $x \in X$.

З геометричної точки зору зрозуміло, що коли множина X має мінімальний (максимальний) елемент, то він єдиний, бо ж мінімальний це сама ліва точка на числовій прямій, а максимальний це сама права точка. У рамках аксіоматичної теорії цей факт необхідно доводити.

Теорема 1. *Якщо множина X має мінімальний (максимальний) елемент, то він єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існує множина дійсних чисел X, яка має принаймні два різних мінімальних елементи, тобто існують такі два елементи a_1 і a_2 ($a_1 \neq a_2$), що для всіх $x \in X$ $a_1 \leq x$ і $a_2 \leq x$. Але тоді з того, що a_1 мінімальний елемент множини X і $a_2 \in X$, випливає, що $a_1 \leq a_2$, а з того, що a_2 мінімальний елемент множини X і $a_1 \in X$, випливає, що $a_2 \leq a_1$. Таким чином маємо два числа a_1 і a_2, для яких $a_1 \leq a_2$ і $a_2 \leq a_1$. В силу другої аксіоми порядку маємо, що $a_1 = a_2$. Останнє суперечить припущенню. Отже, не існує непорожньої підмножини множини R, яка б мала більше одного мінімального елемента.

13.3. Поняття верньої і нижньої граней числової множини, їх існування і властивості.

Нехай маємо непорожню множину X.

Число a називається нижньою (верхньою) гранню множини X, якщо:

1. *для будь-якого* $x \in X$ $a \leq x$ $(x \leq a)$,
2. *для будь-якого числа* $a' > a$ $(a' < a)$ *існує хоча би один елемент* $x' \in X$ *такий, що* $x' < a'$ $(x' > a')$.

Позначається inf$X$ – *нижня грань, а* sup$X$ – *верхня грань множини X.*

Приклад 1. У якому відношенні знаходиться дійсне число a (нижня межа, верхня межа, найменший елемент, найбільший елемент, нижня грань, верхня грань) стосовно множини всіх тих дійсних чисел, подання яких нескінченними десятковими дробами починається так 1,41..., якщо $a =$ $\sqrt{2}$; 1,41; $\frac{31}{22}$; 1,42; $\sqrt{3}$.

Розв'язання. Нехай X – множина всіх тих дійсних чисел, подання яких у вигляді нескінченного десяткового дробу має цілою частиною 1, а перші дві цифри після коми 4 і 1. Тоді виходячи з подання $\sqrt{2} = 1{,}414213...$, 1,41 = 1,41000..., $\frac{31}{22} = 1{,}4090909\ldots$, $1{,}42000\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ і означення відношення < у множині нескінченних десяткових дробів, у яких 9 не є періодом, робимо висновок, що 1,41 – нижня грань, $\frac{31}{22}$ – нижня межа, 1,42 – верхня грань, $\sqrt{3}$ – верхня межа множини X, причому $\inf X \in X$, $\sup X \notin X$. Отже, X має найменший елемент, але немає найбільшого елемента.

Приклад 2. Знайти найменший і найбільший елементи (якщо вони є) множини площ всіх можливих трикутників описаних навколо кола радіуса r.

Розв'язання. Нехай у трикутнику, описаному навколо кола радіуса r, два кути відповідно дорівнюють α і β (Рис. 53).

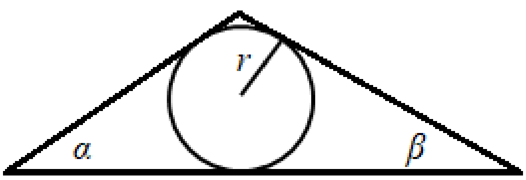


Рис. 53

Тоді площа описаного трикутника залежить від того, якими будуть кути α і β, тобто є функцією змінних α і β. Позначимо її $S(\alpha, \beta)$.

Оскільки $S(\alpha,\beta) = rp = r\left(r\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + r\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right) =$
$= r^2\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\right)$, то задача зводиться до знаходження найменшого та найбільшого значення функції $S(\alpha,\beta)$ при умові $\alpha > 0,\ \beta > 0,$ $\alpha + \beta < \pi$. Якщо якийсь із кутів буде прямувати до нуля, то, очевидно, що площі відповідних трикутників будуть нескінченно зростати, і ніяке число не може бути верхньою гранню множини площ трикутників, описаних навколо заданого кола. Таким чином, ця множина необмежена зверху і верхньої грані, а, отже, найбільшого значення, немає. Із системи

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = r^2\left(-\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = r^2\left(-\frac{1}{2\sin^2\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}\right) = 0$$

дістаємо $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\beta}{2}$. А оскільки $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, то остання рівність виконується тільки при $\alpha = \beta$. Тоді з рівняння $\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 0$ і заданих умов дістанемо, що $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$. Таким чином, функція $S(\alpha,\beta)$ досягає мінімуму у точці $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ і мінімальне значення це площа рівностороннього трикутника, описаного навколо кола радіуса *r*. Звідси маємо, що найменшим елементом заданої множини є число $3\sqrt{3}r^2$.

Очевидно, що не кожна навіть обмежена множина має найменший і найбільший елемент. А от питання існування нижньої і верхньої грані відразу знімається, якщо є інформація про обмеженість множини.

Теорема 2. *Кожна непорожня обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню грань, причому вона єдина.*

Доведення. Нехай $X \subset R$ обмежена зверху множина дійсних чисел, а $Y = \{y | y \in R \wedge (\forall x \in X)(x \leq y)\}$ – множина всіх верхніх меж множини *X*. Ці множини непорожні і $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leq y)$. Тоді за аксіомою неперервності існує число *c* таке, що $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leq c \leq y)$. Оскільки для будь-якого $x \in X$ $x \leq c$, то $c \in Y$, а оскільки для будь-якого $y \in Y$ $c \leq y$, то *c* – мінімальний елемент множини *Y*. А найменша межа множини X і є її верхньою гранню, єдиність верхньої грані випливає з єдиності мінімального елемента множини *Y*.

Доведення того факту, що кожна непорожня обмежена знизу множина має єдину нижню грань, проводиться так саме.

Виявляється, що теорема 2 рівноцінна аксіомі неперервності, тобто коли замість аксіоми VI прийняти аксіому VI'. *Будь-яка непорожня обмежена зверху множина має точну верхню грань,* то можна довести таку теорему:

Теорема 3. *Якщо X і Y – непорожні підмножини множини R такі, що для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ виконується нерівність $x \leq y$, то існує таке $c \in R$, що $x \leq c \leq y$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$.*

Доведення. Нехай X і Y – непорожні множини такі, що $\forall x \in X$ і $\forall y \in Y$ $x \leq y$. Тоді множина *X* обмежена зверху, а, отже, має верхню грань. Покажемо, що $\forall x \in X$ і $\forall y \in Y$ $x \leq \sup X \leq y$. Справді, якщо $Z = \{z | z \in R \wedge (\forall x \in X)(x \leq z)\}$, то $\sup X = \min Z$, а оскільки $Y \subset Z$, то для будь-якого $y \in Y$ $\min Z \leq y$. Отже, $\sup X$ є якраз тим числом, що $x \leq \sup X \leq y$ для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$.

Якщо у множині R виділити множину натуральних чисел N, як найменшу індуктивну множину (множину, яка з кожним числом *x,* що їй належить, містить число $x + 1$), яка містить 1, то неперервність множини *R* можна охарактеризувати такими двома аксіомами.

Аксіома Архімеда. *Для будь-якого дійсного числа x існує натуральне число n таке, що n > x.*

Аксіома Кантора. *Для будь-якої системи вкладених відрізків* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$,…, *де* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$, *існує хоча би одне число, яке належить всім відрізкам.*

Якщо на систему вкладених відрізків накласти додаткову вимогу, щоб вона була стяжною ($\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ такий, що $\forall n > n_0$ $b_n - a_n < \varepsilon$), то легко показати, що тоді існує єдина точка, що належить всім відрізкам системи.

Якраз у такому вигляді цей факт широко використовується в аналізі.

Підсумовуючи, підкреслимо, що властивість неперервності множини *R* повсюди використовується на практиці. Властивість неперервності множини дійсних чисел виражає собою об'єктивну впевненість у тому, що вимірювана величина має певне значення, яке знаходиться між її наближеними значеннями, обрахованими з недостачею і надлишком. Як цими значеннями розпорядитись дає відповідь закон великих чисел.

13.4. Порівняння дійсних чисел.

Для будь-яких нерівних дійсних чисел *a* і b можна сказати, яке більше, а яке менше.

Говорять, що число *a* більше числа b, і пишуть: $a > b$, якщо різниця $\mathrm{a} - \mathrm{b}$ – додатне число; якщо ж різниця $\mathrm{a} - \mathrm{b}$ – від'ємне число, то говорять, що число *a* менше числа b, і пишуть: $a < b$. Згідно з цим визначенням будь-яке додатне число більше нуля, будь-яке від'ємне число менше нуля і менше будь-якого додатного числа. Для будь-яких заданих чисел *a* і b вірне одне і тільки одне з відношень: $a > b$, $a < b$, $a = b$. В цьому випадку говорять, що між дійсними числами, тобто між елементами множини R встановлені відношення порядку. Множини, між елементами яких встановлені відношення порядку, називаються впорядкованими.

З геометричної точки зору нерівність $a < b$ ($a > b$) означає, що точка a розміщена на координатній прямій лівіше (правіше) точки b.

Знаки «<», «>» називаються *знаками строгих нерівностей*. Інколи використовуються знаки «≤», «≥» – знаки нестрогих нерівностей; запис $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ означає, що вірне одне з двох: або число a менше числа b, або число a дорівнює числу b. Наприклад, $3 \leq 5,\ 5 \geq 5$ – вірна нерівність. Нерівності $\mathrm{a} > \mathrm{b}$ і $\mathrm{c} > \mathrm{d}$ називаються нерівностями одного знаку; нерівності $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ і $\mathrm{c} > \mathrm{d}$ називаються нерівностями протилежних знаків. Якщо числа a, b, c такі, що $\mathrm{a} < \mathrm{b}$, і $\mathrm{b} < \mathrm{c}$, то користуються записом $\mathrm{a} < \mathrm{b} < \mathrm{c}$.

Вправи.

1. Якщо кожне число a таке, що для будь-якого елемента $x \in X\ \ a \leq x$, назвати нижньою межею множини X, а кожне число b таке, що для будь-якого елемента $x \in X\ \ x \leq b$, назвати верхньою межею множини X, то яким чином через ці терміни можна означити $\inf X$ і $\sup X$?

2. Знайти грані (якщо вони є) множини

$$\left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \middle| m \in N, n \in N\right\}.$$

3. Знайти найменший і найбільший елементи (якщо вони є) множини площ трикутників, вписаних у коло радіуса R.

4. Довести, що якщо X, Y – непорожні обмежені множини, то

$$\inf X \cup Y = \min(\inf X, \inf Y),$$
$$\sup X \cup Y = \max(\sup X, \sup Y).$$

5. Знайти найменший і найбільший елементи (якщо вони є) множини

$$\left\{x \middle| \log_{x^2+1} \frac{1}{3}|x+1| < 0\right\}.$$

6. Які числові множини виділяються такими характеристичними властивостями:

а) $(\exists M \in R)(\forall a \in A)(a \leq M)$,
б) $(\exists M \in R)(\exists a \in A)(a \leq M)$,
в) $(\forall M \in R)(\forall a \in A)(a \leq M)$,
г) $(\forall M \in R)(\exists a \in A)(a \leq M)$,
д) $(\exists a \in A)(\forall M \in R)(a \leq M)$,
е) $(\exists a \in A)(\exists M \in R)(a \leq M)$,
є) $(\forall a \in A)(\forall M \in R)(a \leq M)$,
ж) $(\forall a \in A)(\exists M \in R)(a \leq M)$.

ТЕМА 14. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

14.1. Наближені обчислення

Наближені обчислення виконують тоді, коли компонентами дій є наближені значення величин або чисел, які здобуті шляхом округлення результатів вимірювання геометричних, фізичних, хімічних та інших величин, результатів виконання ділення, добування коренів з чисел, знаходження значень тригонометричних функцій, логарифмів чисел тощо.

У наближених обчисленнях користуються *правилами* округлення натуральних чисел та десяткових дробів.

Щоб округлити натуральне число до певного розряду, потрібно:

1) замінити нулями всі цифри, що стоять після цього розряду;

2) якщо наступна за цим розрядом цифра була 5, 6, 7, 8 або 9, то цифру розряду, до якого виконується округлення, збільшити на одиницю; якщо ж наступна за цим розрядом цифра була 0, 1, 2, 3 або 4, то цифру розряду, до якого виконується округлення, залишити без змін.

Приклад 1. Округлити числа 752781; 26436; 939855; 6597; 4302:

а) до розряду десятків;

б) до розряду тисяч.

Розв'язання:

а) $752781 \approx 752780$; $26436 \approx 26440$; $939855 \approx 939860$; $6597 \approx 6600$; $4302 \approx 4300$;

б) $752781 \approx 753000$; $26436 \approx 26000$; $939855 \approx 940000$; $6597 \approx 7000$; $4302 \approx 4000$.

При округленні десяткових дробів доцільно користуватися одним із двох правил.

Правило 1. *Щоб округлити десятковий дріб до певного розряду дробової частини (до певного десяткового знаку) або до розряду одиниць, треба:*

1) відкинути всі десяткові знаки, які стоять після цього розряду;

2) якщо перша з відкинутих цифр була 5, 6, 7, 8 або 9, то останню залишену цифру збільшити на одиницю;

3) якщо перша з відкинутих цифр була 0, 1, 2, 3 або 4, то останню залишену цифру залишити без змін.

Правило 2. *Щоб округлити десятковий дріб до певного розряду цілої частини, слід:*

1) відкинути всі цифри дробової частини (всі десяткові знаки);

2) цілу частину округлити за правилами округлення натуральних чисел.

При округленні десяткового дробу до розряду одиниць цифра цього розряду залишається без змін чи збільшується на одиницю залежно від того, яким був перший з відкинутих десяткових знаків.

У наближених обчисленнях використовують поняття «абсолютна похибка» та «відносна похибка» наближеного значення.

Абсолютною похибкою наближеного значення називається модуль різниці точного і наближеного значень числа або величини.

Слід мати на увазі, що у фізиці, хімії, технічних науках наближені значення записують, як правило, у стандартному вигляді або використовують записи на зразок $m = a \pm h$, де a наближене значення m; h – число, яке не перевищує абсолютна похибка наближення. Якщо треба позначити, що a є наближеним значенням m без вказівки точності наближення, то використовують запис $m \approx a$. Коли наближене значення записується у вигляді суми $m = a \pm h$, то послуговуються знаком рівності.

Відносною похибкою наближеного значення називається відношення абсолютної похибки до модуля наближеного значення.

Наприклад, якщо округлити число 24,8 до розряду одиниць, то одержимо 24,8 ≈ 25. Тоді відносна похибка наближеного значення 25 дорівнює

$$\frac{|24{,}8 - 25|}{25} = \frac{|-0{,}2|}{25} = \frac{0{,}2}{25} = 0{,}008.$$

Звичайно відносну похибку виражають у процентах. У розглянутому прикладі вона дорівнює 0,008 = 0,8%.

Відносна похибка характеризує якість вимірювання величин. Слід мати на увазі, що точне значення вимірюваної величини невідоме, а тому невідома й абсолютна похибка. Але відоме, як правило, число h, яке не перевищує абсолютна похибка. Тобто коли $b = 0{,}5 \pm 0{,}1$, то $h = 0{,}1$.

Тому $|b - 0{,}5| \leq 0{,}1$, а відносна похибка $\frac{|b-0{,}5|}{0{,}5} \leq \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2 = 20\%.$

На практиці часто використовують правила наближених обчислень без строгого врахування похибок, або так званий *спосіб підрахунку правильних цифр.*

Правильною цифрою наближеного значення називають цифру будь-якого розряду, якщо абсолютна похибка не перевищує одиниці цього розряду.

Наближені значення записують так, щоб усі цифри запису були правильними. Такий запис дає уявлення про точність наближення. У таблицях усі значення записують лише правильними цифрами.

Для практики наближених обчислень, зокрема у фізиці, хімії, загальнотехнічних і спеціальних предметах, важливо вміти визначити абсолютну похибку наближених значень, записаних у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a \leq 10$ при натуральних і цілих від'ємних *n*, коли всі цифри *a* правильні.

Приклад 2. Оцінити абсолютну похибку (тобто знайти точність наближення h) наближеного значення швидкості електрона $v = 6 \cdot 10^6$м/с.

Розв'язання:

$$v = (6 \pm 1) \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^6 \pm 1 \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^6 \pm 6^{10}.$$

Отже, $h = 6^{10}$, тобто швидкість електрона записана з точністю до 1 000 000 м/с. Це означає, що значення перебуває в межах

$$6\,000\,000 - 1\,000\,000 \leq v \leq 6\,000\,000 + 1\,000\,000.$$

Приклад 3.

Оцінити абсолютну похибку заряду електрона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$Кл.

Розв'язання:

$$q = (1{,}6 \pm 1) \cdot 10^{-19} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \pm 1 \cdot 10^{-19} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \pm 10^{-20}.$$

Отже, $h = 10^{-20}$.

Проаналізувавши розв'язання прикладів, можна сформулювати алгоритм: *щоб визначити точність наближення, записаного в стандартному вигляді, треба:*

1) у виразі $a \cdot 10^n$ *записати множник а у вигляді* $a \pm h$;

2) відкрити дужки і, перетворивши добуток степенів, записати виразу вигляді $a_1 \pm h_1$.

Значення h_1 *буде шуканою абсолютною точністю наближення.*

Оцінити відносну похибку можна, скориставшись формулою $\frac{h}{|a|}$. У другому прикладі $\frac{10^6}{6 \cdot 10^6} = \frac{1}{6} < 1$ (округлення в сторону збільшення, тобто з надлишком). У третьому прикладі $\frac{h}{|a|} = \frac{10^{-20}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = \frac{1}{16} < \frac{1}{10} = 0{,}1.$

В обох прикладах межа відносної похибки (відносна точність) виявилась меншою від одиниці останнього розряду в запису наближення (числа a).

При виконанні дій додавання і віднімання в результаті враховують кількість правильних десяткових знаків даних чисел. При цьому вважають, що дані наближені значення записані лише правильними цифрами.

При додаванні і відніманні наближених значень у результаті залишають стільки десяткових знаків, скільки має дане число з найменшою кількістю десяткових знаків.

Задача 1. Пляшка з олією важить 1,42 кг, а порожня пляшка – 0,543 кг. Яка вага олії?

Розв'язання: $1{,}42 - 0{,}543 = 0{,}877 \approx 0{,}88$ (кг).

При виконанні дій множення і ділення в результаті підраховують кількість значущих цифр. *Значущими цифрами* наближення, записаного у вигляді десяткового дробу, називаються всі його цифри, крім нулів на початку числа.

Наприклад, у наближених значеннях 2,25; 0,317; 9,03; 12,0 по три значущі цифри; а у наближеннях 76,28; 20,40; 0,009 862 – по чотири.

Якщо наближене значення виражене натуральним числом, то його записують у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, залишаючи у десятковому дробі a лише правильні цифри. Тут $1 \leq a < 10$.

Наприклад, якщо в наближеному значенні 95 200 правильними є лише перші чотири цифри, то в стандартному вигляді це число записують так: $9{,}520 \cdot 10^4$.

При множенні і діленні наближених значень у результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх має наближене дане з найменшою кількістю *значущих цифр.*

При виконанні проміжних дій інколи користуються правилом запасної цифри: *у результатах проміжних дій залишають на одну (запасну) цифру більше, підкреслюючи її. В остаточному результаті запасна цифра відкидається за правилами округлення.*

Задача 2. Знайти площу прямокутника, довжина якого 34,26 м, а ширина 8,67 м, якщо обидва розміри наближені.

Розв'язання: $S = 34{,}26 \cdot 8{,}67 = 297{,}0342 \approx 297$ (м^2).

Задача 3. У колгоспі 49 га засіяли пшеницею. З ділянки площею 18 га зібрали по 40,3 ц з гектара, а з решти – по 32,7 ц. Який був середній урожай в колгоспі?

Розв'язання. Для розв'язання задачі треба обчислити значення виразу з наближеними даними:

$$\frac{40{,}3 \cdot 18 + (49 - 18) \cdot 32{,}7}{49} \approx \frac{725 + 31 \cdot 32{,}7}{49} \approx \frac{725 + 1014}{49} \approx 35{,}5 \approx 36(\text{ц}).$$

14.2. Тотожні перетворення виразів

Вирази, складені з чисел, знаків дій і дужок, називаються *числовими виразами.*

Наприклад: $5 + 3{,}7$; $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 - \sqrt{2}$; $(27 - 3{,}5) \cdot 12 - 67$;

$$\frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} - 47{,}5}{\frac{4}{9} - \frac{1}{27}}.$$

Якщо в числовому виразі можна виконати всі вказані в ньому дії, то здобуте в результаті число називають *числовим значенням даного виразу.*

Вирази, до складу яких входять не лише числа, а й змінні, позначені буквами, знаки дій, функції і дужки, називають *виразами зі змінними.*

Наприклад: $x + 2y$; $\frac{2a+b}{\sqrt{3}(a-b)}$.

Математичні вирази, в яких над числами і буквами, що входять до виразів, виконуються дії додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до натурального степеня і добування арифметичного кореня, називаються *алгебричними виразами.*

Наприклад, алгебричними є вирази $x - y$; $\frac{2a}{b-a}$; $5 + \frac{\sqrt{a}}{b}$; $\frac{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}{\sqrt{x+y}}$.

Алгебричний вираз називається *раціональним*, якщо відносно змінних (букв), що до нього входять, виконуються лише дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня.

Наприклад: $\frac{2a}{b-a}$; $12m - \sqrt{2}mn$; $\frac{\sqrt[3]{12}\cdot x}{x^2-\pi x}$.

Алгебричний вираз називається *ірраціональним,* якщо в ньому виконуються дії добування арифметичного кореня з букв (змінних) або виразів, що містять букви (змінні).

Наприклад: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+2ab$; $\sqrt{3a-5}$; $\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}$.

Раціональний вираз називається *цілим,* якщо він не містить дії ділення на змінну (букву) або на вираз, що містить змінну.

Наприклад, цілими є вирази $2\frac{7}{12}-3$; $a-b$; $\frac{x+y}{7}$; $\frac{2}{5}$; 23.

У курсі алгебри вивчались два види цілих раціональних виразів – одночлени і многочлени. Вирази, що не містять інших дій крім дії множення і піднесення до натурального степеня, називають *одночленами.*

Наприклад, одночленами є вирази $5{,}3$; $7m$; $\frac{2}{3}ab^2$; $\frac{x^2y}{5}$.

Многочленом називають суму одночленів.

Наприклад, многочленами є вирази $a^2+2ab+b^2$; $5+xy$.

Раціональний вираз називають *дробовим,* якщо він містить дію ділення на змінну або на вираз, що містить змінну.

Наприклад, дробовими є вирази $\frac{2a}{b}$; $\frac{5}{x}-6x$; $\frac{3x}{x-1}$.

Не слід ототожнювати поняття алгебричного дробу і дробового виразу. *Дріб* – це вираз виду $\frac{a}{b}$, де a і b – числові вирази або вирази зі змінними за умови, що $b\neq 0$.

Наприклад, вирази $\frac{2}{3}$; $\frac{5a}{7}$; $\frac{2{,}3}{b}$; $\frac{x^2-y^2}{xy}$ є дробами, але лише два останніх із них – дробові вирази. Вирази $5-\frac{2}{a}$; $\frac{2{,}1x-y}{x}-5x$ – дробові, але вони не є дробами, хоча й можуть бути шляхом перетворення зведені до дробів.

Дріб – форма запису числового виразу або виразу зі змінними. Звичайні дроби є окремим випадком поняття алгебричного дробу і теж є формою запису числового виразу. У формі звичайного дробу можна записати як ціле, так і дробове число.

Наприклад: $\frac{10}{2}$; $\frac{12}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{45}{7}$.

Два вирази зі змінними називаються *тотожно-рівними на множині,* якщо їх відповідні значення збігаються при всіх значеннях змінних, що належать цій множині. Під відповідними розуміють значення, які одержують у разі підстановки у вирази однакових значень змінних.

Наприклад:

а) вирази $5(x+2)$ і $5x+10$ – тотожно-рівні на множині всіх чисел;

б) вирази $\frac{4a^2}{6a}$ і $\frac{4a}{3}$ – тотожно-рівні на множині всіх чисел, крім нуля;

в) вирази a^2-b^2 і $(a+b)(a-b)$ – тотожно-рівні на множині всіх пар чисел.

Тотожним перетворенням виразу називається заміна виразу тотожно-рівним йому.

Рівність, права і ліва частини якої – тотожно-рівні вирази на певній множині, називається *тотожністю на цій множині.*

Основними алгебраїчними тотожностями є такі:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);\ (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;\ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$
$$\sqrt{a^2} = |a|;\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

14.3. Тотожні перетворення цілих виразів. Одночлени і многочлени.

Одночленом стандартного вигляду називається такий одночлен, який можна зобразити добутком коефіцієнта (числового множника) і степенів різних змінних, що взяті співмножником лише один раз.

Наприклад, $2a^2b^3;\ -6{,}5xy^3z;\ \frac{2}{5}n^2m^3;\ -xyz.$

Щоб звести одночлен до стандартного вигляду, потрібно:

1) перемножити числові множини і поставити здобуте число на перше місце в добутку;

2) перемножити степені однакових змінних і записати їх як співмножники.

Зведення одночлена до стандартного вигляду – тотожне перетворення. Тотожним перетворенням одночленів є також множення одночленів і обернене до нього перетворення – зображення одночлена у вигляді добутку двох або кількох одночленів, піднесення одночленів до степеня з натуральним показником, зображення одночлена у вигляді степеня.

Приклад 1. Звести вирази до одночленів стандартного вигляду:

$$\text{а)} -2\frac{2}{3}m^2n \cdot \frac{3}{8}mn;\ \text{б)} 6c^2d(-3c^2d^2);\ \text{в)} (-3x^2y^3)^2.$$

Розв'язання:

$$\text{а)} -2\frac{2}{3}m^2n \cdot \frac{3}{8}mn = -\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8}m^3n^2 = -m^3n^2;$$
$$\text{б)} 6c^2d(-3c^2d^2) = -18c^4d^3;\quad \text{в)} (-3x^2y^3)^2 = 9x^4y^6.$$

Приклад 2. Подати одночлени у вигляді добутку двох будь-яких одночленів:

$$\text{а)} -12x^3y^2;\ \text{б)} \frac{2}{3}a^4b^6;\ \text{в)} -0{,}25mn^2.$$

Розв'язання:

$$\text{а)} -12x^3y^2 = (-2xy)(6x^2y);\quad \text{б)} \frac{2}{3}a^4b^6 = (2a^2b^2)\left(\frac{1}{3}a^2b^3\right);$$
$$\text{в)} -0{,}25mn^2 = (0{,}5n)(-0{,}5mn).$$

Приклад 3. Перетворити вирази в одночлени стандартного вигляду:

$$\text{а)} (2ab^3)^4;\ \text{б)} (-0{,}3x^2y^4)^3;\ \text{в)} \left(\frac{2}{5}m^2n\right)^4.$$

Розв'язання:

$$\text{а)} (2ab^3)^4 = 32a^4b^{12};\quad \text{б)} (-0{,}3x^2y^4)^3 = 0{,}027x^6y^{12};$$
$$\text{в)} \left(\frac{2}{5}m^2n\right)^4 = \frac{8}{625}m^8n^4.$$

Приклад 4. Подати одночлени у вигляді степеня:

$$а)9a^2b^6;\ \ б) -0{,}27x^6y^9;\ \ в)\frac{3}{4}m^2n^2.$$

Розв'язання:

$$а)9a^2b^6 = (3ab^3)^2;\ \ б) -0{,}27x^6y^9 = (-0{,}3x^2y^3)^3;$$

$$в)\frac{3}{4}m^2n^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}mn\right)^2.$$

Простішим перетворенням многочленів є зведення їх подібних членів, тобто членів, які відрізняються лише коефіцієнтами.

Щоб звести подібні члени многочлена, треба додати їх коефіцієнти і приписати до утвореного числа як співмножники степені змінних.

Основним перетворенням многочлена є зведення його до стандартного вигляду.

Щоб звести многочлен до стандартного вигляду, слід:

1) всі члени многочлена звести до стандартного вигляду;

2) звести подібні члени многочлена.

Приклад 5. Звести многочлен $a^3 + 2aba + b^2a - 2bb - 2b^2b$ до стандартного вигляду.

Розв'язання:

$$a^3 + 2aba + b^2a - 2bb - 2b^2b = a^3 + 2a^2b + b^2a - 2b^2 - 2b^3.$$

Якщо многочлен після зведення його до стандартного вигляду перетворюється в нуль, то його називають *нульовим многочленом.*

Наприклад, многочлени $2x - 2x = 0$; $5m^2n - 7m^2n + 2m^2n = 0$.

Степінь ненульового многочлена – це найбільший зі степенів одночленів, що входять у многочлен після зведення його до стандартного вигляду. При цьому *степенем одночлена* називається сума показників степенів змінних.

Наприклад, одночлен $7m^2n$ має третій степінь;

многочлен $3xy^2 - 2xy + 7y^4 = 0$ є многочленом четвертого степеня.

До тотожних перетворень виразів, що мають у складі многочлени і одночлени, належать:

1) перетворення добутку (множення) одночлена на многочлен у многочлен стандартного вигляду і обернене до нього перетворення – розкладання многочлена на множники способом винесення одночленного множника за дужки;

2) перетворення добутку (множення) двох многочленів у многочлен стандартного вигляду і обернене перетворення – розкладання многочлена на множники, кожний з яких є многочленом.

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена й утворені добутки додати.

Приклад 6. Перетворити вираз $-0{,}2x^3(2{,}3x^2y - 0{,}9x + 3)$ у многочлен.
Розв'язання:

$$-0{,}2x^3(2{,}3x^2y - 0{,}9x + 3) = -0{,}46x^5y + 0{,}18x^4 - 0{,}6x^3.$$

Щоб розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки, потрібно:

1) знайти спільний множник усіх одночленів многочлена;

2) подати кожний член многочлена у вигляді добутку двох одночленів, один з яких – спільний множник;

3) винести спільний множник за дужки, використовуючи розподільний закон множення.

Щоб знайти спільний множник, треба знайти найбільший за модулем спільний дільник усіх коефіцієнтів одночленів і помножити його на кожну змінну в степені з найменшим показником, який вона має в даному многочлені.

Приклад 7. Винести за дужки спільний множник многочленів:

$$\text{а)}12x^4 - 8x^3 + 2x^2;\ \text{б)}-9x^4y^2 - 18x^2y + 12x^3y^2.$$

Розв'язання:

$\text{а)}12x^4 - 8x^3 + 2x^2 = \text{а)}2x^2 \cdot 6x^2 - 2x^2 \cdot 4x + 2x^2 = 2x^2(6x^2 - 4x + 1);$
$\text{б)}-9x^4y^2 - 18x^2y + 12x^3y^2 = -3x^2y \cdot 3x^2y + (-3x^2y) \cdot 6 - (-3x^2y) \cdot$
$\cdot 4xy = -3x^2y(3x^2y + 6 - 4xy).$

Щоб помножити многочлен на многочлен, слід колений член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена, одержані добутки додати і звести здобутий многочлен до стандартного вигляду.

Наприклад:

$$(2 - 2x + x^2)(x + 5) = 2x - 2x^2 + x^3 + 10 - 10x + 5x^2 =$$
$$= x^3 + 3x^2 - 8x + 10.$$

Перетворенням, оберненим до множення многочленів, є розкладання многочлена на множники, кожний з яких є многочленом. Виконують це перетворення способом групування.

Щоб розкласти многочлен на множники способом групування, треба згрупувати члени многочлена так, щоб доданки у кожній групі мали спільний множник, а після винесення спільного множника в дужках кожної групи виявились однакові многочлени, а потім однакові многочлени знову винести за дужки.

Приклад 8. Розкласти на множники многочлен $xy + 2y - 2x - 4$.
Розв'язання:

$$xy + 2y - 2x - 4 = (xy + 2y) + (-2x - 4) = y(x + 2) - 2(x + 2) =$$
$$= (y - 2)(x + 2).$$

У цьому разі групування можна виконати й інакше:

$$xy + 2y - 2x - 4 = (xy - 2x) + (2y - 4) = x(y - 2) + 2(y - 2) =$$
$$= (y - 2)(x + 2).$$

Під час виконання тотожних перетворень многочленів інколи зручно використати формули скороченого множення.

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2 \qquad (1)$$

Добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Якщо записати цю тотожність справа наліво, то матимемо рівність

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad (2)$$

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму.

Формулу (1) використовують для скороченого множення різниці двох виразів на їх суму.

Наприклад:

$$(9m^2-5n)(-9m^2-5n)=-(9m^2-5n)(9m^2+5n)=$$
$$=-(81m^4-25n^2)=25n^2-81m^4.$$

Формулу (2) використовують для розкладання на множники різниці квадратів будь-яких двох виразів.

Наприклад:

$$81x^2y^4-16a^2=(9xy^2)^2-(4a)^2=(9xy^2-4a)(9xy^2+4a).$$

При піднесенні до квадрата суми і різниці двох виразів використовують такі тотожності:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad (3)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad (4)$$

Квадрат суми (різниці) двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс (мінус) подвоєний добуток першого і другого виразів, плюс квадрат другого виразу.

Тотожності (3) і (4) називають відповідно формулою квадрата суми (різниці) двох виразів. Їх використовують при перетворенні тричленів виду $a^2 \pm 2ab+b^2$ у квадрат двочлена або при розкладанні його на множники.

Наприклад:

$$\frac{1}{4}x^2+4xy+16y^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot 4y+(4y)^2=\left(\frac{1}{2}x+4y\right)^2.$$

При множенні двочлена на тричлен певного виду зручно використовувати такі тотожності:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3, \qquad (5)$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3, \qquad (6)$$

Добуток суми (різниці) двох виразів на неповний квадрат їх різниці (суми) дорівнює сумі (різниці) кубів цих виразів.

Наприклад:

а)$(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)=8x^3+y^3$;

б)$(0{,}3-2c)(0{,}09+0{,}6c+4c^2)=0{,}027-8c^3$.

Якщо використовувати тотожності (5) і (6) у зворотному порядку при розкладанні двочленів певного виду на множники, то одержимо такі формули суми (різниці) кубів:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), \tag{7}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2), \tag{8}$$

Сума (різниця) кубів двох виразів дорівнює добутку суми (різниці) цих виразів на неповний квадрат їх різниці (суми).

Наприклад:

а)$27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$;

б)$8-\frac{1}{27}a^3=2^3-\left(\frac{1}{3}a\right)^3=\left(2-\frac{1}{3}a\right)\left(4+\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}a^2\right)$.

Дроби. Звичайні і алгебричні дроби мають багато спільного за властивостями і у правилах їх тотожних перетворень та дій.

<table>
<tr><th>Звичайні дроби</th><th>Алгебричні дроби</th></tr>
<tr><td>1. Звичайним дробом називають вираз виду $\frac{a}{b}$, де a – натуральне або рівне нулю число, b – натуральне число.
2. Основна властивість дробу: при множенні чисельника і знаменника дробу на одне і те саме натуральне число значення дробу не змінюється, тобто
$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}, b\neq 0, c\neq 0 \quad (1)$$</td><td>1. Алгебричним дробом називають вираз виду $\frac{a}{b}$, де a і $b\neq 0$ – числові вирази або вирази зі змінними.
2. Основна властивість дробу: при множенні чисельника і знаменника дробу на один і той самим вираз, відмінний від нуля, значення дробу не змінюється, тобто
$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}, b\neq 0, c\neq 0 \quad (1)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Помінявши в тотожності (1) місцями ліву і праву частини, одержимо
$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$</td></tr>
<tr><td>Ця тотожність дає можливість заміняти дріб виду $\frac{ac}{bc}$ рівним дробом $\frac{a}{b}$ або, як кажуть, скорочувати дріб $\frac{ac}{bc}$ на спільний множник c чисельника і знаменника.
4. Основна властивість дробу використовується для зведення дробів до найменшого спільного знаменника.</td><td>Ця тотожність дає можливість заміняти дріб виду $\frac{ac}{bc}$ тотожно рівним дробом $\frac{a}{b}$ або, як кажуть, скорочувати дріб $\frac{ac}{bc}$ на спільний множник c чисельника і знаменника.
4. Основна властивість дробу використовується для зведення дробів до простішого спільного знаменника.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Якщо змінити знак чисельника (або знаменника) дробу, то зміниться і знак цього дробу:</td></tr>
</table>

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; \ \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

6. Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \ c \neq 0.$$

7. Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, слід від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \ c \neq 0.$$

8. Додавання (віднімання) дробів із протилежними знаменниками зводиться до додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками, якщо змінити знак у знаменнику другого дробу і перед цим дробом. Наприклад:

$$\frac{a}{c-d} + \frac{b}{d-c} = \frac{a}{c-d} - \frac{b}{c-d} = \frac{a-b}{c-d}.$$

9. Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, треба попередньо звести їх до найменшого спільного знаменника (або до спільного знаменника, рівного добутку знаменників даних дробів) та виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.	**9.** Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, треба попередньо звести їх до простішого спільного знаменника (або до спільного знаменника, утвореного як добуток знаменників даних дробів) і виконати додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

10. Щоб помножити дріб на дріб, слід перемножити окремо їх чисельники та знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий – знаменником дробу:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \ b \neq 0, d \neq 0.$$

11. Щоб піднести дріб до степеня, потрібно піднести до цього степеня окремо чисельник та знаменник і перший результат записати в чисельнику, а другий – у знаменнику дробу:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \ b \neq 0.$$

12. Щоб поділити один дріб на другий, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \ b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0.$$

Зведення звичайних дробів до найменшого спільного знаменника виконується шляхом знаходження найменшого спільного кратного знаменників даних дробів (тобто найменшого числа, яке ділиться без остачі на знаменник кожного дробу).

Приклад 9. Додати дроби $\frac{7}{15}, \frac{3}{10}, \frac{5}{12}$.

Розв'язання.

Найменше спільне кратне знаменників 15, 10, 12 дорівнює 60. Додаткові множники відповідно 4, 6, 5.

$$\frac{^4 7}{15}+\frac{^6 3}{10}+\frac{^5 5}{12}=\frac{28}{60}+\frac{18}{60}+\frac{25}{60}=\frac{28+18+25}{60}=\frac{70}{60}=1\frac{11}{60}.$$

Щоб звести алгебричний дріб до простішого спільного знаменника, треба:

1) утворити добуток найменшого спільного кратного коефіцієнтів знаменників даних дробів і степенів кожної змінної (букви) з найбільшим показником, який має змінна у знаменниках даних дробів;

2) знайти додатковий множник кожного з даних дробів; для цього слід зобразити спільний знаменник як добуток двох одночленів, один з яких – знаменник даного дробу, тоді другий буде його додатковим множником;

3) знайти добуток чисельника кожного дробу на додатковий множник і записати спільний знаменник.

Приклад 10. Звести до простішого спільного знаменника дроби

$$\frac{5a}{6b^2c}, \quad \frac{7b}{12ac^3}, \quad \frac{11c}{18a^2b}.$$

Розв'язання.

1. Простішим спільним знаменником даних дробів є одночлен $36a^2b^2c^3$.
2. Знайдемо додаткові множники даних дробів.

$36a^2b^2c^3 = 6b^2c \cdot 6a^2c^2$; $6a^2c^2$ – додатковий множник першого дробу;
$36a^2b^2c^3 = 12ac^3 \cdot 3ab^2$; $3ab^2$ – додатковий множник другого дробу;
$36a^2b^2c^3 = 18a^2b \cdot 2bc^3$; $2bc^3$ – додатковий множник третього дробу.

3. $\frac{5a}{6b^2c}=\frac{5a\cdot 6a^2c^2}{6b^2c\cdot 6a^2c^2}=\frac{30a^3c^2}{36a^2b^2c^3}$; $\frac{7b}{12ac^3}=\frac{7b\cdot 3ab^2}{12ac^3\cdot 3ab^2}=\frac{21ab^3}{36a^2b^2c^3}$;
$\frac{11c}{18a^2b}=\frac{11c\cdot 2bc^3}{18a^2b\cdot 2bc^3}=\frac{22bc^4}{36a^2b^2c^3}$.

Основна задача тотожних перетворень раціональних виразів загального вигляду, що містять цілі і дробові вирази, полягає у зведенні виразу до дробу, чисельник і знаменник якого -многочлени стандартного вигляду. При цьому порядок виконання перетворень такий самий, що й порядок дій у числових виразах.

Приклад 11. Спростити вираз

$$x-\frac{ax}{a-x}:\frac{a+x}{a}+\frac{ax^2}{a^2-x^2}$$

Розв'язання:

$$x-\frac{ax}{a-x}:\frac{a+x}{a}+\frac{ax^2}{a^2-x^2}=x-\frac{ax}{a-x}\frac{a}{a+x}+\frac{ax^2}{a^2-x^2}=$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{a^2x}{a^2-x^2} + \frac{ax^2}{a^2-x^2} = \frac{x(a^2-x^2) - a^2x + ax^2}{a^2-x^2} =$$
$$= \frac{a^2x - x^3 - a^2x + ax^2}{a^2-x^2} = \frac{x^2(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{x^2}{(a+x)}.$$

14.4. Ірраціональні вирази. Квадратний корінь і його властивості.

Квадратним коренем з числа а називаються числа, квадрати яких дорівнюють *а*.

Наприклад, числа 4 і -4 – квадратні корені з числа 16, оскільки $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$. Квадратний корінь з числа 0 дорівнює 0. Корінь з числа 0 є єдиним, оскільки у множині дійсних чисел тільки $0^2 = 0$.

Квадратний корінь з від'ємного числа не існує, оскільки у множині дійсних чисел не існує числа, квадрат якого дорівнював би від'ємному числу.

Наприклад, не існує квадратного кореня з числа -25, оскільки при множенні дійсних чисел не існує числа, квадрат якого дорівнював би -25.

Дію добування квадратного кореня з числа використовують при розв'язанні квадратних рівнянь, зокрема рівняння $x^2 = 16$. За означенням квадратного кореня це рівняння має два розв'язки (корені), які є квадратним коренем з числа 16. Додатний корінь цього рівняння називають арифметичним квадратним коренем з числа 16.

Число 0 – корінь рівняння $x^2 = 0$. Його також називають арифметичним коренем з числа 0.

У загальному випадку: *арифметичним квадратним коренем з числа а називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює а, і позначають* $\sqrt{a}$.

Оскільки квадрат будь-якого числа – невід'ємне число, то при $a < 0$ вираз $\sqrt{a}$ у множині дійсних чисел не має змісту.

Наприклад, не мають змісту вирази $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-\frac{1}{4}}$.

Арифметичний квадратний корінь має такі *властивості.*

1. Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, тобто корінь з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів.

2. Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, тобто корінь з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню чисельника, поділеному на корінь знаменника.

3. При будь-якому значенні числа *а* маємо $\sqrt{a^2} = |a|$.

Останню тотожність використовують при виконанні тотожних перетворень ірраціональних виразів та розв'язанні квадратних рівнянь і нерівностей. Зокрема, щоб розв'язати найпростіше квадратне рівняння $x^2 = 16$, треба добути арифметичний квадратний корінь з обох частин рівняння. Отже, $\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$; $|x| = 4$. Звідси $x_1 = 4$; $x_2 = -4$, або $x_{1,2} = \pm 4$.

Основними тотожними перетвореннями ірраціональних вирами, що містять квадратні корені зі змінних, є:

1) виведення множника з-під знака кореня;
2) введення множника під знак кореня;
3) звільнення від кореня у знаменнику або чисельнику дробу.

Приклад 12. Вивести множник з-під знака кореня:

$$\text{а) } \sqrt{x^9};\ \text{ б) } \sqrt{a^8b^3};\ \text{ в) } \sqrt{a^6b^{12}c^3};\ \text{ г) } \sqrt{a^5b^2}.$$

Загальний підхід до розв'язання цих вправ полягає в тому, щоб попередньо подати підкореневий вираз як добуток двох і співмножників, один з яких є квадратом одночлена, і скористатися тотожністю про добування кореня з добутку невід'ємних множними і тотожністю $\sqrt{a^2} = |a|$.

Розв'язання:

а) $\sqrt{x^9} = \sqrt{(x^4)^2 \cdot x} = \sqrt{(x^4)^2}\sqrt{x} = x^4\sqrt{x}$;

б) $\sqrt{a^8b^3} = \sqrt{(a^4b)^2 \cdot b} = \sqrt{(a^4b)^2}\sqrt{b} = a^4b\sqrt{b}$,

оскільки означенням арифметичного кореня змінна b має бути невід'ємною, тобто $b \geq 0$;

в) $\sqrt{a^6b^{12}c^3} = \sqrt{(a^3b^6\mathrm{c})^2 \cdot \mathrm{c}} = \sqrt{(a^3b^6\mathrm{c})^2}\sqrt{\mathrm{c}} = a^3b^6\mathrm{c}\sqrt{\mathrm{c}}$.

За умовою існування арифметичного кореня $c \geq 0$, а змінні a і b можуть бути будь-якими;

$$\text{г) } \sqrt{a^5b^2} = \sqrt{(a^2b)^2 \cdot a} = \sqrt{(a^2b)^2}\sqrt{a} = a^2|b|\sqrt{a}.$$

Приклад 13. Ввести множник під знак кореня:

$$\text{а) } 5\sqrt{2};\ \text{ б) } -3\sqrt{a};\ \text{ в) } a\sqrt{3};\ \text{ г) } x\sqrt{-\frac{2}{x}}.$$

Розв'язання:

а) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2}\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$;

б) від'ємний множник -3 не можна ввести під знак кореня, оскільки його не можна подати у вигляді арифметичного кореня. Але вираз $-3\sqrt{a}$ можна перетворити так, щоб ввести під знак кореня додатний множник 3:

$$-3\sqrt{a} = -1 \cdot 3\sqrt{a} = -\sqrt{3^2}\sqrt{a} = -\sqrt{9a};$$

в) якщо $a \geq 0$, то $a\sqrt{3} = \sqrt{a^2}\sqrt{3} = \sqrt{3a^2}$;

якщо $a < 0$, то $a\sqrt{3} = -(-a)\sqrt{3} = -\sqrt{(-a)^2}\sqrt{3} = -\sqrt{3a^2}$;

г) $x\sqrt{-\frac{2}{x}} = -(-x)\sqrt{-\frac{2}{x}} = -\sqrt{(-x)^2}\sqrt{-\frac{2}{x}} = -\sqrt{-\frac{2}{x} \cdot x^2} = -\sqrt{-2x}$,

де $x < 0$ за умовою.

Приклад 14. Спростити вирази:

$$а)\ \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2};\ \ б)\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}.$$

Розв'язання:

$$а)\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|2-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-1\right|=2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=1$$

$$б)\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-5\right|+\left|1-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-5+1-\sqrt{3}=4$$

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа називають невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a, і позначають його $\sqrt[n]{a}$.

Арифметичний корінь n-го степеня з числа a має зміст як з парним, так і з непарним показником n. Корінь непарного степеня з від'ємного числа можна записати через арифметичний корінь того ж степеня.

Наприклад: $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$.

Взагалі, якщо n – непарне і $a<0$, то $\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}$. Знак кореня n-го степеня використовують для запису розв'язків рівнянь виду $x^n=a$.

Наприклад, рівняння $x^5=48$ у множині дійсних чисел має єдиний корінь $x=\sqrt[5]{-48}=-\sqrt[5]{48}$.

Арифметичний корінь n-го степеня має ті самі *властивості,* що й арифметичний квадратний корінь:

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, якщо $a\geq 0, b\geq 0$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, якщо $a\geq 0, b>0$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$, якщо $a\geq 0, n$ і k– натуральні числа;

4) $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, якщо n,k,m– натуральні числа.

14.5. Степінь з раціональним показником і його властивості.

Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називається добуток n співмножників, кожний з яких дорівнює a.

Степенем числа a з показником 1 називається саме число a, тобто

$$a^n=a\cdot a\cdot a\cdot \ldots\cdot a;\ \ a^1=a.$$

Будь-який степінь з натуральним показником додатного числа завжди число додатне, непарний степінь від'ємного числа є число від'ємне.

Справді, $3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$; $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=16$; $(-3)^3=(-3)(-3)(-3)=-27$.

Якщо $a=0$, то $a^n=0$. **Наприклад**, $0^3=0\cdot 0\cdot 0=0$.

Степінь з натуральним показником має такі *властивості.*

1. Для будь-якого a та довільних натуральних чисел m і n маємо

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$

тобто при множенні степенів з однаковими основами показники степенів додаються, а основа залишається тією самою.

2. Для будь-якого a та довільних натуральних чисел m і n за умови, що $m > n$, маємо

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

тобто при діленні степенів з однаковими основами, відмінними від нуля, від показника степеня діленого віднімається показник степеня дільника, а основа залишається тією самою.

Будь-яке число, що не дорівнює нулю, у нульовому степені дорівнює одиниці, тобто $a^0 = 1$, *якщо* $a \neq 0$.

З введенням означення степеня з нульовим показником формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ можна застосувати й у випадку, коли $m = 0$, або $n = 0$, або $m = 0$ і $n = 0$ за умови, що $a \neq 0$, а формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$ – у випадку, коли $m \geq 0$, $a \neq 0$.

3. Для будь-яких a і b та довільного натурального числа n

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

тобто при піднесенні до степеня добутку підноситься до цього степеня кожний множник окремо і результати перемножуються.

Ця властивість виконується і для степенів з нульовим показником, якщо основи відмінні від нуля.

4. Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ та довільного натурального n

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

тобто при піднесенні до степеня дробу окремо підносимо до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат ділимо на другий.

5. Для будь-якого числа a та довільних натуральних чисел m і n

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

тобто при піднесенні до степеня показники степенів перемножують, а основу залишають ту саму.

Якщо $a \neq 0$ *і n – ціле від'ємне число, то*

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Наприклад, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Всі властивості степенів з натуральним показником виконуються і для степенів з цілим показником за умови, що основа степеня не дорівнює нулю.

Якщо a – додатне число, $\frac{m}{n}$ *дробове число (m – ціле, n – натуральне), то*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

За означенням

$$3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3};\quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{25}{10}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^5};$$

$$3^{-\frac{2}{3}} = 3^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{(3)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

Степінь, що дорівнює нулю, означається лише для додатного дробового показника: якщо $\frac{m}{n}$ – додатне дробове число (m і n – натуральні числа), то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Для степенів з раціональним, зокрема дробовим, показником виконуються всі властивості, що встановлені для степенів з цілими показниками.

Тотожні перетворення виразів, що містять арифметичні корені будь-якого степеня і степені з дробовим показником, виконують на основі властивостей арифметичних коренів і властивостей степенів.

Приклад 15. Спростити вирази:

$$\text{а)} \left(\sqrt{12} - \frac{1}{5}\sqrt{75} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\sqrt{3};\ \ \text{б)} \left(\frac{a}{b}\sqrt{ab} - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab};$$

$$\text{в)} \left(1 + c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}};\ \ \text{г)} \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2.$$

Розв'язання:

$$\text{а)} \left(\sqrt{12} - \frac{1}{5}\sqrt{75} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = \sqrt{12\cdot 3} - \frac{1}{5}\sqrt{75\cdot 3} + \frac{1}{3}\sqrt{3\cdot 3} =$$

$$= \sqrt{36} - \frac{1}{5}\sqrt{225} + \frac{1}{3}\sqrt{9} = 6 - 3 + 1 = 4;$$

$$\text{б)} \left(\frac{a}{b}\sqrt{ab} - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab} = \frac{a}{b}\sqrt{(ab)^2} - 2\sqrt{\frac{b}{a}ab} + \sqrt{\frac{ab\cdot 1}{ab}} =$$

$$= a^2 - 2b + 1;$$

$$\text{в)} \left(1 + c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}} = 1 + 2c^{\frac{1}{2}} + \left(c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}} = 1 + c;$$

$$\text{г)} \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) + \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\right) = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= 2a^{\frac{1}{3}}\cdot 2b^{\frac{1}{3}} = 4\left(ab^{\frac{1}{3}}\right).$$

Приклад 16. Обчислити значення виразу

$$\left(\frac{5x^3 + 5x^2y}{2} : (x^2y - y^3)\right)\left(\frac{(x+y)^2}{4xy} - 1\right), \qquad \text{якщо } x \approx 15{,}2; y \approx 3{,}25.$$

Розв'язання:

$$\left(\frac{5x^3+5x^2y}{2}:(x^2y-y^3)\right)\left(\frac{(x+y)^2}{4xy}-1\right)=$$

$$=\left(\frac{5x^2(x+y)}{2}:\frac{y(x+y)(x-y)}{1}\right)\left(\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4xy}\right)=$$

$$=\frac{5x^2(x+y)\cdot 1}{2y(x+y)(x-y)}\frac{(x-y)^2}{4xy}=\frac{5x^2(x+y)(x-y)^2}{8xy^2(x+y)(x-y)}=\frac{5x(x-y)}{8y^2}\approx$$

$$\approx\frac{5\cdot 15{,}2(15{,}2-3{,}25)}{8\cdot 3{,}25^2}\approx\frac{5\cdot 15{,}2\cdot 12{,}0}{8\cdot 3{,}25^2}\approx 10{,}8.$$

Вправи.

1. Обчислити значення виразу:

а) $\left(2\frac{3}{4}+0{,}15-1\frac{8}{25}\right):\left(2\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}+0{,}04\right)$;

б) $1{,}456:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0{,}125+4\frac{1}{2}\cdot 0{,}8$;

в) $\dfrac{\frac{4}{5}-2{,}7\cdot 2\frac{1}{3}}{5{,}2-1\frac{2}{5}:\frac{3}{7}}$;

г) $\dfrac{\left(-2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$.

2. Знайти числове значення виразів:

1) $\dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}$, якщо:

а) $x=-3;\ y=-2$; б) $x=-0{,}4;\ y=0{,}5$; в) $x=\frac{2}{3};\ y=-\frac{3}{4}$.

2) $\dfrac{a-b}{a^2-ab+2b^2}$, якщо:

а) $a=-4;\ b=-1$; б) $a=\frac{3}{4};\ b=-0{,}5$; в) $a=-\frac{2}{3};\ b=0{,}5$.

3. Знайти площу трапеції, основи якої $a\approx 4{,}6$ см, $b\approx 3{,}28$ см і висота $h\approx 3{,}0$ см.

3. Перетворити у многочлен стандартного вигляду:

1) $(5x^2-3xy+y^2)(2x-y^2)$;

2) $(0{,}2y-x)(x+0{,}2y)+(x-3y)(3y+x)$; 3) $-7(x+9y)(y-3x)$;

4) $(3a-b)(a+3b)-(b+a)(a-b)$; 5) $\left(\frac{2}{3}m+3n\right)\left(6m-\frac{1}{6}n\right)$;

6) $(0{,}1x+y)^2$; 7) $\left(\frac{1}{5}a-\frac{3}{7}b\right)(14a-b)$; 8) $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)^2$;

9) $\left(-\frac{5}{8}-a^3\right)\left(\frac{5}{8}-a^3\right)$; 10) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$.

4. Розкласти многочлен на множники:

1)$a^3b^2-b^4$; 2)$27+x^3$; 3)$12a^7-4a^3b$; 4)$1-8a^3$;
5)$a(x-y)+b(x-y)$; 6)a^3+b^9; 7)$m(3-n)-3n(n-3)$;
8)$8-a^3b^3$; 9)$2x(a-b)-(b-a)$; 10)$125a^3-27b^3$;
11)$a^2+ab-ac-bc$; 12)a^6+1; 13)$3x+3y-ax-ay$;
14)$1{,}1a^3-1{,}1b^3$; 15)$a^2b-ac^2+ab^2-bc^2$; 16)$27x^3-y^3$.

5. Знайти значення виразу:

1) 55^2-45^2; 2)$4a^2+9-12a$, якщо $a=2{,}5$;
3) $3(m-1)^2+(m+2)(m^2-2m+4)-(m+1)^3$, якщо $m=1{,}1$;
4) $\dfrac{4a^2+8ab+4b^2}{2a^2-2b^2}$, якщо $a=6\dfrac{7}{40}, b=-1{,}375$;
5) $a^3-(a-2)(a^2+2a+4)+5a$, якщо $a=0{,}6$;
6) $(x+2)^3-x(3x+1)^2+(2x+1)(4x^2-2x+1)$, якщо $x=2$.

6. Виконати дії:

1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$; 2) $\dfrac{b-c}{a+b}-\dfrac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\dfrac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$;
3) $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1}-\dfrac{2m-1}{2m+1}\right):\dfrac{4m}{10m+5}$;
4) $\dfrac{3}{x+y}-\dfrac{3x-3y}{2x-3y}\left(\dfrac{2x-3y}{x^2-y^2}-2x+3y\right)$.

7. Довести тотожність:

1) $\left(a-\dfrac{a^2+x^2}{a+x}\right)\left(\dfrac{2a}{x}+\dfrac{4a}{a-x}\right)=2a$;
2) $\left(\dfrac{ab+b^2}{5a^2-5ab}+ab+b^2\right)\dfrac{5a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}=5ab$;
3) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right):\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x}{x-y}$;
4) $\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2:\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right)=1$.

8. Вивести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{5x^2}$, де $x\geq 0$; 2) $\sqrt{54a^2}$, де $a<0$; 3) $\sqrt{75b^4}$, де $b>0$;
4) $\sqrt{27c^6}$, де $c<0$ 5) $\sqrt{16m^2n}$, де $m<0$; 6) $\sqrt{9x^2y^3}$, де $x>0$.

9. Ввести множник під знак кореня:

1) $x\sqrt{7}$, де $x\geq 0$; 2) $x\sqrt{7}$, де $x<0$; 3) $b\sqrt[6]{2}$, де $b>0$;
4) $-b\sqrt[4]{3}$, де $b>0$; 5) $-cb\sqrt[3]{-4}$, де $c>0$, $d>0$.

10. Обчислити значення виразів з точністю до 0,01:

1) $\sqrt{50}+2\sqrt{72}+\dfrac{1}{2}\sqrt{8}$; 2) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$;
3) $\sqrt{80}+\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{45}-\sqrt{25}$;

4) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5} - 7,5\cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$;

5) $0,027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} - 3^{-1} + (5,5)^0$.

11. Спростити вираз:

1) $\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; 2) $\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}+x\right)$;

3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2$; 4) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$; 6) $\left(\sqrt{a}+2\right)\left(a-2\sqrt{a}+4\right)$;

7) $\left(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; 8) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

12. Звільнитися від знака кореня в знаменнику:

1) $\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$; 3) $\frac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$; 4) $\frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$.

ТЕМА 15. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

15.1. Числові рівності і нерівності.

Властивості числових рівностей і нерівностей мають як певні аналогії, так і суттєві відмінності. Розглянемо їх.

Числові рівності	**Числові нерівності**
1. Число a називають рівним числу b, якщо різниця $a-b$ дорівнює 0. Позначається: $a=b$.	**1.** Число a називається більшим від числа b, якщо різниця $a-b$ додатна. Позначається: $a>b$. Число a називається меншим від числа b, якщо різниця $a-b$ від'ємна. Позначається: $a<b$.
2. Для будь-якого a співвідношення $a=a$ правильне.	**2.** Для будь-якого a співвідношення $a>a$ і $a<a$ хибні.
3. Для будь-яких a і b, якщо $a=b$, то $b=a$.	**3.** При будь-яких a і b, якщо $a>b$, то $b<a$. І навпаки, якщо $a<b$, то $b>a$.
4. Для будь-яких a, b і c, якщо $a=b$ і $b=c$, то $a=c$ (властивість транзитивності рівностей).	**4.** Для будь-яких a, b і c, якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$; якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$ (властивість транзитивності нерівностей).

5. Якщо $a = b$ і c – будь-яке число, то $a + c = b + c$.	**5.** Якщо $a < b$ і c – будь-яке число, то $a + c < b + c$; якщо $a > b$ і c – будь-яке число, то $a + c > b + c$.
6. Якщо $a = b$ і c – будь-яке число, то $ac = bc$.	**6.** Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$; якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$; якщо $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$; якщо $a > b$ і $c < 0$, то $ac < bc$.
7. Якщо $a = b$ і $c = d$, то $a + c = b + d$.	**7.** Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$; якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.
8. Якщо $a = b$ і $c = d$, то $ac = bd$. *Наслідок: якщо* $a = b$, *то* $a^2 = b^2$.	**8.** Якщо $a < b$ і $c < d$ і a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$; якщо $a > b$ і $c > d$ і a, b, c, d – додатні числа, то $ac > bd$. *Наслідок: якщо* $a < b$ *і* a, b *– додатні числа, то* $a^2 < b^2$*; якщо* $a > b$ *і* a, b *– додатні числа, то* $a^2 > b^2$.
9. Якщо $a = b$ і $a \neq 0,\ b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$.	**9.** Якщо числа a і b з однаковим знаменником і $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; якщо числа a і b з однаковим знаменником і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Означення, властивості числових рівностей і нерівностей використовують під час доведення тотожностей і нерівностей. Нагадаємо три основних способи доведення тотожностей:

1) скласти різницю лівої і правої частин тотожності і перетворенням здобутого виразу показати, що вона дорівнює 0;

2) тотожними перетвореннями лівої частини показати, що ліва частина тотожності дорівнює правій, або навпаки, тотожними перетвореннями правої частини показати, що вона дорівнює лівій;

3) ліву і праву частини тотожності окремо перетворити у той самий вираз.

Приклад 1. Довести тотожність

$$\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} = \frac{b}{a-b} - \frac{b^2-ab}{a^2-b^2}.$$

Доведення:

$$\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{b}{a-b} + \frac{b^2-ab}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2 - 2b(a+b) + 2(b^2 - ab)}{2(a^2 - b^2)} =$$
$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 - 2ab - 2b^2 + 2b^2 - 2ab}{2(a^2 - b^2)} =$$
$$= \frac{0}{2(a^2 - b^2)} = 0.$$

Приклад 2. Довести тотожність
$$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$$
Доведення:
$$(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = \big((a^2 + 1) + a\big)\big((a^2 + 1) - a\big) =$$
$$= (a^2 + 1)^2 - a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = a^4 + a^2 + 1.$$

Приклад 3. Довести тотожність
$$\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : (a - b) = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$
Доведення:
$$\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : (a - b) = \frac{a(a+b) - 4ab + b(a+b)}{a+b} \cdot \frac{1}{a-b} =$$
$$= \frac{a^2 + ab - 4ab + ab + b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)}{(a+b)};$$
$$= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{2ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{a(a-b) + b(a+b) - 2ab}{(a+b)(a-b)} =$$
$$= \frac{a^2 - ab + ab + b^2 - 2ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)}{(a+b)}.$$

Нерівності, складені за допомогою знаків більше (>) або менше (<), називають *строгими нерівностями,* а нерівності, складені за допомогою знаків не більше (≤) або не менше (≥), називають *нестрогими нерівностями.* Одним із способів доведення строгих і нестрогих нерівностей є спосіб, що ґрунтується на означенні нерівностей.

Приклад 4. Довести нерівність $\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

Доведення. Складемо різницю лівої і правої частин даної нерівності і перетворимо її:
$$\frac{c}{c^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2c - c^2 - 1}{2(c^2+1)} = \frac{-(c^2 - 2c + 1)}{2(c^2+1)} = \frac{-(c-1)^2}{2(c^2+1)} \leq 0.$$
Знаменник дробу при будь-якому *c* додатний, а вираз $(c-1)^2$ невід'ємний. Тому чисельник дробу недодатний, а отже, і дріб при будь-якому *c* недодатний. Оскільки доведено, що різниця лівої і правої частин нерівності недодатна, то нерівність $\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}$ виконується при будь-якому c.

15.2. Рівняння. Нерівності зі змінною. Рівняння і системи рівнянь.

Рівність з невідомою, відносно якої треба встановити, при яких її значеннях (можливо, таких значень і не існує) рівність перетворюється у правильну числову, називають *рівнянням.*

Наприклад: $5x - x = 28$; $x^2 - 4 = 0$; $2(x + 3) = 5x - 7$.

Коренем (розв'язком) рівняння з однією невідомою називається значення невідомої, при якому рівняння перетворюється в правильну числову рівність, або, інакше кажучи, при якому невідома задовольняє рівнянню.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені (розв'язки) або довести, що рівняння коренів не має. Рівняння, ліва і права частини якого є раціональними виразами, називається *раціональним.*

Наприклад: $5(x - 1) = 2x + 3$; $\frac{2}{x-5} = \frac{3}{x+5}$.

Якщо ліва і права частини раціонального рівняння – цілі вирази, то рівняння називається *цілим.* Раціональне рівняння, в якому хоча б одна частина є дробовим виразом, називають *дробовим.*

Наприклад, перше з наведених вище рівнянь – ціле, а друге – дробове.

Два рівняння з однією невідомою називаються *рівносильними*, якщо корені першого рівняння є коренями другого і, навпаки, корені другого рівняння є коренями першого.

Рівняння мають такі основні *властивості.*

1. Якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число чи вираз із невідомою, що не втрачає змісту ні при яких значеннях невідомої, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

2. Якщо обидві частини рівняння помножити або розділити на одне й те саме число, що не дорівнює нулю, чи на вираз із невідомою, який не перетворюється в нуль ні при яких значеннях невідомої і не втрачає змісту на множині допустимих значень невідомої для даного рівняння, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

З першої властивості випливає, що можна переносити будь-який член рівняння з однієї його частини в іншу, змінюючи попередньо знак цього члена на протилежний.

Розв'язком рівняння з двома невідомими називається пара значень невідомих, яка перетворює це рівняння в правильну числову рівність.

Наприклад, для рівняння $x - y = 5$ пара (6; 1) є розв'язком.

Якщо треба знайти спільні розв'язки двох рівнянь із двома невідомими, то кажуть, що треба розв'язати *систему двох рівнянь із двома невідомими.*

Наприклад: $\begin{cases} 2x - y = 24, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$.

Розв'язком системи двох рівнянь із двома невідомими називається пара значень невідомих, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну числову рівність.

Наприклад, пара $x = 11$, $y = -2$ або (11; –2) є розв'язком попередньої системи.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що система розв'язків не має.

Дві системи рівнянь називаються *рівносильними,* якщо розв'язки першої системи є розв'язками другої і, навпаки, розв'язки другої системи є розв'язками першої.

При розв'язанні системи рівнянь із двома невідомими використовують спосіб підстановки, спосіб алгебричного додавання і графічний спосіб.

Приклад 5. Розв'язати систему

$$\begin{cases} xy = -6, \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначимо *x* через *y* з другого рівняння і підставимо замість *x* його значення у перше: $x = 7 + y$; $(7 + y)y = -6$; $y^2 + 7y + 6 = 0$. Одержали квадратне рівняння відносно невідомої *y*. Запишемо його розв'язки:

$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$; $y_1 = -6$; $y_2 = -1$.

Визначимо x, підставивши послідовно значення y_1 і y_2 у рівність $x = 7 + y$. Маємо $x_1 = 1$; $x_2 = 6$.

Відповідь: (1; –6) і (6; –1).

Приклад 6. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 40x + 3y = 10, \\ 20x - 7y = 22. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини другого рівняння на –2, а перше залишимо без зміни:

$$\begin{cases} 40x + 3y = 10, \\ -40x + 14y = -44. \end{cases}$$

Додамо ліві і праві частини обох рівнянь. Одержимо рівняння $17y = -34$, яким замінимо одне з рівнянь даної системи:

$$\begin{cases} 17y = -34, \\ 20x - 7y = 22. \end{cases}$$

З першого рівняння здобутої системи знаходимо $y = -2$. Підставивши знайдене значення в друге рівняння, знайдемо $x = \frac{2}{5}$.

Відповідь: $\left(\frac{2}{5}; -2\right)$.

Приклад 7. Розв'язати графічним способом систему

$$\begin{cases} xy = -6, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки рівнянь $xy = -6$; $x + y = 1$. Для цього виразимо в кожному рівнянні невідому *y* через *x*. Одержимо $y = -\frac{6}{x}$, $y = 1 - x$. Побудуємо графіки функцій, що задають ці формули, – гіперболу і пряму (рис. 54).

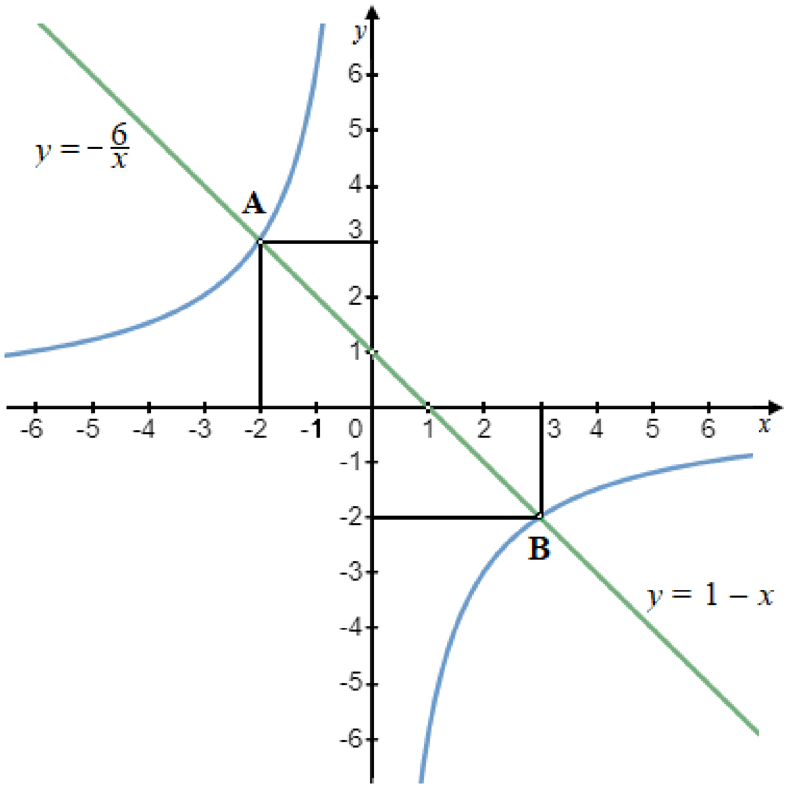


Рис. 54

Координати (–2; 3), (3; –2) точок A і B перетину графіків функцій є розв'язками системи. Отже, система має два розв'язки.

Відповідь: (–2; 3), (3; –2).

15.3. Розв'язування нерівностей і систем нерівностей.

Розв'язком нерівності з однією змінною називається значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.

Наприклад, число 10 є розв'язком нерівності $2x > 5$.

Розв'язати нерівність з однією змінною означає знайти всі її розв'язки або довести, що нерівність розв'язків не має.

Дві нерівності називаються *рівносильними,* якщо розв'язки першої нерівності є розв'язками другої і, навпаки, розв'язки другої нерівності є розв'язками першої.

Областю визначення нерівності з однією змінною називають множину значень змінної, при яких ліва і права частини нерівності не втрачають змісту.

Нерівності з однією змінною мають такі *властивості.*

1. Якщо до обох частин нерівності додати одне й те саме число або вираз зі змінною, що не втрачає змісту в області визначення нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число або вираз зі змінною з області визначення нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число або вираз зі змінною, що набуває від'ємних значень при всіх

значеннях змінної з області визначення нерівності, і змінити при цьому знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Способи розв'язання основних видів рівнянь і нерівностей мають певну аналогію.

Рівняння з однією невідомою	**Нерівності з однією невідомою**
1. *Лінійним рівнянням з однією невідомою* називається рівняння виду $$ax = b$$ де x – невідома, a і b – числа. Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$, рівняння має один корінь. Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то множиною коренів рівняння є множина всіх чисел. Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння не має коренів, тобто множина коренів – порожня множина.	**1.** *Лінійною нерівністю з однією змінною* називається нерівність виду $ax < b$ або $ax > b$ (відповідно $ax \leq b$ або $ax \geq b$), де x – змінна, a і b – числа. Якщо $a \neq 0$, то множиною розв'язків нерівності $ax < b$ є або множина $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$, або множина $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$. Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $ax < b$ є або множина всіх чисел (коли $b \geq 0$), або порожня множина (коли $b < 0$). Якщо $a \neq 0$, то множиною розв'язків нерівності $ax > b$ є або множина $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$, або множина $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$. Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $ax > b$ є або порожня множина (коли $b > 0$), або множина всіх чисел (коли $b \leq 0$).
2. *Квадратним рівнянням з однією невідомою* називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – невідома, a, b, c – числа, причому $a \neq 0$.	**2.** *Квадратною нерівністю з однією змінною* називається нерівність виду $ax^2 + bx + c < 0$, або $ax^2 + bx + c > 0$ (відповідно $ax^2 + bx + c \leq 0$, або $ax^2 + bx + c = 0$), де x – змінна, a, b, c – числа, причому $a \neq 0$.
3. Якщо у квадратному рівнянні хоча б одне з чисел b чи c або b і c одночасно дорівнюють нулю, то таке рівняння називається *неповним квадратним*	**3.** Якщо у квадратній нерівності хоча б одне з чисел b чи c або b і c одночасно дорівнюють нулю, то одержимо *неповну квадратну*

рівнянням. У разі, коли $c = 0$, одержимо неповне квадратне рівняння $ax^2 + bx = 0$. Його розв'язують способом розкладання лівої частини рівняння на множники: $x(ax + b) = 0$. Звідси $x = 0$; $ax + b = 0$, $x = -\frac{b}{a}$. Рівняння має два корені $x = 0$ і $x = -\frac{b}{a}$. У разі, коли $b = 0$, одержимо квадратне рівняння $ax^2 + c = 0$, яке розв'язують так: $ax^2 = -c$; $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то добуваємо арифметичний квадратний корінь з двох частин рівняння: $\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Отже, $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $-x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Рівняння має два корені $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то $x^2 = -\frac{c}{a}$ не має розв'язків, а тому й рівняння $ax^2 + c = 0$ не має коренів.

нерівність. У разі, коли $c = 0$, маємо $ax^2 + bx > 0$. (або $ax^2 + bx < 0.$). Її розв'язують способом розкладання лівої частини нерівності на множники: $x(ax + b) > 0$. Далі використовують твердження: *добуток двох співмножників додатний тоді і тільки тоді, коли обидва співмножники мають однакові знаки.* Отже, можна скласти дві системи нерівностей:

а) $\begin{cases} x > 0, \\ ax + b > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x < 0, \\ ax + b < 0, \end{cases}$

які розв'язують відомим способом.

Аналогічно розв'язують нерівність $ax^2 + bx + c < 0$. У разі, коли $b = 0$, одержимо нерівність $ax^2 + c > 0$, (або $ax^2 + c < 0$), яку можна розв'язати так. При $a > 0$ маємо $ax^2 > -c$, $x^2 > -\frac{c}{a}$.

Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $\sqrt{x^2} > \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $|x| > \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $x > \sqrt{-\frac{c}{a}}$ або $-x > \sqrt{-\frac{c}{a}}$, тоді $x < -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Отже, множиною розв'язків нерівності $ax^2 + c > 0$ є два числових проміжки: $\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ або $\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}; +\infty\right)$.

Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то нерівність $ax^2 + c > 0$ не має розв'язків. При $a < 0$, маємо $x^2 < -\frac{c}{a}$.

Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $|x| < \sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідси $-\sqrt{-\frac{c}{a}} < x < \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то нерівність $x^2 < -\frac{c}{a}$ не має розв'язків, тому і дана нерівність $ax^2 + c > 0$ не має розв'язків.

4. Вираз $$D = b^2 - 4ac$$ називається *дискримінантом* квадратного рівняння $$ax^2 + bx + c = 0,$$ де $a \neq 0$.	**4.** Щоб розв'язати квадратну нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ (або $ax^2 + bx + c < 0$), де $a \neq 0$, її подають у вигляді $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0,$$ якщо $a > 0$, або $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0,$$ якщо $a < 0$. Знаходять корені відповідного квадратного рівняння $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$ Якщо тричлен має два різних корені x_1 і x_2 , то за теоремою Вієта розкладають тричлен на множники, подаючи дану нерівність у вигляді $$(x - x_1)(x - x_2) > 0$$ або $$(x - x_1)(x - x_2) < 0,$$ і розв'язують її або способом складання двох систем лінійних нерівностей $$\begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 > 0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 < 0, \end{cases}$$ або методом інтервалів. Якщо квадратний тричлен не має коренів, то, виділивши квадрат двочлена, подають його у вигляді $$a(x - m)^2 + n > 0,$$ де $m = -\dfrac{b}{2a}$, $\quad n = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Залежно від знака *a* і *n* роблять висновок про множину розв'язків нерівностей.
Квадратне рівняння будь-якого виду можна розв'язати графічно, побудувавши графік квадратного тричлена – параболу. У разі, коли *D* > 0, парабола перетне вісь *Ox* у двох точках, абсциси яких і будуть коренями даного квадратного	Квадратну нерівність зручно розв'язувати графічно, побудувавши графік квадратного тричлена, тобто графік функції $y = ax^2 + bx + c$. За графіком встановлюють, при яких значеннях x значення функції перетворюються в нуль, в яких

рівняння. Якщо $D = 0$, парабола дотикається до осі *Ox*. Абсциса точки дотику – корінь квадратного рівняння.	проміжках вони додатні, а в яких від'ємні. Ці проміжки і будуть множинами розв'язків відповідних нерівностей $ax^2 + bx + c > 0$ та $ax^2 + bx + c < 0$.
5. Щоб розв'язати дробово-раціональне рівняння, треба: 1) перенести всі члени рівняння у ліву частину, тобто подати рівняння у вигляді $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$ 2) скористатися твердженням, що *дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює, нулю, а знаменник не дорівнює нулю,* тобто зрівняти з нулем чисельник і розв'язати здобуте рівняння $f(x) = 0$. Зі знайдених розв'язків виключити ті, що перетворюють знаменник у нуль. Можна також подати дробово-раціональне рівняння у вигляді $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{q(x)}{\varphi(x)}$$ і скористатися умовою рівності двох дробів з однаковими знаменниками, тобто зрівняти чисельники і розв'язати здобуте ціле раціональне рівняння $f(x) = q(x)$. Зі знайдених розв'язків включають ті, які перетворюють знаменник у нуль. Можна нарешті записати дробове рівняння у вигляді $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{q(x)}{\psi(x)}$$ і, скориставшись властивістю пропорції, скласти рівняння $f(x)\psi(x) = \varphi(x)q(x)$. Розв'язавши це рівняння, треба виключити ті корені, які перетворюють у нуль хоча б один із знаменників $\varphi(x)$ чи $\psi(x)$.	**5.** При розв'язуванні дробових нерівностей не можна у загальному випадку заміняти її цілою нерівністю шляхом множення обох частин нерівності на спільний знаменник дробів, що входять до неї. Справді, спільний знаменник при певних значеннях змінної може набувати від'ємних значень, і тоді при множенні знак нерівності треба змінювати на протилежний. Тому можна використати такий спосіб: 1) перенести всі члени нерівності в ліву частину, тобто подати нерівність у вигляді $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0 \text{ або } \frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0;$$ 2) скористатися твердженням, що *дріб додатний тоді і тільки тоді, коли чисельник і знаменник мають однакові знаки:* $$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) < 0, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases}$$ 3) розв'язати здобуті системи; 4) об'єднати їх розв'язки, що дасть множину розв'язків даної нерівності. Можна також після запису нерівності у вигляді $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ помножити обидві її частини на $\varphi^2(x) > 0$, змінивши цим самим дробову нерівність на рівносильну цілу $f(x)\varphi(x) > 0$. Для розв'язання нерівностей виду $0 < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$ або $0 < f(x)\varphi(x) < 0$ можна скористатися також методом інтервалів.

Приклад 8. Розв’язати рівняння

$$\frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^3 + 1}.$$

Розв’язання: Помножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Одержимо

$$2(x + 1) = x^2 - x + 1 + 2x - 1.$$

Звідси

$$x^2 - x - 2 = 0;\ \ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2};\ \ x_1 = -1;\ \ x_2 = 2.$$

Якщо $x = -1$, спільний знаменник дробів перетворюється в нуль, тому цей корінь треба виключити. Якщо $x = 2$, спільний знаменник дробів не перетворюється в нуль. Тому $x = 2$, є коренем рівняння.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 9. Розв’язати нерівність

$$\frac{x^2 + x - 9}{x} < 1.$$

Розв’язання:

$$\frac{x^2 + x - 9}{x} - 1 < 0, \qquad \frac{x^2 + x - 9 - x}{x} < 0, \qquad \frac{x^2 - 9}{x} < 0.$$

Звідси

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 9 > 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - 9 < 0, \\ x > 0; \end{cases}.$$

Розв’яжемо графічно нерівність $x^2 - 9 > 0$. Побудуємо графік функції $y = x^2 - 9$ (рис. 55), звідки видно, що множиною розв’язків нерівності $x^2 - 9 > 0$ є об’єднання двох проміжків $(-\infty; -3)\ \ (3; +\infty)$.

Множиною розв’язків системи а) є спільна частина множин розв’язків першої і другої нерівностей, тобто проміжок $(-\infty; -3)$.

З того ж графіка випливає, що множиною розв’язків нерівності $x^2 - 9 < 0$ є проміжок $(-3; 3)$, а множиною розв’язків системи б) – спільна частина множин розв’язків обох нерівностей, тобто проміжок $(0; 3)$ (рис. 56).

Отже, множиною розв’язків даної нерівності є об’єднання множин розв’язків систем а) і б), тобто множина $(-\infty; 3)$ або $(0; 3)$.

Відповідь: $(-\infty; 3)$ або $(0; 3)$.

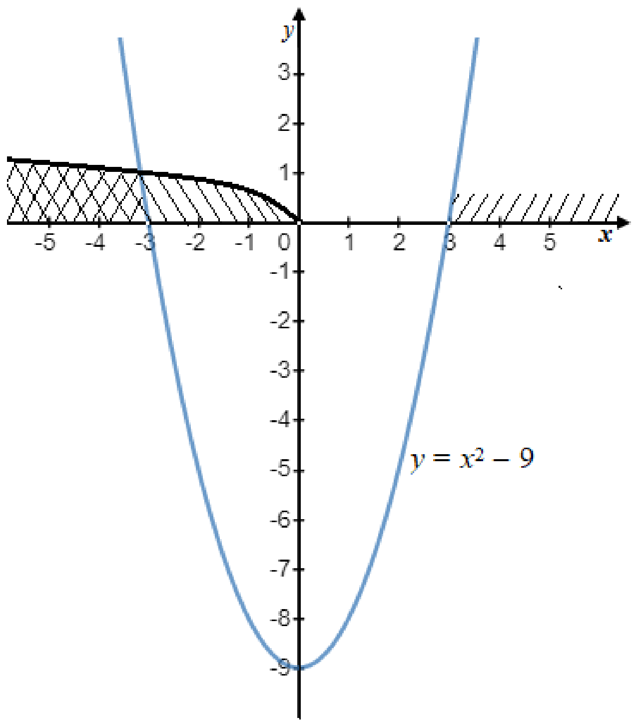


Рис. 55

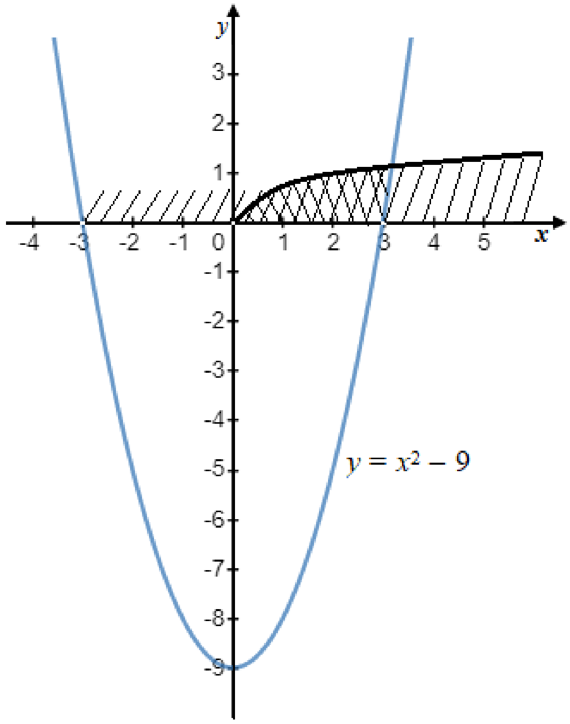


Рис. 56

Якщо треба знайти спільні розв’язки двох або кількох нерівностей, то це означає, що треба розв’язати *систему нерівностей.*

Розв’язком системи нерівностей з однією змінною називається значення змінної, при якому кожна нерівність системи перетворюється у правильну числову нерівність.

Розв’язати систему нерівностей – означає знайти всі її розв’язки або довести, що система розв’язків не має.

Дві чи кілька нерівностей з однією змінною утворюють *сукупність*, якщо поставити завдання знайти всі такі значення змінної, кожне з яких є розв’язком хоча б однієї з даних нерівностей.

Кожне значення змінної, при якому хоча б одна з нерівностей сукупності перетворюється у правильну числову нерівність, називається *розв‘язком сукупності нерівностей.*

Систему двох нерівностей з однією змінною записують за допомогою фігурної дужки.

Наприклад: $\begin{cases}2x-3>13,\\ 2-x<6x-8.\end{cases}$

Для запису сукупності нерівностей використовують квадратні дужки.

Наприклад: $\left[\begin{array}{l}2x-3>13,\\ 2-x<6x-8.\end{array}\right.$

При розв’язанні систем і сукупностей нерівностей з однією змінною зручно використовувати графічну ілюстрацію на координатній прямій.

Приклад 10. Розв’язати систему нерівностей

$$\begin{cases}2x+3<12+5x,\\ 2-x<12-6x.\end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо обидві нерівності окремо. З першої нерівності одержимо рівносильну нерівність $3x > -9$, звідки $x > -3$. З другої нерівності маємо $5x < 10$, звідки $x < 2$. Отже, дану систему замінимо рівносильною

$$\begin{cases} x > -3, \\ x < 2. \end{cases}$$

Зобразимо на координатній прямій множини розв'язків кожної нерівності здобутої системи і позначимо їх штриховкою різного нахилу. Множина розв'язків утвориться внаслідок перетину штриховок різного нахилу (рис. 57).

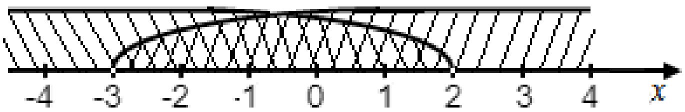


Рис. 57

Відповідь: $(-3; 2)$.

Приклад 11. Розв'язати сукупність нерівностей

$$\left[\begin{aligned} &2x + 7 > 5x - 2, \\ &5x - 2 < 20 - 6x. \end{aligned}\right.$$

Розв'язання. Розв'язавши кожну нерівність окремо відносно x, одержимо сукупність

$$\left[\begin{aligned} &3x < 9, \\ &11x < 22, \end{aligned}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{aligned} &x < 3, \\ &x < 2. \end{aligned}\right.$$

Множиною розв'язків останньої, а отже, і даної сукупності, є інтервал $(-\infty; 2)$ (рис. 58).

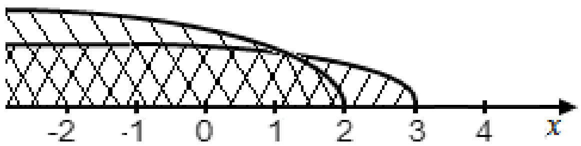


Рис. 58

Відповідь: $(-\infty; 2)$.

15.4. Метод інтервалів.

Розглянемо метод інтервалів на прикладі розв'язування нерівності

$$\frac{x^2 + x - 20}{x^2 + x - 6} \le 0.$$

Ліва частина нерівності – раціональний дріб, який задає функцію

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^2 + x - 6}.$$

Після розкладання чисельника і знаменника на множники маємо

$$f(x) = \frac{(x + 5)(x - 4)}{(x + 3)(x - 2)}.$$

Ця функція перетвориться в нуль при $x = -5$, $x = 4$, і не визначена при $x = -3$, $x = 2$. Розмістимо ці чотири числа на координатній прямій (рис. 59). Вони розіб'ють її на п'ять інтервалів (звідси назва «метод інтервалів»):

$(-\infty; -5)$, $(-5; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; 4)$ і $(4; +\infty)$. При $x > 4$, тобто на інтервалі $(4; +\infty)$, усі чотири множники чисельника і знаменника додатні, тому й функція

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-4)}{(x+3)(x-2)}$$

додатна. Рухаючись уздовж координатної прямої справа наліво, помічаємо (це легко перевірити, обчисливши значення функції при довільному x з кожного інтервалу), що в кожній з чотирьох точок змінює знак лише один із чотирьох множників, тому змінює знак і значення функції, тобто ліва частина нерівності. На кожному з чотирьох інтервалів функція зберігає знак, тобто є знакосталою.

Зміну знаків функції зручно проілюструвати за допомогою хвилястої кривої (див. рис. 59), яку креслять справа наліво, починаючи зверху від координатної прямої. На тих інтервалах, де крива розміщена над координатною прямою, $f(x) > 0$, а там, де під прямою, $f(x) < 0$. Побудовану криву називають *кривою знаків.*

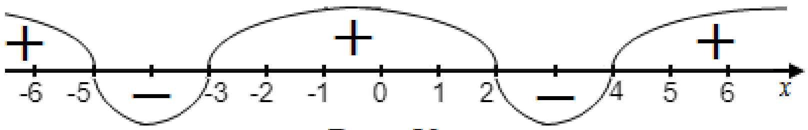


Рис. 59

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання двох множин $[-5; -3)$ і $(2; 4]$. Оскільки дана нерівність нестрога, то точки –5 і 4 (нулі функції) включаємо до множини розв'язків.

Відповідь. $[-5; -3)$ або $(2; 4]$.

Метод інтервалів використовують і при розв'язуванні рівнянь, які містять невідоме під знаком модуля.

Приклад 12. Розв'язати рівняння

$$|5 - 2x| + |x + 3| = 2 - 3x.$$

Розв'язання. Дане рівняння містить два вирази з невідомим під знаком модуля. Ідея розв'язання рівняння з модулем, як і нерівності з модулем, полягає в тому, щоб звільнитися від них і перейти до рівняння, яке не містить модуля і розв'язується вже відомим способом.

Вирази з модулями, які входять у дане рівняння, перетворюються в нуль відповідно у разі, коли $x = \frac{5}{2}$ і $x = -3$. Точки $A(-3)$ і $B\left(\frac{5}{2}\right)$ розбивають координатну пряму на три інтервали: $(-\infty; -3)$, $\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ і $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ (рис. 60). Перетворимо вирази з модулями на кожному з трьох інтервалів, починаючи з лівого $(-\infty; -3)$.

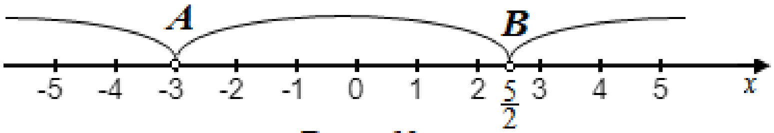


Рис. 60

1. При $x < -3$ маємо $|5 - 2x| = 5 - 2x$; $|x + 3| = -x - 3$. Після підстановки в дане рівняння значення модулів рівняння набере вигляду

$5-2x-x-3=2-3x$ або $2=2$. Це означає, що будь-яке значення x із проміжку $(-\infty;-3)$ є розв'язком даного рівняння.

2. При $-3\leq x\leq\frac{5}{2}$ маємо $|5-2x|=5-2x$; $|x+3|=x+3$. Після підстановки в дане рівняння значення модулів рівняння набирає вигляду $5-2x+x+3=2-3x$. Звідси $2x=-6$, $x=-3$. На цьому відрізку рівняння має єдиний корінь $x=-3$.

3. При $x>\frac{5}{2}$ маємо $|5-2x|=-5+2x$; $|x+3|=x+3$. Після підстановки в дане рівняння значення модулів рівняння набирає вигляду $-5+2x+x+3=2-3x$. Звідси $6x=4$, $x=\frac{2}{3}$. Але $x=\frac{2}{3}$ не належить розглядуваному інтервалу. Це означає, що на інтервалі $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$ рівняння не має коренів.

Відповідь. Множиною розв'язків даного рівняння є множина $(-\infty;-3]$.

Вправи.

1. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{1}{5}x=3$; 2) $x^2+3=0$; 3) $5x+4=0$; 4) $2x^2+5x-3=0$;
5) $9x-2(x-3{,}5)=2x-1{,}5$; 6) $4x^2-4x+1=0$; 7) $\frac{x-1}{5}-\frac{2x}{3}=3$;
8) $x^2-7x=6-2x$; 9) $\frac{x^2-16}{x+2}=0$; 10) $\frac{y^2}{y+5}=\frac{y}{y+5}$;
11) $\frac{kx}{k-1}-\frac{3x+2}{k+1}=\frac{1}{k-1}$; 12) $8x^2+2ax-3a^2=0$;
13) $3(y+1)-\frac{10-y}{2}=\frac{4y+11}{5}+12$; 14) $x^2+5|x|+6=0$;
15) $\frac{0{,}01-x}{0{,}02}-2\frac{1}{2}=\frac{2-3x}{0{,}01}$; 16) $1{,}3x-2-(3{,}3+5)=2x+1$;
17) $1+\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x^2-1}=\frac{3}{x+1}$; 18) $(x-a)^2+(x-b)^2=a^2+b^2$;
19) $\frac{x+2}{3x+1}+\frac{8x^2+3}{1-9x^2}=\frac{x+0{,}5}{9x+3}$; 20) $\frac{30}{y^2-1}-\frac{13}{y^2+y+1}=\frac{7+18y}{y^3-1}$.

2. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases}x+y=6,\\3x-5y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2-y=18,\\x+2y=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+2y=34{,}5,\\2x-y=12{,}5;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+y^2=34,\\x-y=2;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x+y=12,\\xy=35;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x+y^2=16,\\x+5y=10;\end{cases}$

7) $\begin{cases}x^2-y=14,\\3x+y=4;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x^2+y^2=41,\\y-x=1;\end{cases}$ 9) $\begin{cases}x+y=120,\\x^2+y^2=10400.\end{cases}$

3. Розв'язати нерівності:

1) $0{,}4x\geq 2$; 2) $(x-11)(x-3)<0$; 3) $4x-7>0$;
4) $x^2-2x-3>0$; 5) $3-2x<12-5x$; 6) $9x^2-25>0$;

7) $2x-3<7(1+x)$; 8) $2x^2-3x-2>0$; 9) $5-4x\le 0$;

10) $x(x-4)(x+4)<0$; 11) $\dfrac{x+2}{x-5}<0$; 12) $\dfrac{2x-1}{x+2}\le 0$;

13) $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{3}{5}<4x-3$; 14) $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+21>0$;

15) $(x-1)^2+7>(x+4)^2$; 16) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x}{3}>\dfrac{3x-10}{4}$;

17) $x^2+|x|-2\ge 0$; 18) $-\dfrac{1}{3}x^2+x+\dfrac{4}{3}\ge 0$;

19) $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}\ge 2$; 20) $\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}\le 5$.

4. Розв’язати системи нерівностей:

1) $\begin{cases}2(3x-1)<3(4x+1)+16,\\ 4(2+x)<3x+8;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x>3-\dfrac{13x-2}{11},\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+4}{3}\le\dfrac{x-1}{4}-2,\\ 1{,}5x-2x5\le x.\end{cases}$

ТЕМА 16. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАГІЧНИХ РІВНЯНЬ

16.1. Основні означення

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_nb_m,\end{cases}\qquad(1)$$

де a_{ik}, i = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., n – відомі коефіцієнти;

b_i, i – 1, 2, ..., m – праві частини (або вільні члени), також відомі;

$x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі, які підлягають визначенню.

Розв’язком *системи* (1) називається набір чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, які при підстановці в кожне рівняння перетворюють його в тотожність.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система називається *несумісною*, якщо вона розв’язків не має.

Дві системи називаються *еквівалентними* (або рівносильними), якщо вони обидві несумісні або мають однакові розв’язки.

Коефіцієнти при невідомих в системі (1) можна записати у вигляді таблиці

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Вона має m рядків та n стовпців і називається *матриця*. Позначають матрицю великими літерами, а її елементи – малими з двома індексами. Перший вказує на номер рядка, а другий – номер стовпця.

Приклад

Елемент a_{34} стоїть у третьому рядку і четвертому стовпці матриці A.

Якщо потрібно зауважити, що матриця A має m рядків і n стовпців , то записують $\underset{(m\times n)}{A}$.

У випадку, коли $m = n$, тобто коли кількість рядків дорівнює кількості стовпців, матриця називається *квадратною*.

Отже, матриця n-го порядку – це матриця, що має n рядків та n стовпців.

16.2. Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Формули Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \qquad (3)$$

(коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} і вільні члени b_1 і b_2 вважаються заданими). Коефіцієнти при невідомих позначимо тією самою буквою a з двома індексами, де перший відповідатиме номеру рівняння, а другий – номеру невідомого. Так, a_{12} – це коефіцієнт при другому невідомому в першому рівнянні і т. д.

Нагадаємо, що пару чисел x_0, y_0 називають розв'язком системи (3), якщо внаслідок підстановки цих чисел замість x і y в систему (3) обидва рівняння (3) перетворюються на тотожності.

Помножимо перше рівняння системи (3) на $a_{22} \neq 0$, а друге – на $a_{12} \neq 0$ і додамо знайдені рівняння. Матимемо

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad (4)$$

Аналогічно помножимо перше рівняння системи (3) на – $a_{21} \neq 0$, а друге – на $a_{11} \neq 0$ і додамо їх. Дістанемо

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \qquad (5)$$

Вираз $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ запишемо у вигляді таблички, яку називають визначником (детермінантом):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Це визначник другого порядку. Він складається з чотирьох елементів a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, розміщених у двох рядках і двох стовпцях, і є різницею добутків елементів, які знаходяться по діагоналі, що йде з лівого верхнього кута в правий нижній кут (перша діагональ), і добутку елементів, що знаходяться на другій діагоналі.

Рівняння (4) і (5) мають ще дві різниці добутків $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ і $b_2a_{11}-b_1a_{21}$, які також можна подати у вигляді визначників

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-b_2a_{12};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

Тоді рівняння (4) і (5) матимуть вигляд

$$x \cdot \Delta = \Delta_x, \quad y \cdot \Delta = \Delta_y, \tag{7}$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів при невідомих системи (3), називають визначником системи. Зазначимо, що визначники Δ_x і Δ_y утворюються з визначника Δ відповідно заміною першого і другого стовпців вільними членами.

Система (5) є наслідком заданої системи (3) і тому розв'язок системи (7), якщо він існує, є розв'язком і системи (3).

При розв'язуванні системи (7) можуть бути такі три випадки:

1) $\Delta \neq 0$. Тоді система (7) має один розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \tag{8}$$

який є розв'язком системи (3). У цьому неважко впевнитися, підставивши значення *x* і *y*, знайдені за формулами (8), у систему (3). Кожне рівняння системи (3) перетвориться в тотожність. Формули (7) називають формулами Крамера.

2) $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$. Тоді система (7) розв'язку немає, отже, і система (3) розв'язку не має, тобто система (3) несумісна.

3) $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$. Система (3) зводиться до одного з рівнянь цієї системи і має безліч розв'язків. Справді,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = 0,$$

звідки

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}, \text{ або } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}; \tag{9}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-b_2a_{12} = 0;$$

$$b_1a_{22} = b_2a_{12}, \text{ або } \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}}; \tag{10}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11}-b_1a_{21} = 0;$$

$$b_2a_{11} = b_1a_{21}, \text{ або } \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{11}}{a_{21}}. \tag{11}$$

З відношень (9) – (11) маємо

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (12)$$

Виразимо звідси a_{21}, a_{22}, b_2 через a_{11}, a_{12}, b_1. Для цього кожне з відношень (12) позначимо через $\frac{1}{t}$, тобто $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{1}{t}$; $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{1}{t}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{t}$. Матимемо

$$a_{21} = ta_{11}; \quad a_{22} = ta_{12}; \quad b_2 = tb_1.$$

Підставимо ці значення коефіцієнтів у друге рівняння системи (3). Дістанемо

$$ta_{11}x + ta_{12}y = tb_1.$$

Скоротивши на t, матимемо перше рівняння системи (3):

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1.$$

Це рівняння невизначене, тобто має безліч розв'язків. Отже, система (3) невизначена і має безліч розв'язків.

Основні властивості визначника

Властивість 1. *Величина визначника не зміниться, якщо його рядки зробити стовпцями, а стовпці – рядками, не змінюючи нумерації їх.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отже, $\Delta = \Delta'$'.

Властивість 2. *Якщо помножити всі елементи деякого стовпця (або рядка) на те саме число k, то значення визначника також помножиться на те саме число k.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k \cdot \Delta.$$

Властивість 3. *Якщо у визначнику поміняти місцями рядки (або стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\Delta.$$

Властивість 4. *Якщо елементи двох рядків (або стовпців) однакові, то визначник дорівнює нулю.*

Доведення.

Переставимо ці рядки місцями. Тоді $\Delta' = -\Delta$, але $\Delta' = \Delta$ (переставлені рядки однакові). Отже, $\Delta = -\Delta,\ 2\cdot\Delta = 0,\ \Delta = 0$.

Наслідок. *Якщо у визначнику елементи двох рядків (або стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.*

Властивість 5. *Величина визначника не змінюється, якщо до елементів одного рядка (або стовпця) додати елементи другого рядка (або стовпця), помножені на те саме число.*

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ka_{21})a_{22} - (a_{12} + ka_{22})a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{21}a_{22} = \Delta.$$

16.2. Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Формули Крамера

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{13}$$

(коефіцієнти $a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{21},\ a_{22}, a_{23},\ a_{31},\ a_{32}, a_{33}$ і вільні члени $b_1,\ b_2$ і b_3 вважаються заданими). Коефіцієнти при невідомих *x*, *y*, *z* позначатимемо однією буквою *a* з двома індексами, де перший відповідає номеру рівняння, а другий – номеру невідомого.

Нагадаємо, що трійку чисел $x_0,\ y_0,\ z_0$ називають розв'язком системи (13), якщо внаслідок підстановки цих чисел замість *x*, *y*, *z* в систему (13) кожне з трьох рівнянь системи перетворюється в тотожність.

Систему (13) розв'яжемо способом додавання. Для цього помножимо обидві частини кожного рівняння відповідно на такі вирази:

$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \neq 0,\ -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} \neq 0,\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \neq 0.$

Потім додамо ці рівняння і згрупуємо члени з *x*, *y* і *z*. Дістанемо

$$\begin{gathered}(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ a_{13}a_{22}a_{31})x + (a_{12}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{32} + \\ +a_{12}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{32})y + (a_{13}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{23}a_{33} + \\ +a_{13}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{33})z = b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - \\ -a_{12}b_2a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}b_3 - b_3a_{22}a_{13}.\end{gathered} \tag{14}$$

Коефіцієнти при *y* і *z* дорівнюють нулю. Запишемо вираз, що стоїть при *x* у вигляді таблички, яку називають визначником (детермінантом) третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Визначник третього порядку складається з $3^2 = 9$ елементів. Обчислювати визначник третього порядку можна за правилом, поданим на схемі

Визначники третього порядку мають ті самі основні властивості 1 – 5, що й визначники другого порядку. Розглянемо ще дві властивості, які використовують для обчислення визначників *n*-го ($n \geq 3$) порядку і при розв'язанні систем *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

Мінором M_{ij} *елемента* a_{ij} (i, j = 1, 2, 3) *визначника третього порядку* Δ *називають визначник другого порядку, який утворюється з* Δ *в результаті викреслення рядка і стовпця, що містять* a_{ij}.

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Згідно з означенням, мінором M_{ij} елемента a_{ij} (наприклад, мінором елемента a_{32}) є визначник $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$. Його можна дістати, викресливши у визначнику Δ третій рядок і другий стовпець.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника третього порядку називають його мінор* M_{ij}*, взятий зі знаком* $(-1)^{i+1}$.

Властивість 6. *Кожний визначник третього порядку можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Доведення. Доведемо цю властивість для суми добутків елементів другого стовпця на їхні алгебраїчні доповнення. Нехай дано визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Згрупуємо члени з елементами другого стовпця:

$$\Delta = a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) =$$

$$= a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right).$$

Маємо

$$-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22}; \qquad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{32}.$$

Тоді

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Аналогічно доводять властивість суми добутків елементів інших рядків (стовпців) на їхні алгебраїчні доповнення.

Властивість 7. *Сума добутків елементів довільного рядка (або стовпця) визначника третього порядку на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (або стовпця) дорівнює нулю.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли елементи, наприклад першого стовпця, помножені на алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого стовпця, тобто коли матимемо суму

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32}.$$

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Знайдемо A_{12}; A_{22}; A_{32}:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}.$$

Підставивши ці значення у задану суму, дістанемо

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = a_{11}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) +$$
$$+a_{21}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{31}(-a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}) = -a_{11}a_{21}a_{33} +$$
$$+a_{11}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} = 0,$$

що й треба було довести.

Властивості 6 і 7 ми вже використовували, коли підбирали вирази, на які треба помножити рівняння системи (13), щоб після додавання зникли відразу два невідомих. У першому випадку помножили рівняння на алгебраїчні доповнення елементів першого стовпця визначника Δ, у другому і в третьому – на алгебраїчні доповнення елементів відповідно другого і третього стовпців визначника Δ. Користуючись властивостями визначників, можна обчислювати визначники, не застосовуючи схему.

Приклад

Обчислити визначник, користуючись його властивостями,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

І спосіб. Застосуємо властивість 6. Подамо Δ у вигляді суми добутків елементів першого рядка на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

У даному разі $a_{11} = 1,\ a_{12} = 3,\ a_{13} = -2$,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5.$$

Отже,

$$\Delta = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -3 - 3 - 10 = -16.$$

ІІ спосіб. Застосуємо спочатку властивість 2. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (або стовпця) додати елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на сталі числа. Додамо до елементів другого третього стовпців елементи першого стовпця, помножені відповідно на –3 і на 2. Матимемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (3-3) & (-2+2) \\ 2 & (-1-6) & (1+4) \\ 3 & 1-9 & (2+6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 \\ 3 & -8 & 8 \end{vmatrix}.$$

Тепер застосуємо властивість 6:

$$\Delta = a'_{11}A'_{11} + a'_{12}A'_{12} + a'_{13}A'_{13}.$$

У даному разі $a'_{12} = a'_{13} = 0$, $a'_{11} = 1$. Отже, $\Delta = 1 \cdot A'_{11}$ (штрихами позначено елементи визначника Δ і їхні алгебраїчні доповнення після перетворення).

$$A'_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 48 = -16.$$

Тоді $\Delta = 1 \cdot (-16) = -16$.

Вираз, що становить праву частину рівності (14), відрізняється від визначника Δ тим, що елементи першого стовпця Δ, які є коефіцієнтами при x, замінено відповідно вільними членами b_1, b_2, b_3. Позначимо цей вираз через Δ_x. Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Після введення таких позначень рівняння (14) можна записати у вигляді

$$x \cdot \Delta = \Delta_x, \qquad (15)$$

Аналогічно, помноживши обидві частини кожного рівняння системи (11) відповідно на вирази $-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31} \neq 0$, $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \neq 0$, $-a_{21}a_{23} + a_{21}a_{13} \neq 0$ і додавши рівняння, після деяких перетворень дістанемо

$$y \cdot \Delta = \Delta_y, \qquad (16)$$

де Δ_y – визначник, утворений з визначника Δ заміною коефіцієнтів при y вільними членами.

Якщо обидві частини кожного рівняння системи (13) помножимо відповідно на вирази $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \neq 0$, $-a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} \neq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ і додамо всі три рівняння, то матимемо:

$$z \cdot \Delta = \Delta_z, \tag{17}$$

де Δ_z – визначник, утворений з визначника Δ заміною коефіцієнтів при z вільними членами.

Отже, дістанемо систему

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y; \\ z \cdot \Delta = \Delta_z, \end{cases} \tag{18}$$

яка є наслідком системи (13). Таким чином, розв'язок системи (18), якщо він існує, є розв'язком системи (13).

При розв'язуванні системи (18) можуть бути такі випадки:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то з рівнянь системи (18) невідомі x, y, z визначаються однозначно, тобто

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{19}$$

Це і є розв'язок системи (13). Формули (19) називають формулами Крамера, а Δ – визначником системи.

За формулами Крамера можна розв'язати систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими лише тоді, коли визначник системи не дорівнює нулю.

2. Якщо $\Delta = 0$, а Δ_x, Δ_y, Δ_z не дорівнюють нулю, то система (13) розв'язку не має.

3. Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$, то система має безліч розв'язків..

Приклад

Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + 2y = 1, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи Δ і визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2 - 1 = -4;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 1 = 4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 1 = -4;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 1 - 2 = -8.$$

За формулами (16) маємо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{-4} = -1;\;\; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1;\;\; = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

16.3. Визначники вищих порядків

Визначником n - го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають суму всіх можливих добутків його елементів, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Знаки цих добутків визначаються за таким правилом: якщо елементи в кожному добутку розміщено так, що перші індекси йдуть у порядку зростання, а другі утворюють якусь перестановку з *n* чисел, то при парному числі інверсій у перестановці других індексів добуток беруть із знаком плюс, а при непарному числі інверсій – із знаком мінус.

Наприклад, у детермінанті п'ятого порядку один з добутків елементів є $a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$- Як бачимо, перші індекси йдуть у порядку зростання, а другі утворюють перестановку 2, 3, 5, 1, 4.

Інверсією називають таке розміщення двох чисел у перестановці, коли більше число стоїть зліва від меншого.

Для того щоб визначити число інверсій у перестановці, треба підрахувати, скільки чисел, більших за одиницю, утворюють інверсію з 1, з 2 і т. д. і взяти їхню суму. В розглядуваному прикладі число інверсій у перестановці таке:

$$3 + 0 + 0 + 1 = 4.$$

Отже, заданий добуток треба брати із знаком плюс.

Можна довести, що для визначників *n-го* порядку виконуються властивості, аналогічні властивостям 1 – 7, які дістали для визначників 2-го і 3-го порядків. Користуючись цими властивостями, зручно обчислювати визначники *n-го* порядку.

Приклад.

Обчислити визначник 4-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 5 & -3 \\ 6 & -9 & 12 & 6 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. У цьому визначнику елементи другого рядка мають спільний множник 2, а елементи четвертого рядка – спільний множник 3. Винесемо ці множники за знак визначника:

$$\Delta = 2\cdot 3\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ 7 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

У першому рядку зробимо всі елементи, крім останнього, нулями. Для цього до першого стовпця додамо четвертий, помножений на –5, до другого – четвертий, помножений на 2, до третього – четвертий, помножений на –3. Матимето:

$$\Delta = 6\begin{vmatrix} 5-5 & -2+2 & 3-3 & 1 \\ 5+10 & 4-4 & 3+6 & -2 \\ 7+15 & -3-6 & 5+9 & -3 \\ 2-10 & -3+4 & 4-6 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 9 & -2 \\ 22 & -9 & 14 & -3 \\ -8 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкриємо останній визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 6a_{14}A_{14} = 6\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 15 & 0 & 9 \\ 22 & -9 & 14 \\ -8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 15 & 0 & 9 \\ 22 & -9 & 14 \\ -8 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

У другому стовпці – 9 замінюємо 0. Для цього до другого рядка додаємо третій, помножений на 9:

$$\Delta = -6\begin{vmatrix} 15 & 0 & 9 \\ -50 & 0 & -4 \\ -8 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник розкриваємо за елементами другого стовпця:

$$\Delta = -6\cdot 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 15 & 9 \\ -50 & -4 \end{vmatrix} = 6\cdot(-60+450) = 2340.$$

16.4. Дії над матрицями

1. *Сума матриць* $\underset{(m\times n)}{A} + \underset{(m\times n)}{B} = \underset{(m\times n)}{C}$, причому $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. (20)

Приклад 1

Знайти матрицю $C = A + B$, якщо

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

За означенням сума існує, якщо матриці A і B одного розміру. Ця умова виконується. Кожен елемент матриці C є сумою відповідних елементів матриць A і B. Отже

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. *Множення матриці на число* $\alpha \neq 0$

$$\underset{(m\times n)}{A}\cdot\alpha = \underset{(m\times n)}{C}, \qquad c_{ij} = \alpha\cdot a_{ij} \qquad (21)$$

Приклад 2

$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. Знайти матрицю $C = 3A$.

За означенням необхідно кожен елемент матриці A домножити на 3, одержимо $C = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$.

3. *Транспонування матриць* (заміна рядків стовпцями).

Якщо

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

то транспонована матриця

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (22)$$

Приклад 3

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, тоді $A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

4. *Добуток матриць*

$\underset{(m\times n)}{A} \cdot \underset{(m\times p)}{B} = \underset{(m\times p)}{C}$,

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}, \qquad (23)$$

тобто елемент c_{ij} матриці C є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на елементи j-го стовпця матриці B

Слід зауважити, що добуток матриць існує тільки, якщо виконані умови на розміри матриць A і B, а саме якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. В іншому випадку добуток матриць просто не існує

Приклад 4

Знайти добуток $A \cdot B = C$, якщо

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

За означенням добуток існує, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Ця умова виконується За формулами (23) маємо:

$\underset{(2\times 2)}{A} \cdot \underset{(2\times 3)}{B} = \underset{(2\times 3)}{C}$.

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7, \qquad c_{12} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2,$

$c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4, \qquad c_{22} = -1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = 2,$

$c_{13} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1, \qquad c_{23} = -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 1,$

$$C = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

16.5. Властивості добутку матриць

а) $A \cdot B \neq B \cdot A$. Якщо ж $A \cdot B = B \cdot A$, то такі матриці називаються переставними.

б) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$.

в) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

г) $(A\cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

16.6. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Викреслимо в матриці A k ($k \le m$, $k \le n$) рядків та k стовпців. Із елементів, які стоять на перетині викреслених рядків і стовпців, утворимо визначник. Цей визначник називається *мінором матриці A k-го порядку* і позначається M_k .

Приклад 1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Обчислимо кілька мінорів матриці A. Викреслимо перших два рядки і перших два стовпця, одержимо мінор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Викреслимо перший і третій рядки та перший та четвертий стовпці. Із елементів, що стоять на перетині, укладаємо визначник

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3.$$

Обчислимо M_3 який одержимо шляхом викреслення трьох рядків першого, третього і четвертого стовпців:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \; -1 \; = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 1\cdot A_{31} = A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot M_{31} =$$

$$= M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot 2 - (-1)\cdot 3 = -6 + 3 = -3.$$

Рангом матриці A називається число, яке дорівнює найвищому порядку відмінного від нуля мінора матриці.

Позначається rang A, або $r(A)$, або просто r.

Для прикладу 1

Ми обчислили мінор 3-го порядку $M_3 = -3$. Оскільки він відмінний від нуля, то за означенням rang $A = 3$.

Дії над матрицями, які змінюють їх вигляд, але не змінюють їх ранг, називаються еквівалентними *перетвореннями матриць*.

До таких перетворень належать:

1) переставлення яких-небудь рядків (стовпців) місцями;

2) множення довільного рядка (стовпця) на число $\alpha \neq 0$;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число;

4) відкидання нульового рядка (стовпця).

Дві матриці *A* і *B* називаються еквівалентними, якщо їх ранги однакові і позначаються *A* ~ *B*.

16.7. Система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Нехай задано систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{18}$$

Через

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

позначимо визначник системи, а через Δ_{x1}, Δ_{x2}, ..., Δ_{xn} – визначники, утворені заміною відповідних стовпців, стовпцем вільних членів. Якщо $\Delta \neq 0$, систему (18) можна розв’язати за формулами Крамера, аналогічними формулам (16):

$$x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta} = 0, \ \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{19}$$

16.8. Система однорідних лінійних рівнянь

Лінійне рівняння, вільний член якого дорівнює нулю,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

називають однорідним.

Нехай задано систему *n* лінійних однорідних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Очевидно, що будь-яка система, складена з однорідних рівнянь, має хоча б один розв’язок, а саме $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (нульовий розв’язок).

Якщо визначник однорідної системи рівнянь (20)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не дорівнює нулю, то система має тільки нульові розв'язки. Справді, всі визначники Δ_{xi} дорівнюватимуть нулю (один стовпець кожного визначника містить тільки нулі). За формулами Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta} = 0, \;\; i = 1, 2, \dots, n.$$

Якщо $\Delta = 0$, то система (20) має безліч розв'язків, тобто має і ненульові розв'язки.

16.9. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Якщо визначник системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими відмінний від нуля, то систему рівнянь можна розв'язати за формулами Крамера. Розглянемо ще один метод розв'язування систем *n* лінійних рівнянь з *a* невідомими. Це так званий **метод Гаусса**.

Нехай маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{21}$$

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Розділимо обидві частини першого рівняння на a_{11}:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{22}$$

Віднімемо від другого і третього рівнянь системи (21) рівняння (22), помножене спочатку на a_{21}, а потім на a_{31}.

$$\begin{cases} \left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}; \\ \left(a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31}\right)x_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31}. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21} = a'_{22}, \qquad a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21} = a'_{23}, \;\; b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21} = b'_2,$$

$$a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31} = a'_{32}, \qquad a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31} = a'_{33}, \;\; b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31} = b'_3.$$

Тоді

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2; \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases} \tag{23}$$

Нехай тепер $a'_{22} \neq 0$. Розділимо обидві частини першого рівняння системи (23) на a'_{22}:

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}} \qquad (24)$$

Віднімемо від другого рівняння системи (23) рівняння (24), помножене на a'_{32}:

$$\left(a'_{33} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}} a'_{32}\right) x_3 = b'_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}} a'_{32}.$$

Позначимо

$$a'_{33} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}} a'_{32} = a''_{33}; \quad b'_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}} a'_{32} = b'_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}} b''_3.$$

Тоді

$$a''_{33} x_3 = b''_3.$$

В результаті цих операцій система рівнянь (21) набуде так званого **трикутного виду**:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \dfrac{b_1}{a_{11}}; \\ \qquad\qquad x_2 + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \dfrac{b'_2}{a'_{22}}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 = \dfrac{b''_3}{a''_{33}}. \end{cases}$$

Тепер визначимо всі невідомі, починаючи з останнього.

Якщо $a_{11} = 0$, то серед коефіцієнтів при x_1 існує хоча б один відмінний від нуля. Тоді рівняння, що містить x_1 вважатимемо першим. Такий метод розв'язування системи *n* лінійних рівнянь з я невідомими називають **методом Гаусса**.

Приклад

Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. У даному разі краще поміняти нумерацію невідомих: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_1$, $x'_3 = x_3$. Тоді система матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3 = 1, \\ -x'_1 + 2x'_2 + 3x'_3 = 1, \\ -x'_1 + 5x'_2 + 4x'_3 = -3. \end{cases}$$

Додамо до другого і третього рівняння системи перше рівняння. Матимемо:

$$\begin{cases} 4x'_2 + 5x'_3 = 2, \\ 7x'_2 + 6x'_3 = -2. \end{cases}$$

Тепер перше рівняння цієї системи поділимо на 4, а потім помножимо на 7 і віднімемо його від другого рівняння:

$$x_2' + \frac{5}{4}x_3' = \frac{1}{2};$$

$$\left(6 - \frac{35}{4}\right)x_3' = -2 - \frac{7}{2};$$

$$-\frac{11}{4}x_3' = -\frac{11}{2};$$

$$x_3' = 2.$$

Підставивши значення x_3' знайдемо x_2':

$$x_2' = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}x_3' = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Підставивши значення x_3' і x_2': у перше рівняння системи, матимемо:

$$x_1' = 1 - 2(-2) - 2 \cdot 2 = 1 + 4 - 4 = 1.$$

Отже, $x_1' = 1$; $x_2' = -2$; $x_3' = 2$, а $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

Метод Гаусса можна застосовувати і до розв'язування систем, в яких визначник дорівнює нулю.

Приклад

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 15. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -10 + 18 + 32 + 12 - 40 - 12 = 0.$$

Отже, за формулами Крамера цю систему розв'язати не можна.

Розв'язуватимемо методом Гаусса. Перше рівняння системи помножимо спочатку на 2 і віднімемо від другого, а потім помножимо його на 4 і віднімемо від третього. Дістанемо систему

$$\begin{cases} -5x_2 - 2x_3 = 3; \\ -5x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Ця система складається з двох однакових рівнянь. Розв'яжемо одне з них:

$$x_2 = \frac{3 + 2x_3}{-5}.$$

Підставимо це значення в перше рівняння системи і виразимо x_1 через x_3:

$$x_1 = 3 - 2x_2 - 3x_3 = 3 - \frac{2(3 + 2x_3)}{-5} - 3x_3 = \frac{15 + 6 + 4x_3 - 15x_3}{5} =$$

$$= \frac{21 - 11x_3}{5}.$$

Надаючи довільних значень x_3, знайдемо відповідні значення x_2 і x_1. Наприклад, якщо $x_3 = 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 2$;

якщо $x_3 = 0$, то $x_1 = \frac{21}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$ і т. д., тобто система рівнянь має безліч розв'язків.

Вправи

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати за допомогою визначників системи:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -4, \\ 3x + 5y = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 16, \\ -x + 3y = 17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x - y + 2z = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8, \\ x + 3y - 2z = -5, \\ 3x + 4y - 4z = -7; \end{cases}$

3. Розв’язати методом Гаусса системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 \quad\; + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

ТЕМА 17. ФУНКЦІЇ.

17.1. Означення функції. Зростаючі, спадні, парні і непарні функції.

Матеріальна єдність світу виявляється у взаємозв’язку і взаємообумовленості різних явищ і процесів, що відбуваються в природі. Розглядаючи їх, доводиться враховувати залежності одних величин від інших. *Наприклад*, залежність довжини шляху від часу, залежність кількості купленого товару на певну суму від ціни, залежність між площею круга і його радіусом. Необхідність вивчення на практиці залежностей між змінними різної природи привела до поняття функції в математиці.

Функцією називається залежність змінної y від змінної x, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

Функцію позначають або однією буквою латинського алфавіту f, F, або за допомогою рівності $y = f(x)$, яка символічно означає залежність між двома змінними. Змінну *x* називають *незалежною* або *аргументом,* а змінну *y* – *залежною.*

Значенням функції називають значення залежної змінної *y*, якого вона набуває за деякого певного значення *x*.

Областю визначення функції називається множина значень, яких набуває незалежна змінна *x*.

Множина відповідних значень залежної змінної *y*, яких вона набуває при всіх значеннях *x* з області визначення функції, називається *областю значень* або *областю зміни функції.*

Приклад 1. Залежність довжини шляху s, пройденого тілом, яке рухається рівномірно, від часу t є функцією, що задається формулою $s = s_0 + vt$, де s_0 – початковий шлях, який пройшло тіло; v – швидкість, яка є сталою при рівномірному русі.

Приклад 2. Якщо учні класу, що складається з 25 осіб, чергують протягом січня, крім тих днів, які припадають на неділю, то кожному з днів січня відповідає певний черговий. Незалежною змінною тут є дні січня, залежною – черговий. Маємо функцію, областю визначення якої є множина днів січня (без тих, що припадають на неділю), а областю зміни – множина учнів класу.

Приклад 3. Активна електрична енергія, яка витрачається в колі змінного струму за час t, є функцією часу і при сталій потужності P виражається формулою $W_а = Pt$.

Окремо означається числова функція: *числовою функцією з областю визначення X називається залежність, при якій кожному числовому значенню x із множини X ставиться у відповідність єдине деяке число y.*

Нагадаємо основні *способи задания функції:*

1) за допомогою формули (приклади 1, 3);

2) за допомогою таблиці (наприклад, таблиці квадратів чисел, значень тригонометричних функцій та ін.);

3) за допомогою графіка (*наприклад*, якщо фіксувати протягом кількох років висоту дерева, яке росте, то, зобразивши по осі *Ox* вік дерева в роках, а по осі *Oy* – висоту в метрах, одержимо графік функції (рис. 61)).

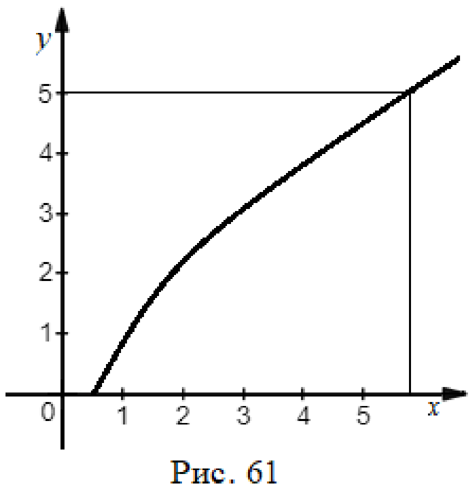


Рис. 61

Отже, *графіком функції* $y = f(x)$ називається множина точок $M(x; f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції, тобто належать області значень функції.

Не завжди формула задає функцію. Наприклад, формула $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома) задає пряму пропорційність (функцію від *U*) при сталому опорі в ланцюгу та змінній напрузі і обернену (функцію від *R*) – при сталій напрузі та змінному опорі. Проте, якщо з цієї формули виразити *R*, то $R = \frac{U}{I}$. Остання формула не задає функцію. Справді, *R* – величина стала для даного провідника і не залежить ні від напруги, ні від сили струму: якщо напругу збільшити, наприклад, у два рази, то у два рази збільшиться і сила струму, а відношення напруги до сили струму не зміниться. Опір *R* є функцією (прямою пропорційністю $y = kx$) довжини провідника мри сталій площі поперечного перерізу і функцією площі поперечного перерізу (оберненою пропорційністю $y = \frac{k}{x}$) при сталій довжині провідника: $R = \rho \frac{l}{S}$, де ρ – питомий опір; l – довжина провідника; S – площа його поперечного перерізу.

Інколи функцію задають різними формулами на різних множинах значень аргументу (так звані кусково-задані функції).

Наприклад, якщо турист знаходився в дорозі 9 год і в перші 5 год рухався зі швидкістю 4,5 км/год, потім відпочивав 0,5 год, а решту часу йшов зі швидкістю 4 км/год, то функцію довжини шляху s залежно від часу t запишемо у вигляді

$$s = \begin{cases} 4{,}5t, & \text{якщо } 0 \le t \le 5, \\ 22{,}5, & \text{якщо } 5 \le t \le 5{,}5, \\ 22{,}5 + 4t, & \text{якщо } 5{,}5 < t < 9. \end{cases}$$

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою,* якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 змінної x, взятих з області Визначення і таких, що $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $y = f(x)$ називається *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 змінної x, взятих з області визначання і таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Для дослідження функції на зростання і спадання, виходячи з означень, потрібно:

1) вибрати будь-які два значення x_1 і x_2 з області визначення функції і такі, що $x_2 > x_1$;

2) скласти різницю $f(x_2) - f(x_1)$ і з’ясувати (якщо це можливо), чи буде вона додатною (від’ємною) та, користуючись означенням нерівності, переконатися, що $f(x_2) > f(x_1)$ (чи $f(x_2) < f(x_1)$), а звідси зробити висновок про зростання (спадання) функції.

Графік зростаючої функції піднімається вгору, а спадної – опускається вниз.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо для будь-якого значення x, взятого з області визначення, значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) > f(x)$.

Інакше кажучи, у парних функцій їх значення для протилежних значень значень аргументу рівні. Графік парної функції симетричний відносно осі *Oy.*

Функція $y = f(x)$ називається *непарною,* якщо для будь-якого значення x, взятого з області визначення, значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність. $f(-x) = -f(x)$. Тобто у непарних функцій їх значення для протилежних значень аргументу протилежні. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Наприклад:

а) функція $y = 2x$ зростаюча і непарна у всій області визначення (рис. 62), графік її симетричний відносно початку координат;

б) функція $y = x^2$ зростаюча при $x \in [0; +\infty)$ і спадна при $x \in (-\infty; 0]$; вона парна, її графік симетричний відносно осі *Oy* (рис. 63).

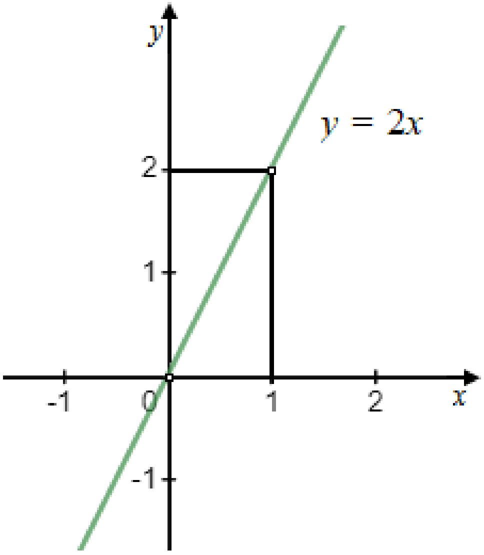


Рис. 62

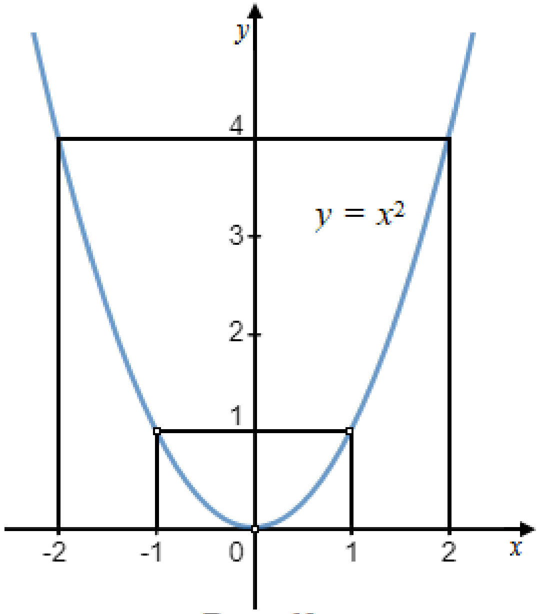


Рис. 63

Щоб дослідити функцію на парність чи непарність, треба перевірити виконання двох умов:

1) для будь-якого x, взятого з області визначення, –x також належить області визначення, тобто перевірити, чи буде область визначення даної функції множиною, симетричною відносно точки O;

2)*чи виконується умова* $f(-x) = f(x)$ *чи* $f(-x) = -f(x)$.

Якщо не виконується перша умова, то недоцільно перевіряти другу.

17.2. Властивості функцій. Лінійна функція.

Лінійною називається функція, яку можна подати у вигляді $y = kx + b$, *де x і y* – змінні, *k і b* – числа.

При *b* = 0 формула лінійної функції набирає вигляду $y = kx$. Ця формула при $k \neq 0$ задає пряму пропорційність. Графіком лінійної функції є пряма (рис. 64).

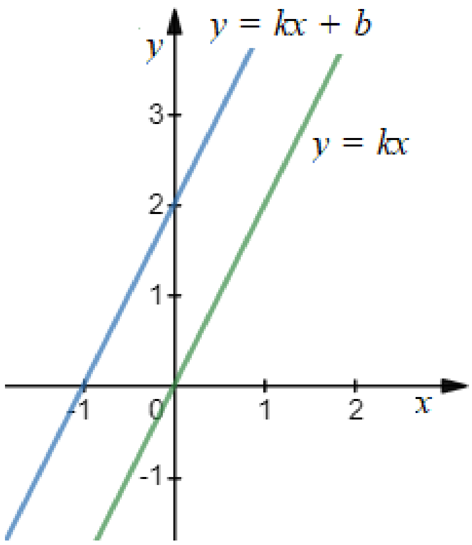


Рис. 64

Лінійні функції виражають залежності між змінними різної природи.

Наприклад:

а) залежність довжини шляху s, який пройде тіло при рівномірному русі, від часу t визначають за формулою $s = s_0 + vt$, де s_0 – початковий шлях, v – стала швидкість;

б) залежність довжини металевого стрижня від температури при нагріванні задають формулою $l = l_0 + kt$, де l_0 – довжина стрижня при $t = 0$, k – коефіцієнт лінійного розтягу;

в) вартість N телеграми обчислюється за формулою $N = 50x + 70$, де x – кількість слів, 50 коп. – вартість одного слова, 70 коп. – попередня оплата;

г) вартість проїзду в таксі можна обчислити за формулою $P = 15n + 20$, де n – кількість кілометрів (відстань), що проїхав пасажир, 15 грн. – вартість проїзду одного кілометра, 20 грн. – сума, яка автоматично фіксується на лічильнику, коли пасажир сідає в таксі.

Властивості лінійної функції.

1. Областю визначення лінійної функції, якщо вона задана формулою $y = kx + b$ без вказівки на характер залежності між змінними x і y, є множина всіх дійсних чисел.

2. Зростання чи спадання функції залежить від знака коефіцієнта k.

При $k > 0$ функція зростає.

Доведемо це, користуючись означенням зростаючої функції.

Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in R$, $x_2 \in R$.

Тоді $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1) > 0$, оскільки $k > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору k, x_2 і x_1, та означенням числової нерівності. Тому $f(x_2) > f(x_1)$.

Доведіть, що при $k < 0$ лінійна функція спадна.

3. При $k \neq 0$ і $b \neq 0$ лінійна функція не є ні парною, ні непарною. Справді, хоча для будь-якого $x \in R$ і $-x \in R$ (область визначення є множиною, симетричною відносно точки *O*), все ж таки $f(-x) = -kx + b \neq f(x)$ і $f(-x) = -kx + b \neq -f(x)$.

При $k \neq 0$ і $b = 0$ лінійна функція є непарною, бо $f(-x) = -kx = -f(x)$. Графіком її за цієї умови є пряма, що проходить через початок координат і симетрична відносно нього.

При $k = 0$ і будь-якому b лінійна функція парна, бо $f(-x) = b = f(x)$. Графіком її є пряма, що паралельна осі *Ox* (або збігається з нею) і тому симетрична відносно осі *Oy*.

Функція $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$. Ця функція виражає обернено пропорційну залежність.

Обернено пропорційною називається функція, яку можна за дати формулою $y = \frac{k}{x}$, де x – незалежна змінна і $k \neq 0$.

Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ є гіпербола, яка складається з двох гілок. Гіпербола розміщується в першій і третій координатних чвертях при $k > 0$ та в другій і четвертій – при $k < 0$ (рис. 65).

Функції $y = \frac{k}{x}$ виражають залежності між різними змінними.

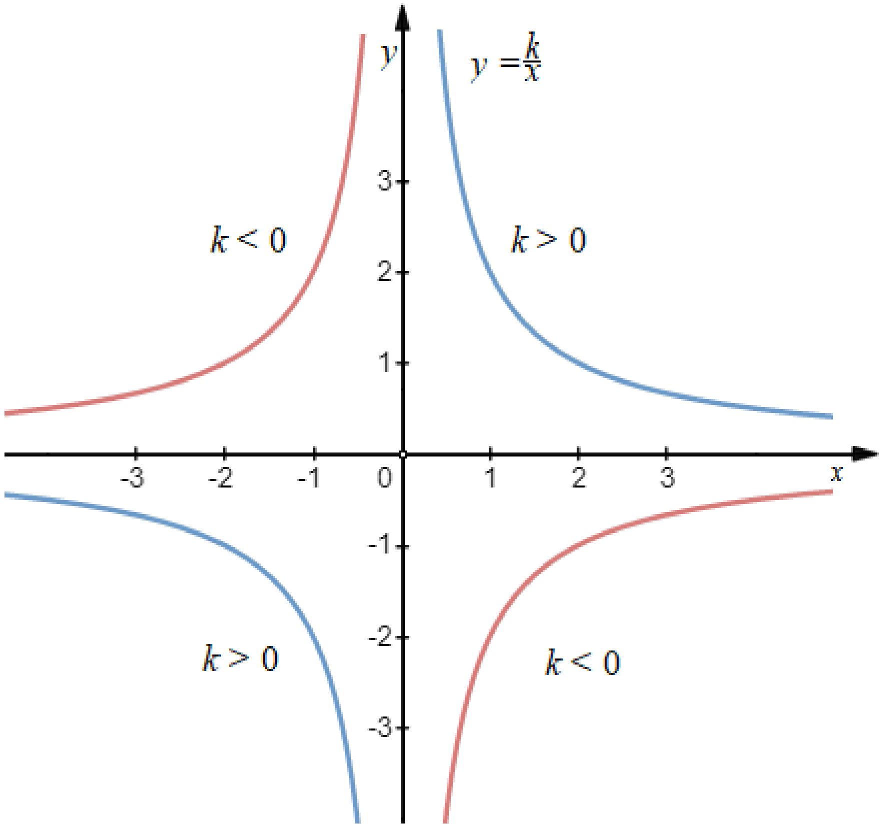


Рис. 65

Наприклад:

а) залежність кількості купленого товару на задану суму грошей від ціни товару;

б) залежність сили струму від опору провідника при сталій напрузі $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома);

в) залежність між тиском газу і об'ємом, який він заповнює, $p = \frac{k}{V}$ (закон Бойля-Маріотта), де k – стала;

г) залежність часу від швидкості руху $t = \frac{s}{v}$, де s – довжина шляху.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$.

1. Областю визначення і областю зміни функції є всі дійсні числа, за виключенням нуля, бо $x \neq 0$ і $y \neq 0$.

2. При $k > 0$ функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на множинах $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Доведемо, наприклад, що при $k > 0$ і $x \in (-\infty; 0)$ функція спадає.

Дійсно, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in (-\infty; 0)$ і $x_2 \in (0; +\infty)$.

Тоді $f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0$, бо $x_1 x_2 > 0$ як добуток двох від'ємних чисел; $k > 0$, $x_1 - x_2 < 0$ за умовою вибору k, x_2 і x_1.

Тому $f(x_2) < f(x_1)$.

Так само доводимо, що у разі, коли $k > 0$ і $x \in (0; +\infty)$, функція спадає, а при $k < 0$, $x \in (-\infty; 0)$ і $x \in (0; +\infty)$ – зростає.

Доведіть самостійно, що функція $y = \frac{k}{x}$ зростає, якщо $k < 0$, $x \in (-\infty; 0)$ і $x \in (0; +\infty)$.

3. Функція $y = \frac{k}{x}$ непарна. Справді, областю визначення її є множина, симетрична відносно точки O, і $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$.

Графік функції $y = \frac{k}{x}$ симетричний відносно початку координат.

Функція $y = x^2$.

Властивості цієї функції випливають із властивостей степеня з парним натуральним показником.

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x \in R$. Областю її зміни є множина невід'ємних чисел, тобто $y \in [0; +\infty)$.

2. На множині $x \in (-\infty; 0]$ функція спадає, а на множині $x \in [0; +\infty)$ – зростає.

Доведемо, що при $x \in (-\infty; 0]$ функція спадає.

Нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in (-\infty; 0]$ і $x_2 \in [0; +\infty)$.

Тоді $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$ за умовою, $x_2 + x_1 < 0$ як сума двох чисел, з яких одне від'ємне, а друге може бути недодатним. Тому $f(x_2) < f(x_1)$.

Доведіть самостійно, що при $x \in [0; +\infty)$ функція $y = x^2$ зростає.

3. Функція парна, оскільки область її визначення – множина, симетрична відносно точки O, і $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Графіком функції є парабола, симетрична відносно осі Oy (див. рис. 63).

4. Оскільки при $x = 0$ і $y = 0$, то графік проходить через початок координат.

За допомогою функції $y = x^2$ виражають залежність площі квадрата від довжини його сторони. На практиці, у фізиці, техніці частіше застосовують функцію $y = ax^2$, де a – число. За допомогою цієї функції виражають, наприклад: а) залежність площі круга від радіуса $S = \pi r^2$; б) залежність кінетичної енергії тіла від його швидкості $W_K = \frac{mv^2}{2}$; в) залежність довжини шляху вільно падаючого тіла від часу $s = \frac{gt^2}{2}$ (якщо опором середовища нехтувати).

Графіком функції $y = ax^2$ є також парабола, симетрична відносно осі Oy. Якщо $a > 0$, гілки параболи спрямовані вгору, а якщо $a < 0$ – вниз (рис. 66).

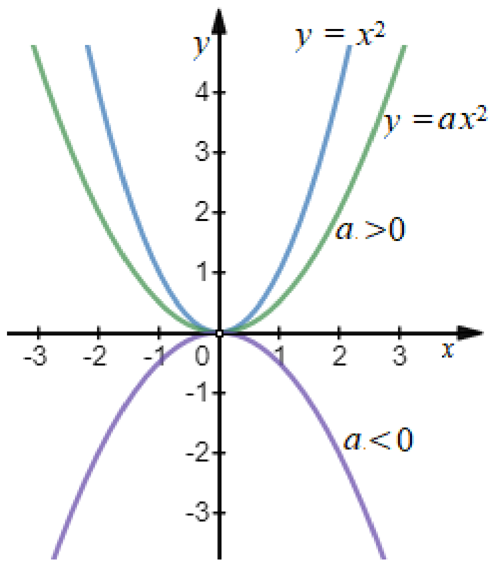


Рис. 66

Форму параболи $y = ax^2$ мають: ланцюг, що підтримує висячий міст за допомогою великої кількості стрижнів (якщо масою ланцюга нехтувати); траєкторія снаряда, що летить; осьовий переріз автомобільної фари; осьовий переріз вільної поверхні рідини при обертанні посудини з рідиною навколо його осі симетрії.

Функція $\boldsymbol{y = x^3}$.

Ця функція виражає, наприклад, залежність об'єму куба від довжини його ребер.

Властивості функції випливають із властивостей степеня з непарним натуральним показником.

1. Області визначення і зміни функції – множина всіх дійсних чисел.

2. Функція, зростаюча на всій області визначення. Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in R$ і $x_2 \in R$.

Тоді $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) = (x_2 - x_1) \times$ $\times \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0$, оскільки $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору x_1 і x_2, сума $\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2$ додатна при будь-яких x_1 і x_2. Тому $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $y = x^3$ – зростаюча.

3. Функція $y = x^3$ непарна, оскільки область її визначення – множина, симетрична відносно точки O, і $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Графіком цієї функції є кубічна парабола, яка симетрична відносно початку координат (рис. 67).

4. При $x = 0$ і $y = 0$, тобто графік проходить через початок координат.

На практиці застосовують також функцію $y = ax^3$, яка має ті самі властивості, хоча коефіцієнт a дещо впливає на форму графіка (рис. 68). Графік $y = ax^3$ використовують проектувальники залізниць та автомобільних шляхів для здійснення плавного переходу від прямолінійних ділянок шляху до криволінійних.

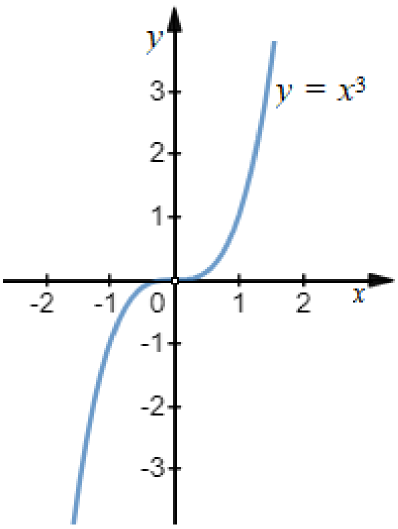


Рис. 67

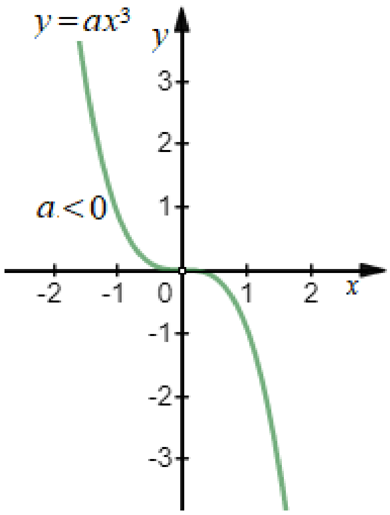


Рис. 68

Функція $y = \sqrt{x}$.

За допомогою цієї функції виражається, наприклад, залежність сторони квадрата від його площі *S*.

Властивості функції $y = \sqrt{x}$ випливають із властивостей арифметичного квадратного кореня.

1. Області визначення і зміни функції - множина непі чемних чисел, тобто $x \in [0; +\infty)$ і $y \in [0; +\infty)$.

2. Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення.

Дійсно, при $x_2 > x_1$, де $x_1 \in [0; +\infty)$ і $x_2 \in [0; +\infty)$,

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0,$$

оскільки $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору x_1, x_2 та $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$ як сума міного і невід'ємного числа. Отже, $f(x_2) > f(x_1)$ тобто функція $y = \sqrt{x}$ зростаюча.

3. Функція $y = \sqrt{x}$ не належить ні до парних, ні до непарних функцій, оскільки її область визначення – множина, не симетрична відносно початку координат.

4. При $x = 0$ і $y = 0$, тобто графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через початок координат, а оскільки *x* і *y* – невід'ємні, то він розміщений у першій чверті (рис. 69). Графіком цієї функції є розміщена у першій чверті гілка параболи, симетрична гілці параболи $y = x^2$, $x \geq 0$ відносно прямої $y = x$.

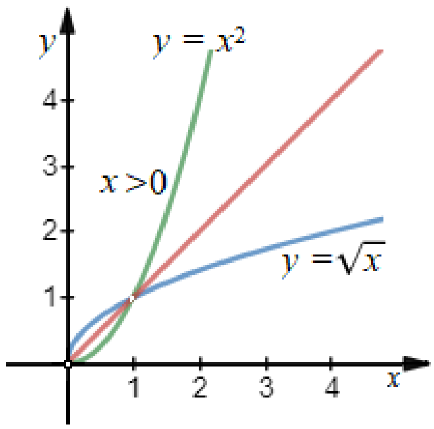


Рис. 69

На практиці використовують функцію $y = a\sqrt{x}$. Зокрема, за допомогою цієї функції виражають залежність періоду *T* малих коливань математичного маятника від його довжини *l*: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де g – прискорення вільного падіння.

17.3. Квадратична функція.

Квадратичною називається функція, яка задається формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c – дійсні числа, причому $a \neq 0$.

За допомогою квадратичної функції виражають залежність положення тіла в будь-який момент часу при прямолінійному рівноприскореному русі:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_{0x}t^2}{2},$$

де x_0 – початкова координата, v_{0x} – проекція початкової швидкості на вісь *Ox*, a_{0x} – проекція прискорення.

Графіком квадратичної функції є парабола, вершина якої знаходиться у точці M_0 з координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Це можна показати, якщо перетворити формулу:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Звідси випливає, що графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ такими геометричними перетвореннями: послідовним паралельним перенесенням параболи $y = ax^2$ на $-\frac{b}{2a}$ одиниць ліворуч чи праворуч по осі *Ox* залежно від того, яким буде знак числа $-\frac{b}{2a}$, і паралельним перенесенням здобутого графіка по осі *Oy* вгору або вниз на $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ одиниць залежно від того, яким буде знак числа $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Функції $\boldsymbol{y = [x]}$ і $\boldsymbol{y = \{x\}}$.

Кожне дробове число можна подати у вигляді суми двох доданків, один з яких – ціле число, а другий – невід'ємний правильний дріб.

Наприклад: $10,7 = 10 + 0,7$; $0,5 = 0 + 0,5$; $-2,25 = -3 + 0,75$; $\sqrt{2} \approx 1 + 0,41$. Отже, за цілу частину числа *x* візьмемо найбільше ціле число, яке не перевищує *x*. Цілу частину числа *x* позначають символом $[x]$, де $x = n + q$, $n \in Z,\ 0 \le q < 1$. Очевидно, що $[x] = n$.

При будь-якому *x* виконується подвійна нерівність $[x] \le x < [x] + 1$. Формула $y = [x]$, де $[x]$ – ціла частина *x*, задає функцію, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел.

Побудуємо графік функції $y = [x]$. З формул $x = n + q$, $n \in Z,\ 0 \le q < 1$ і $[x] = n$ випливає, що коли $0 \le x < 1$, то $y = 0$; коли $1 \le x < 2$, то $y = 1$; коли $2 \le x < 3$, то $y = 2$; коли $-1 \le x < 0$, то $y = -1$ і т. д. І у загальному випадку, якщо $n \le x < n + 1$, де n – ціле число, то $y = n$. Отже, на кожному з проміжків $[n; n + 1)$ значення функції дорівнює *n* (рис. 70).

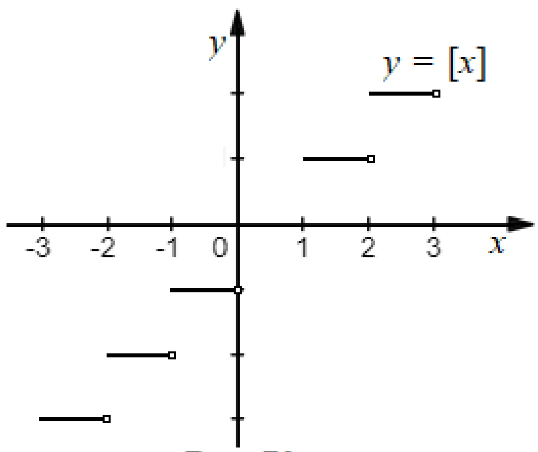


Рис. 70

Графік, подібний до графіка функції $y = [x]$, можна одержати, якщо зобразити графічно залежність між масою вантажу і вартістю його перевезення, коли відомо, що за перевезення першої повної чи неповної тонни вантажу треба платити 20 грн., а за кожну наступну повну чи неповну тонну 10 грн.

Дробовою частиною числа x називається різниця між цим числом і його цілою частиною, і позначається $\{x\}$. З означення вишиває, що $\{x\} = x - [x]$.

Наприклад: $\{9{,}7\} = 9{,}7 - [9{,}7] = 9{,}7 - 9 = 0{,}7$;
$\{-2{,}3\} = -2{,}3 - [2{,}3] = -2{,}3 - (-3) = -2{,}3 + 3 = 0{,}7$.

Формулою $y = \{x\}$ або $y = x - [x]$ задається функція, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел.

При побудові графіка функції $y = \{x\}$ враховуємо, що коли $0 \le x < 1$, то $[x] = 0$ і формула $y = x - [x]$ набуває вигляду $y = x$, а графіком функції $y = \{x\}$ є частина прямої $y = x$. При $x = 1$ $y = 1 - 1 = 0$, тобто відповідна точка графіка буде на осі *Ox*. Якщо $1 \le x < 2$, то $[x] = 1$, а $y = \{x\} = x - [x] = x - 1$, тобто графіком функції на цьому проміжку буде частина прямої $y = x - 1$.

У загальному випадку, якщо $n \le x < n + 1$, де $n \in Z$, то $[x] = n$, а $y = \{x\} = x - n$, тобто на кожному проміжку $[n; n + 1)$ графіком функції $y = \{x\}$ є частина прямої $y = x - n$ (Рис. 71).

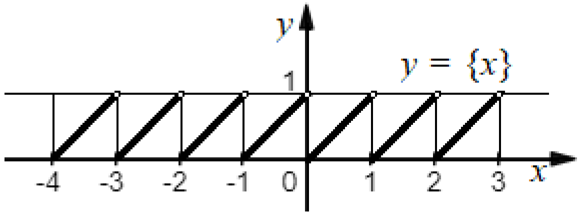


Рис. 71

17.4. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень графіків відомих функцій.

У багатьох випадках графік певної функції можна побудувати за допомогою геометричних перетворень (паралельним перенесенням, відображенням симетрії відносно прямої, стисненням до осі або розтягуванням від неї тощо) графіка відомої функції, через яку виражається дана.

1. Нехай дано графік функції $y = f(x)$, а потрібно побудувати графік функції $y = -f(x)$. Наприклад, треба побудувати графік функції $y = -x^2$, якщо відомий графік функції $y = x^2$. Тут $y = f(x) = x^2$, а $y = -f(x) = -x^2$. Області визначення обох функцій збігаються, аргумент *x* – однаковий, а значення функції *y* відрізняється лише знаком. Це означає, що кожній точці $M_0(x_0; y_0)$, що належить графіку $y = f(x)$ відповідає точка $M(x; y)$ на графіку функції $y = -f(x)$, тобто точки шуканого графіка симетричні точкам графіка функції $y = f(x)$ відносно осі *Ox*. Отже, графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка відомої функції $y = f(x)$ відображенням симетрії відносно осі *Ox* (рис. 72).

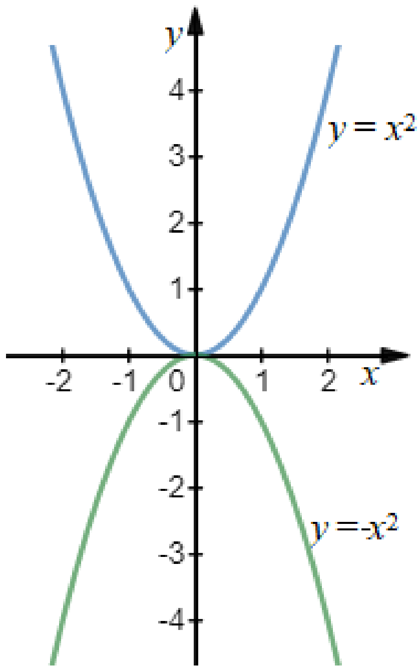


Рис. 72

2. Нехай відомий графік функції $y = f(x)$, а треба побудувати графік функції $y = f(-x)$.

Наприклад, відомий графік функції $y = \sqrt{x}$, а потрібно побудувати графік функції $y = \sqrt{-x}$ (рис. 73). Аргументи функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ відрізняються знаками. Нехай точка $M_0(x_0; y_0) \in f(x)$. Знайдемо координати відповідної точки $M(x; y) \in f(-x)$. Введемо підстановку $x_0 = -x$, звідси $x = x_0$, $y = f(-x) = f(x_0) = y_0$. Отже, точка M має протилежну абсцису і ту саму ординату, тобто $M_0(-x_0; y_0)$. Це означає, що графік функції $y = f(-x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ відображенням симетрії його відносно осі *Oy*.

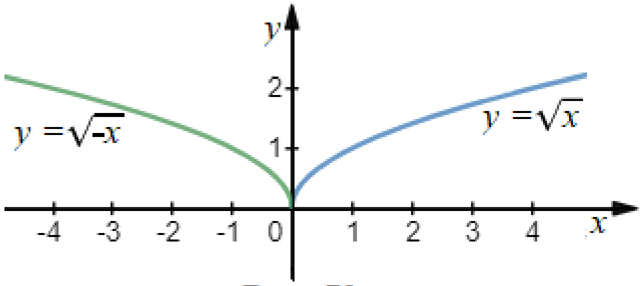


Рис. 73

3. Побудувати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$.

Наприклад, побудувати графік функції $y = \frac{2}{|x|}$, якщо відомий графік функції $y = \frac{2}{x}$. Як правило, в усіх вправах, пов'язаних з модулем, потрібно звільнитися від модуля числа, користуючись його означенням:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = f(|x|)$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ при $x \geq 0$ і з графіком $y = f(-x)$ при $x < 0$.

Для побудови графіка функції $y = \frac{2}{|x|}$ досить побудувати графік функції $y = \frac{2}{x}$ при $x > 0$ і графік функції $y = \frac{2}{-x}$ при $x < 0$. Об'єднавши дві побудовані криві, ми одержимо графік функції $y = \frac{2}{|x|}$. (рис. 74).

4. Побудувати графік функції. $y = |f(x)|$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Нехай відомий графік функції $y = 2x + 1$, треба побудувати графік $y = |2x + 1|$. Враховуємо, що

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ на ділянці, де $f(x) \geq 0$, і з графіком функції $y = -f(x)$ на ділянці, де $f(x) < 0$. Отже, для побудови графіка функції $y = |2x + 1|$ досить побудувати графік лінійної функції $y = 2x + 1$, а ту частину прямої, яка розміщена нижче осі *Ox*, відобразити симетрично відносно осі *Ox*. Ламана, яка лежить вище осі *Ox*, включаючи точку на цій осі, буде графіком функції $y = |2x + 1|$ (рис. 75).

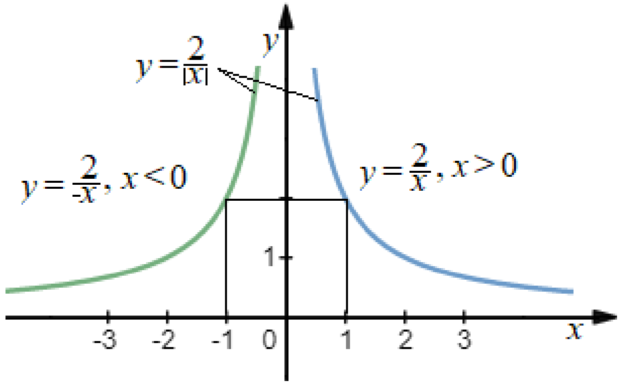


Рис. 74

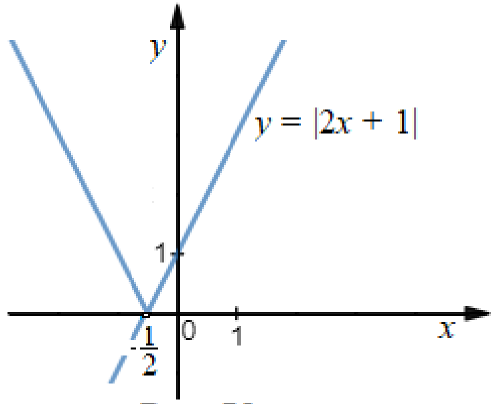


Рис. 75

5. Побудувати графік функції $y = f(x) \pm b$, де $b > 0$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Області визначення обох функцій збігаються, аргументи їх однакові, а значення функції відрізняються на b чи $-b$. Це означає, що всі точки, наприклад, графіка $y = f(x) + b$ мають ті самі абсциси, що й відповідні точки графіка $y = f(x)$, а ординати збільшені на b. Тому шуканий графік легко одержати з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням його у напрямі осі *Oy* на b одиниць угору.

Наприклад, графік функції $y = x^2 \pm 3$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ паралельним перенесенням його на три одиниці вгору для $y = x^2 + 3$ і на три одиниці вниз для $y = x^2 - 3$ (рис. 76).

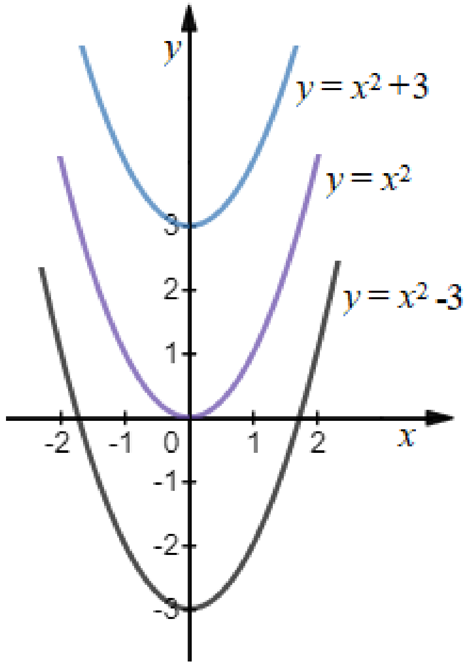


Рис. 76

6. Відомий графік функції $y = f(x)$.

Потрібно побудувати графік функції $y = f(x \pm a)$, де $a > 0$. Нехай відомий графік функції $y = x^2$, треба побудувати графік функції $y = (x \pm 2)^2$.

Розглянемо випадок побудови графіка функції $y = f(x - a)$. Нехай $M_0(x_0; y_0) \in f(x)$. Знайдемо відповідну точку $M(x; y) \in f(x - a)$. Введемо підстановку: $x_0 = x - a$, звідки $x = x_0 + a$; $y = f(x - a) = f(x_0) = y_0$. Отже, абсциса точки $M_0(x_0 + a; y_0)$ на a одиниць більша від абсциси точки $M_0(x_0; y_0)$, а ордината та сама. Це означає, що будь-яка точка графіка функції $y = f(x)$ переходить у відповідну точку графіка функції $y = f(x - a)$ у разі паралельного перенесення її праворуч у напрямі осі *Ox* на a одиниць.

Обґрунтуйте самостійно побудову графіка $y = f(x + a)$.

Отже, графік функцій $y = (x \pm 2)^2$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ паралельним перенесенням його на дві одиниці праворуч по осі *Ox* при $y = (x - 2)^2$ і на дві одиниці ліворуч при $y = (x + 2)^2$ (рис. 77).

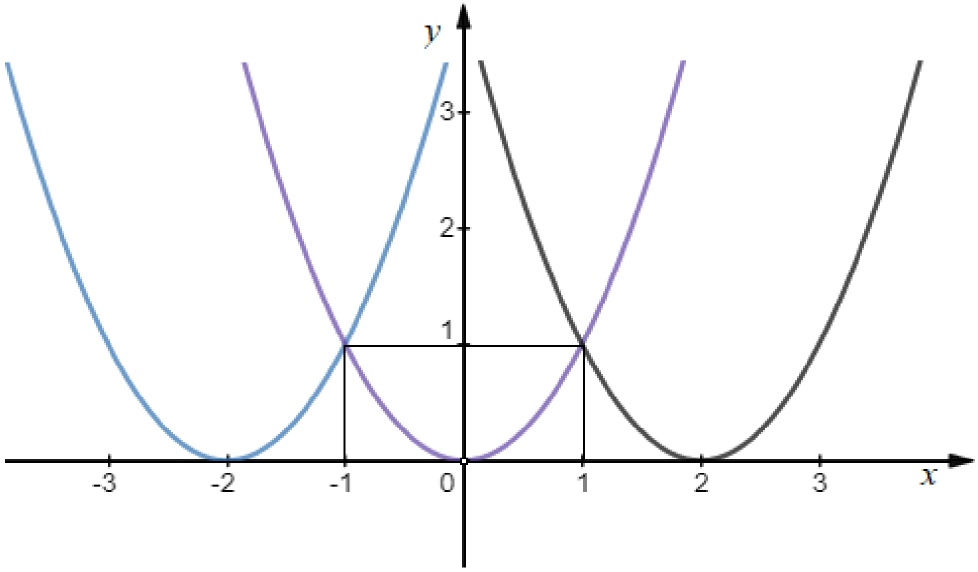


Рис. 77

7. Побудувати графік функції $y = af(x)$, де $a > 0$, якщо відомим графік $y = f(x)$.

Наприклад, побудуємо графіки функцій $y = 2x^3$ і $y = \frac{1}{2}x^3$, якщо відомий графік функції $y = x^3$.

Області визначення і аргументи обох функцій однакові. Значении функції при будь-якому x для функції $y = af(x)$ в a разів змінюються порівняно з функцією $y = f(x)$. При $a > 1$ ордината збільшуються в a разів, при $0 < a < 1$ зменшується в a разів. Тому графік функції $y = af(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ розтягуванням його в a разів від осі *Ox* при $a > 1$ і стисненням в a разів до осі *Ox* при $0 < a < 1$.

Отже, графік функції $y = 2x^3$ можна одержати з графіка функції $y = x^3$ розтягуванням від осі *Ox* ординат точок функції $y = x^3$ у два рази, а графік функції $y = \frac{1}{2}x^3$ – стисненням до осі *Ox* у два рази (рис. 78).

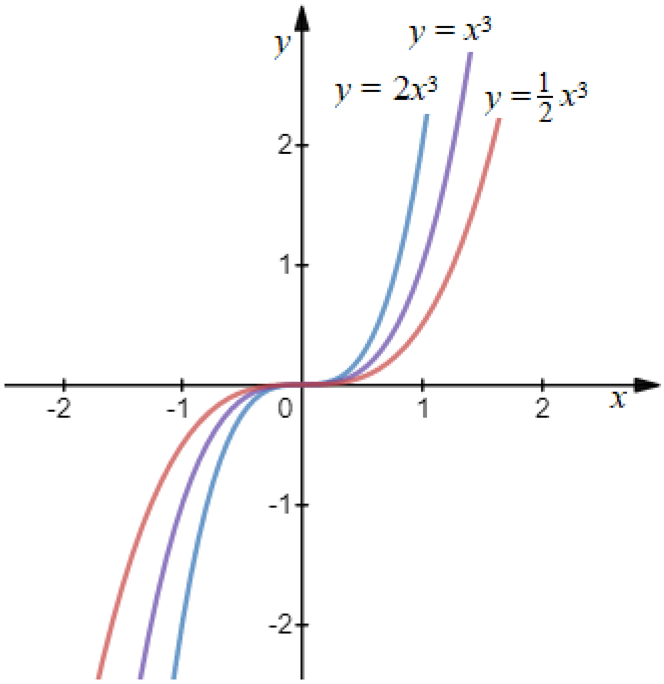


Рис. 78

8. Відомий графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(ax)$, де $a > 0$. *Наприклад*, за відомим графіком функції $y = \{x\}$ побудуємо графік функцій $y = \{2x\}$ та $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$.

Оскільки над змінною x у другій функції виконується дія множення на число a, введемо підстановку і знайдемо координати точки $M(x;y) \in f(ax)$, в яку перейде точка $M_0(x_0;y_0) \in f(x)$. Приймемо $x_0 = ax$, звідси $x = \frac{x_0}{a}$, $y = f(ax) = f(x_0) = y_0$. Отже, $M_0\left(\frac{x_0}{a};y_0\right)$. Це означає, що будь-яка точка графіка функції $y = f(x)$ перейде у точку графіка функції $y = f(ax)$ з абсцисою $\frac{x_0}{a}$ і тією самою ординатою. Очевидно, при $a > 1$ абсциса точки *M* зменшується в a разів, а при $0 < a < 1$ – збільшується. Це означає, що графік функції $y = f(ax)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ розтягуванням його або стисненням до осі *Oy*.

Графіки функцій $y = \{2x\}$ та $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$ зображено на рис. 79.

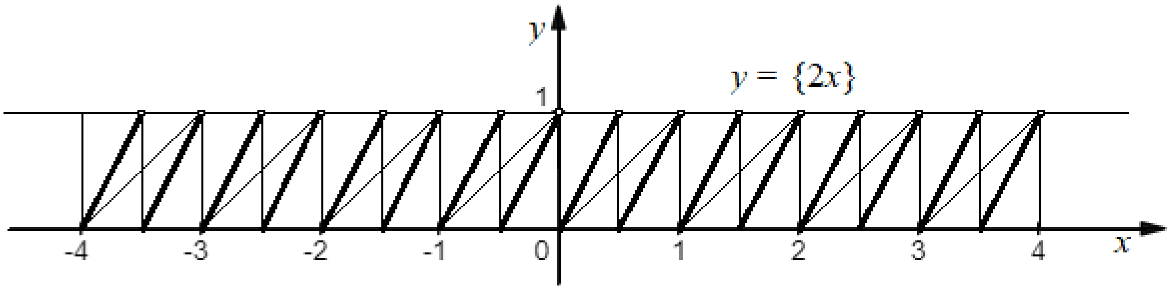


Рис. 79, *а*

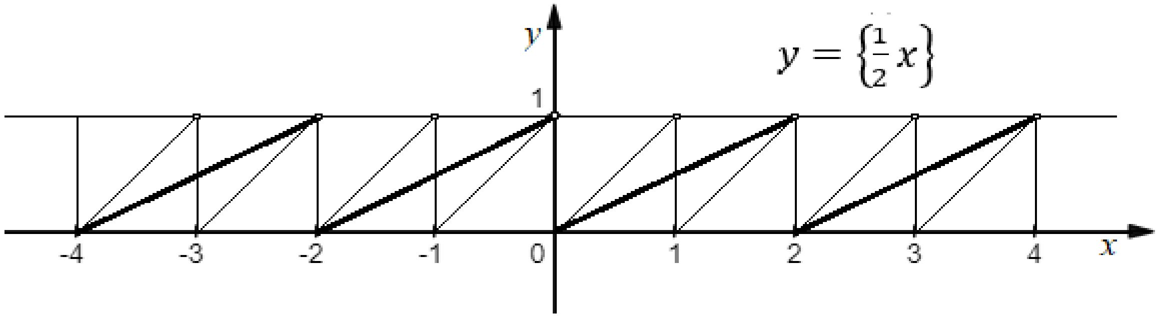


Рис. 79, *б*

Вправи.

1. Знайти область визначення функцій:

1) $y = \frac{6}{x-1}$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \sqrt[3]{\frac{3x-5}{x+2}}$; 4) $y = \sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}$;

5) $y = \frac{2x}{x^2-5x+6}$; 6) $y = \sqrt{x^2+x-2}$; 7) $y = \frac{3}{x^2-1}$;

8) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-5}$; 9) $y = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$; 10) $y = \frac{x}{x^2+x-1}$;

11) $y = \sqrt{16-x^2}$; 12) $y = \sqrt{4-|x|}$; 13) $y = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$

14) $y = \frac{4}{\sqrt{25-x^2}}$; 15) $y = \frac{2-x}{\sqrt[3]{2x-6}}$; 16) $y = \frac{x}{|x|}$.

2. Дослідити на парність і непарність функції:

1) $y = x + x^3$; 2) $x^2 - 2$; 3) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; 4) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

5) $y = \sqrt{1-x^2}$; 6) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 7) $y = x^4 - 2x^2 + 3$; 8) $y = \sqrt{x}$;

9) $y = \sqrt[3]{x}$; 10) $y = x^3 - 5x + 1$; 11) $y = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$; 12) $y = x^2 - |x|$.

3. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1}{x+2}$; 3) $y = \dfrac{1}{x-2}$; 4) $y = -\sqrt{x+1}$;

5) $y = \sqrt{x}$; 6) $y = -\sqrt{x-1}$; 7) $y = |x|$; 8) $y = |x-3|$;

9) $y = |x+3|$; 10) $y = x^3$; 11) $y = |x^3| + 4$; 12) $y = \dfrac{1}{2}|x^3| + 4$;

13) $y = x^2 - 5x + 6$; 14) $y = x^2 - 5|x| + 6$; 15) $y = \dfrac{6}{2-x}$;

16) $y = -(x^2 - 5|x| + 6)$; 17) $y = \sqrt{1-x}$; 18) $y = (x+3)^3 + 1$;

19) $y = |x^2 - 5x + 6|$; 20) $y = 2 - \sqrt{-x}$; 21) $y = |2x+3|$;

22) $y = \left(|x| - \dfrac{1}{2}\right)^3$; 23) $y = (2x+1)^2$; 24) $y = |x^3 - 1| - 3$.

ТЕМА 18. ПОНЯТТЯ МОДУЛЯ ЧИСЛА

18.1. Означення модуля числа та його властивості

Модуль *(modulus)* в перекладі з латинської мови означає «міра, розмір». Термін «модуль» вперше ввів в 1806 році французький математик Жорж Аргон. Модулем *додатного* числа і нуля називається те саме число. Для позначення модуля числа використовують дві вертикальні риски: «| |». Отже, $|2| = 2$; $|15{,}5| = 15{,}5$; $|0| = 0$. Модулем *від'ємного* числа називається протилежне йому додатне число.

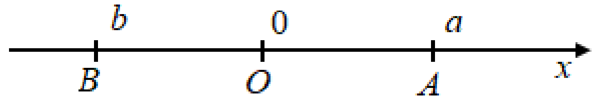
Наприклад, $|-5| = 5$; $\left|-2\frac{1}{2}\right| = 2\frac{1}{2}$.

У старших класах, коли учні вже знайомі з множиною дійсних чисел, означення модуля числа дають у вигляді такої системи

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases}$$

де a – довільне дійсне число.

На координатній прямій модуль – це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число. Модуль різниці двох чисел a і b – це відстань між точками a і b на координатній прямій.



$|a| = OA,\ |b| = OB,\ |a-b| = AB.$

У цьому полягає геометричний зміст модуля.

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати основні властивості модуля.

1. Модуль будь-якого числа – невід'ємне число: $|a| \geq 0.$

2. Модулі протилежних чисел рівні: $|-a| = |a|.$

3. Величина числа не перевищує величини його модуля: $a \leq |a|.$

4. Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$

Доведення. Якщо $a \geq 0$ *і* $b \geq 0$, то $|a| = a$, $|b| = b$ і $|ab| \geq 0$. Тоді $|ab| = ab = |a||b|.$

Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то $|a| = -a,\ |b| = -b, ab > 0$. Тоді $|ab| = ab = = (-a)(-b) = |a||b|.$

Якщо a і b мають різні знаки, наприклад, $a < 0,\ b \geq 0$, то $ab \leq 0$. Тоді $|ab| = -ab = (-a)b = |a||b|.$

Аналогічно розглядається випадок, коли $a \geq 0,\ b < 0.$

З даної рівності безпосередньо випливає, що ця властивість справджується і для добутку з n множників, тобто $|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|$, або $|a^n| = |a|^n.$

5. Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю): $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0).$

Доведення. З очевидної рівності $a = b \cdot \frac{a}{b}$ та з властивості $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ маємо $|a| = |b| \cdot \left|\frac{a}{b}\right|$. Звідси $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$

6. Модуль суми не перевищує суми модулів доданків: $|a+b| \leq |a| + |b|.$

Доведення. Розглянемо два випадки:

1) $a + b \geq 0$. Тоді $|a+b| = a+b.$

Проте $a \leq |a|,\ b \leq |b|$ і тому $|a+b| \leq |a| + |b|.$

Отже, нерівність $|a+b| \leq |a| + |b|$ справджується.

2) $a + b < 0$. Тоді $|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b).$

Оскільки $-a \leq |a|,\ -b \leq |b|$, то $(-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$

Співвідношення, отримані в обох випадках, загалом, доводять дану властивість.

Ця властивість поширюється на випадок довільного скінченного числа доданків, тобто $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$

7. $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$

Знання означення модуля числа та його властивостей дозволяє спрощувати вирази зі знаком модуля. В загальному модуль не стільки ускладнює приклад, як збільшує кількість прикладів, адже доводиться спрощувати не один вираз, а декілька.

Приклад.

Спростити вираз $C = \frac{c^2-4-|c-2|}{c^3+2c^2-5c-6}$.

Розв'язання. Областю допустимих значень даного виразу (ОДЗ) є множина всіх дійсних значень змінної c, для яких знаменник не дорівнює нулю, тобто $c \neq -3,\ c \neq -1,\ c \neq 2$. Розглянемо два можливі випадки:

1) Якщо $c > 2$, то

$$C = \frac{c^2-4-|c-2|}{c^3+2c^2-5c-6} = \frac{(c-2)(c+2)-(c-2)}{c^3+c^2+c^2+c-6c-6} =$$

$$= \frac{(c-2)(c+1)}{c^2(c+1)+c(c+1)-6(c+1)} = \frac{(c-2)(c+1)}{(c+1)(c^2+c-6)} =$$

$$= \frac{(c-2)(c+1)}{(c+1)(c-2)(c+3)} = \frac{1}{c+3}$$

2) Якщо $c < 2$, то

$$C = \frac{c^2-4+(c-2)}{c^3+2c^2-5c-6} = \frac{(c-2)(c+3)}{(c+1)(c-2)(c+3)} = \frac{1}{c+1}$$

Відповідь: якщо $c \in (-\infty;-3) \cup (-3;-1) \cup (-1;2)$,то $C = \frac{1}{c+1}$;

якщо $c \in (2;\infty)$,то $C = \frac{1}{c+3}$.

18.2. Рівняння з модулем

Рівняння і нерівності з модулем – це одна з найбільш цікавих і водночас складних тем шкільного курсу математики. Перенесення елементів рівняння з одної частини в іншу, множення та ділення обох частин рівняння на одне й те ж саме число, що не дорівнює нулеві дає змогу розв'язувати більш складні рівняння з модулем. Такі рівняння вимагають перевірки, що є хорошим тренуванням у виконанні дій над числами з різними знаками та зведенні подібних членів. Крім того, для учнів це – перша зустріч з перевіркою в рівняння, яка відкидає зайві корені. Це дозволяє показати дітям, що перевірка призначена не для виявлення помилок, зроблених в арифметичних діях. Отже, перевірка – це метод вилучення зайвих коренів. І саме в рівняннях з модулем перевірка є невід'ємною частиною знаходження його розв'язків.

Відносно методу розв'язування рівняння з модулем можна розв'язати за допомогою:

– означення;
– геометричного змісту;
– графіка;
– методу інтервалів;
– використання спеціальних співвідношень.

Відносно підмодульного виразу рівняння з модулем можна класифікувати так:

– просте – під знаком модуля є тільки змінна або число;
– складне – під знаком модуля міститься вираз;

– мішане – під знаком модуля знаходяться модулі змінних.

Розв'язування рівняння з модулем за означенням

Найпоширеніший, а інколи і єдино можливий спосіб розв'язування рівнянь із модулем – це розкриття модуля за означенням. Суть цього методу полягає в тому, що необхідно виділити аргумент з-під знака модуля за правилом

$$|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

Цей спосіб зручно застосовувати тоді, коли підмодульні вирази є досить простими, наприклад лінійні та квадратні рівняння з модулем.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $|x| = x^2 + x - 2$.

Розв'язання. Розглянемо два випадки:

1) якщо $x \geq 0$, то одержуємо рівняння $x = x^2 + x - 2$. Дане рівняння має два корені $x_1 = \sqrt{2}$ та $x_2 = -\sqrt{2}$. Враховуючи умову $x \geq 0$, розв'язком даного рівняння є лише корінь $x = \sqrt{2}$.

2) якщо $x < 0$, то одержуємо рівняння $-x = x^2 + x - 2$. Розв'язавши дане квадратне рівняння, отримаємо два корені $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ та $x_2 = -1 + \sqrt{3}$. Тільки корінь $x = -1 - \sqrt{3}$ задовольняє умові $x < 0$.

Відповідь: $x = \sqrt{2}$; $x = -1 - \sqrt{3}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{|x|}{x}(|x| - 3)(|x| + 3) - \frac{x^3}{|x|}(1 - x) = 18$

Розв'язання. Під час розв'язання даного рівняння використаємо означення модуля, та після перетворень отримаємо:

1) $\begin{cases} x > 0, \\ x^3 = 27, \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ x^3 = 9, \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{9}$, дана система не має розв'язків.

Відповідь: $x = 3$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{|x| + x} = \frac{x^2 - 9}{|x| + 3}$.

Розв'язання. Розкриваючи модуль, отримаємо сукупність двох систем:

1) $\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{2x} = x - 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2x = x^2 - 6x + 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 4 + \sqrt{7}, \\ x_2 = 4 - \sqrt{7}, \end{array} \right. \end{cases}$

Другий розв'язок рівняння не задовольняє систему.

2) $\begin{cases} x < 0, \\ 0 = -\frac{x^2 - 9}{x - 3}, \end{cases} \Leftrightarrow 0 = -x - 3, x = -3.$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 4 + \sqrt{7}. \end{array} \right.$

У загальному випадку рівняння $|f(x)| = g(x)$ можна розв'язати за допомогою означення, склавши сукупність таких двох систем:

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язування рівняння з модулем за допомогою геометричного змісту

При застосуванні геометричного змісту модуля знак модуля розкривається неявно, тобто не доводиться використовувати означення в явному вигляді. Застосування цього способу розв'язання часто дозволяє уникнути громіздких розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|3x - 5| = 7$.

Розв'язання. З геометричної точки зору $|3x - 5|$ – це відстань від точки 0 до точки $3x - 5$. За умовою рівняння вона дорівнює 7, але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число –7). Отже, рівність $|3x - 5| = 7$ можлива тоді і тільки тоді, коли

$$3x - 5 = 7 \text{ або } 3x - 5 = -7,$$

$$x = 4 \text{ або } x = -\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $x = 4$; $x = -\frac{2}{3}$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2, \\ x^2 - 4xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Враховуючи, що $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2} = |x - 1|$ та $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2} = |x + 1|$ використовуючи геометричний зміст модуля, випливає, що $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} +$ $+\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq 2$ для всіх x та y. Отже, рівність виконується при $y = 0$, $|x| \leq 1$. Тоді з другого рівняння системи отримаємо $x = 0$.

Відповідь: $(0; 0)$.

Варто зазначити, що використовувати геометричний зміст модуля можна лише до рівнянь певного типу. Загальна схема розв'язування рівнянь з модулем за допомогою геометричного змісту така:

1. $|f(x)| = a \leftrightarrow f(x) = a$ або $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow f(x) = g(x)$ або $f(x) = -g(x)$.

Розв'язування рівнянь з модулем графічним способом

Одним із способів розв'язування рівнянь, що містять модуль, є графічний спосіб. Його суть полягає в тому, щоб побудувати графіки функцій, які входять до обох частин рівняння. Якщо побудовані графіки перетнуться, то коренями рівняння будуть точки перетину графіків функцій. У випадку, коли графіки не перетнуться, можна зробити висновок, що рівняння розв'язків не має.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $|x^2 - x| + |x - 1| = 0$ графічним способом.

Розв'язання. Виділимо із рівняння функції, графіки яких потрібно побудувати. Одержимо дві функції, що містять модуль:

1) $y = |x^2 - x|$;

2) $y = -|x - 1|$.

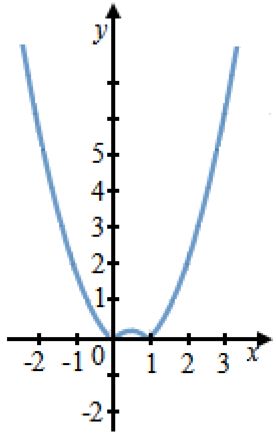


Рис. 80

Щоб побудувати графік першої функції (Рис. 80) необхідно побудувати графік функції

$$y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

а тоді ту частину графіка, яка знаходиться нижче осі *Ox* симетрично відобразити відносно цієї осі.

Щоб побудувати графік другої функції (Рис. 81) необхідно побудувати графік функції $y = |x|$. Одержаний графік симетрично відобразити відносно осі *Ox* і паралельно перенести на одну одиницю вправо. В результаті одержимо наступний графік

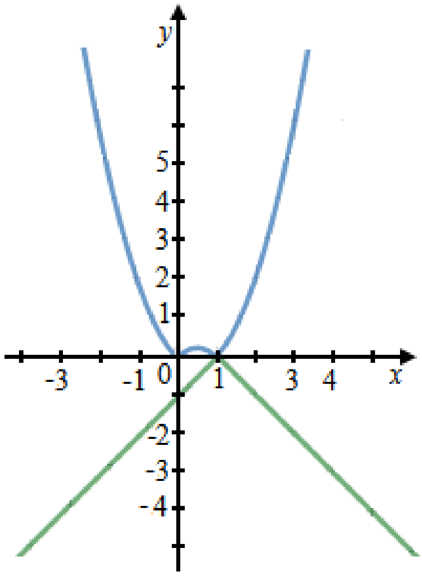


Рис. 81

Із рисунка видно, що рівняння має лише один розв'язок, а саме $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Варто зазначити, що розв'язування рівнянь з модулем графічним способом займає багато часу, а результати розв'язування, одержані цим способом не завжди є точними, тому його застосовують не часто.

Розв'язування рівнянь з модулем методом інтервалів

Найчастіше рівняння із модулем розв'язують за допомогою методу інтервалів. Цей метод є менш трудомістким і більш ефективним, так як він дозволяє наочно зобразити розв'язки кожної із нерівностей. У загальному випадку цей метод застосовується до рівнянь, що містять алгебраїчну комбінацію двох і більше модулів, тобто до рівнянь такого вигляду $|f(x)| + |g(x)| + \cdots = h(x)$. Суть методу інтервалів полягає в наступному:

1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ).

2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.

3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.

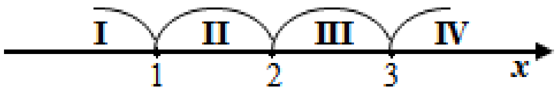
4. Знайти розв’язок у кожному з проміжків і перевірити, чи входить цей розв’язок у розглянутий проміжок.

Приклад 7. Розв’язати рівняння $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

Розв’язання.

1. ОДЗ: $(-\infty;\infty)$.

1. Нулі підмодульних функцій: $x=1$; $x=2$; $x=3$. Дані нулі розбивають область допустимих значень на чотири проміжки. Потрібно знайти розв’язки заданого рівняння на кожному із цих проміжків.



3. Розв’яжемо рівняння на першому проміжку:

$$\begin{cases} x<1, \\ -x+1+2x-4-3x+9=4; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x<1, \\ -2x=-2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x<1, \\ x=1. \end{cases}$$

Дана система розв’язку не має.

На другому проміжку рівняння матиме наступний розв’язок:

$$\begin{cases} 1\le x<2, \\ x-1+2x-4-3x+9=4; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 1\le x<2, \\ 4=4. \end{cases}$$

Розв’язком цієї системи є проміжок $1\le x<2$.

Розв’яжемо задане рівняння на третьому проміжку:

$$\begin{cases} 2\le x<3, \\ x-1-2x+4-3x+9=4; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2\le x<3, \\ -4x=-8; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2\le x<3, \\ x=2. \end{cases}$$

Звідси $x=2$.

На четвертому проміжку одержимо такий розв’язок:

$$\begin{cases} x\ge 3, \\ x-1-2x+4+3x-9=4; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\ge 3, \\ 2x=10; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x\ge 3, \\ x=5. \end{cases}$$

Звідси $x=5$.

4. Об’єднуючи всі розв’язки, які ми одержали в кожному з проміжків, маємо розв’язок заданого рівняння на всій області допустимих значень.

Відповідь: $1\le x\le 2$; $x=5$.

Приклад 8.

Розв'язати рівняння: $|x^2-3x+2|+|-2x^2+x-1|+x-1=0$.

Розв'язання. Функція під першим знаком модуля має корені $x=1$; $x=2$, а дискримінант другого квадратного тричлена від'ємний, тому даному рівнянню відповідає така система:

$$\begin{cases} 3x^2-3x+2=0, & x\in(-\infty;1], \\ x^2+3x-2=0, \quad \text{якщо} & x\in(1;2], \\ 3x^2-3x+2=0, & x\in(2;\infty). \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо рівносильну сукупність мішаних систем:

$$\begin{cases} 3x^2-3x+2=0, \\ \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;1], \\ x\in(2;\infty), \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x^2-3x+2=0, \\ x\in(2;2]. \end{cases}$$

Перша і друга системи не мають розв'язків.

Відповідь: рівняння не має розв'язків.

Інші способи розв'язування рівнянь з модулем

Якщо у рівнянні ліва і права його частини знаходяться під знаком модуля, то можна скористатися наступною спеціальною властивістю:

$$|f(x)|=|g(x)| \leftrightarrow f^2(x)=g^2(x). \qquad (*)$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $|3x-2|=3|x-1|$.

Розв'язання. Оскільки обидві частини рівняння є невід'ємними числами, то використавши властивість (*), матимемо $(3x-2)^2=(3(x-1))^2$.

Або $(3x-2)^2-\left(3(x-1)\right)^2=0$.

Скориставшись формулою різниці квадратів, одержимо

$(3x-2-3(x-1)\left(3x-2+3(x-1)\right)=0$.

$6x-5=0$.

$x=\dfrac{5}{6}$.

Відповідь: $x=\frac{5}{6}$.

За властивістю $|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$ розв'яжемо наступне завдання.

Приклад 10.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \left|y+\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{13}{6}+x-y\right|=\frac{13}{6}+x+\frac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\frac{97}{36}. \end{cases}$

Розв'язання. Із першого рівняння системи маємо:

$$\begin{cases} y+\dfrac{1}{x}>0, \\ \dfrac{13}{6}+x-y>0. \end{cases}$$

Додавши почленно ці нерівності, отримаємо: $\frac{13}{6}+x+\frac{1}{x}\geq 0$

Оскільки за умовою $x>0$, то $x^2+\frac{13}{6}x+1\leq 0$ $0<y\leq\frac{13}{6}+x$ (отримаємо з другої нерівності системи), тобто $y^2\leq\left(\frac{13}{6}+x\right)^2$. Додамо до обох частин останньої нерівності x^2 і отримаємо:

$$x^2+y^2\leq\left(\frac{13}{6}+x\right)^2+x^2,$$
$$\frac{169}{36}+\frac{13}{6}x+2x^2\geq\frac{97}{36},$$
$$2x^2+\frac{13}{6}x+2\geq 0,$$
$$x^2+\frac{13}{6}x+1\geq 0.$$

Отже, квадратний тричлен $x^2+\frac{13}{6}x+1$ набуває тільки значення, яке дорівнює 0.

$x^2+\frac{13}{6}x+1=0$, звідси $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{2}{3}$

Із другого рівняння системи, враховуючи, що $y>0$, маємо: $y=\sqrt{\frac{97}{36}-x^2}$.

Якщо $x=-\frac{3}{2}$, то $y=\frac{2}{3}$; якщо $x=-\frac{2}{3}$, то $y=\frac{3}{2}$.

Відповідь: $\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$.

Зауважимо, що при розв'язування рівнянь з модулем інколи доцільно застосовати і такі властивості:

$$|f(x)|+|g(x)|=f(x)-g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\leq 0; \end{cases}$$
$$|f(x)|+|g(x)|=-f(x)+g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\geq 0; \end{cases}$$
$$|f(x)|+|g(x)|=-f(x)-g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\leq 0. \end{cases}$$

Для розв'язування наступного рівняння потрібно використати нерівність

$$|a|+|b|\geq|a+b|$$

Приклад 11. Розв'язати рівняння $|x-1|+|x-3|=2-\left(x-\frac{\pi^2}{4}\right)^4$.

Розв'язання. Очевидно, що $2-\left(x-\frac{\pi^2}{4}\right)^4 \leq 2$ при довільному x. Для оцінки лівої частини рівняння застосуємо властивість $|a|+|b| \geq |a+b|$.

Отримаємо: $|x-1|+|x-3| \geq 2$.

Таким чином, вихідне рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2-\left(x-\dfrac{\pi^2}{4}\right)^4=2, \\ |x-1|+|x-3|=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi^2}{4}, \\ x\epsilon[1;3], \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi^2}{4}.$$

Відповідь: $x=\frac{\pi^2}{4}$

Розв'язування рівняння з модулем мішаного типу

У попередніх пунктах розглянуті основні підходи до розв'язування рівнянь зі знаком модуля. Але слід пам'ятати, що в багатьох задачах доведеться застосовувати не один з цих прийомів, а їх комбінацію. Найчастіше це трапляється тоді, коли маємо рівняння з модулем мішаного типу.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\big||x|-1\big|=x+1$.

Розв'язання. Розкриємо спочатку зовнішній модуль, а потім внутрішній, користуючись означенням модуля.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x|-1\geq 0, \\ |x|-1=x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} |x|-1<0, \\ -|x|+1=x+1. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x|\geq 1, \\ |x|=x+2, \end{cases} \\ \begin{cases} |x|<1, \\ |x|=-x. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0, \\ x\geq 1, \\ x=x+2, \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ -x\geq 1, \\ -x=x+2, \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0, \\ x<1, \\ x=-x, \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ -x<1, \\ -x=-x, \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge 1, \\ 0 \ne 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \le -1, \\ x = -1, \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x < 1, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x > -1, \\ -x = -x, \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \begin{cases} x < 0, \\ x > -1. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in [-1; 0]$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\big||x+1| - |x-3|\big| = |x|$.

Розв'язання. Позбавимось від внутрішніх модулів за означенням модуля.

1. Якщо $x < -1$, то $|-x-1+x-3| = |x|$ або $|x| = 4$, звідки $x = -4$ або $x = 4$. Умові задовольняє тільки $x = -4$.

2. Якщо $x \in [-1; 3]$, то рівняння перепишеться так: $|x+1+x-3| = |x|$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату. Маємо: $(2x-2)^2 = x^2$, звідки $x = \frac{3}{2}$ та $x = 2$, причому обидва значення належать проміжку, що розглядається.

3. Якщо $x > 3$, то маємо $|x| = 4$, звідки $x = -4$ або $x = 4$. Умові задовольняє тільки $x = -4$.

Відповідь: $-4;\ \frac{2}{3};\ 2;\ 4.$

При розв'язуванні було використано два способи: означення модуля та піднесення до квадрату.

18.3. Розв'язування нерівностей з модулем

Нерівність, що містить змінну під знаком модуля, називається нерівністю з модулем. При розв'язуванні нерівностей з модулем використовують ті самі методи, що і при розв'язуванні рівнянь з модулями. Ідея розв'язування полягає в тому, щоб звільнитися від модуля і перейти до нерівності, яка не містить модуля і розв'язується відомим способом.

Нерівності з модулем можна розв'язати наступними способами:

1) за означенням;
2) використовуючи геометричний зміст модуля;
3) методом інтервалів;
4) графічним способом;
5) використовуючи спеціальні властивості модуля;
6) способом заміни змінних;
7) методом розкладу на множники;

8) використовуючи декілька способів одночасно.

Розглянемо детальніше кожен із цих способів.

Розв'язування нерівностей з модулем за означенням

Розглянемо нерівність $|f(x)| \vee g(x)$, де знак «$\vee$» означає значення якогось із знаків нерівності, тобто «>», «<», «$\geq$» або «$\leq$». Розв'язуючи дану нерівність за означенням, одержимо сукупність систем нерівностей:

$$|f(x)| \vee g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \vee g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \vee g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 1. Розв'язати нерівність $|5x-3| > x^2 - x - 2$.

Розв'язання. Використовуючи означення модуля, матимемо

$$|5x-3| > x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x-3 \geq 0, \\ 5x-3 > x^2 - x - 2; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x-3 < 0, \\ 3-5x > x^2 - x - 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) Розв'яжемо першу систему нерівностей:

$$\begin{cases} 5x-3 \geq 0, \\ 5x-3 > x^2 - x - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 3, \\ x^2 - 6x + 1 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{5}, \\ 3 - 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{3}{5}; 3 + 2\sqrt{2}\right).$$

2) Розв'яжемо другу систему нерівностей:

$$\begin{cases} 5x-3 < 0, \\ 3-5x > x^2 - x - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x < 3, \\ x^2 + 4x - 5 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{5}, \\ -5 < x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5; 1).$$

3) Об'єднавши множини отриманих розв'язків, отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} x \in \left[\dfrac{3}{5}; 3 + 2\sqrt{2}\right), \\ x \in (-5; 1); \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-5;\ 3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Відповідь: $x \in \left(-5;\ 3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Розв'язування нерівностей з модулем за допомогою геометричного змісту модуля

Використовуючи геометричний зміст модуля дійсного числа, можна розв'язати наступні нерівності з модулями.

1. Нехай $a > 0$, тоді

а) $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$;

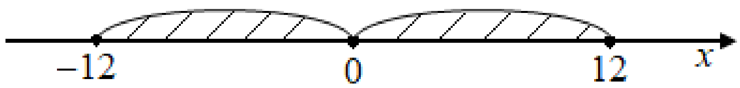
б) $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right.$;

в) $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$;

г) $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq -a \\ f(x) \geq a \end{array}\right.$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $|3^x - 15| \leq 12$.

Розв'язання. Враховуючи геометричний зміст модуля дану нерівність задовольнять всі точки осі *Ox*, які знаходяться від 0 на відстані 12. Це точки проміжку від –12 до 12.



Отже, $-12 \leq |3^x - 15| \leq 12$,

$-12 + 15 \leq 3^x \leq 12 + 15$,

$3 \leq 3^x \leq 27$,

$3 \leq 3^x \leq 3^3$.

Так як функція $y = 3^x$ зростаюча, то $1 \leq x \leq 3$.

Відповідь: $x \in [1; 3]$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $|x^2 + 2x - 2| \leq 1$.

Розв'язання. Задана нерівність з модулем рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 \leq 1, \\ x^2 + 2x - 2 \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0, \\ x^2 + 2x - 1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1) \leq 0, \\ \left(x + 1 + \sqrt{2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{2}\right) \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язком нерівності є перетин проміжків $[-3; 1]$ і $\left[-1 - \sqrt{2};\ -1 + \sqrt{2}\right]$.

Відповідь: $x \in [-3; 1] \cup \left[-1 - \sqrt{2};\ -1 + \sqrt{2}\right]$.

2. Нехай $a < 0$, тоді

а) $|f(x)| < a$ – не має розв'язків;

б) $|f(x)| > a$ – є нескінченна множина розв'язків $x \in R$;

в) $|f(x)| \leq a$ – не має розв'язків;

г) $|f(x)| \geq a$ – розв'язком є будь-яке дійсне число.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\left|\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 9}\right| \geq -1$

Розв'язання. Нерівність виконується в кожній точці, що належить області допустимих значень, бо права частина нерівності від'ємна. Областю допустимих значень даної нерівності є всі точки числової осі, крім $x = \pm 3$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; \infty)$.

2. Нехай $a = 0$, тоді

а) $|f(x)| < 0$ – не має розв'язків;

б) $|f(x)| > 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$;

в) $|f(x)| \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$;

г) $|f(x)| \geq 0 \Leftrightarrow x \in R$.

Розв'язування нерівностей виду $|f(x)| < g(x)$

Нерівності такого виду зводяться до системи раціональних нерівностей. Врахувавши, що вираз $g(x)$ повинен набувати лише додатних значень, дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ -f(x) > g(x). \end{cases}$

Зауважимо, що у разі нестрогої нерівності усі знаки нерівностей доповнюються знаком рівності.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $|x^2 - 4x + 1| < 2x + 1$.

Розв'язання. Права частина нерівності може набувати тільки додатних значень, тому маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ -(2x + 1) < x^2 - 4x + 1 < 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ -2x - 1 < x^2 - 4x + 1, \\ x^2 - 4x + 1 < 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x^2 - 2x + 2 > 0, \\ x^2 - 6x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x \in R, \\ x(x - 6) < 0. \end{cases}$$

Знайшовши перетин розв'язків нерівностей, з яких складається система, отримаємо: $x \in (0; 6)$.

Відповідь: $x \in (0; 6)$..

Розв'язування нерівностей виду $|f(x)| > g(x)$

Дана нерівність рівносильна такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in \text{ОДЗ}, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) < -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 6. Розв'язати нерівність $|x^2 + x - 2| > x$.

Розв'язання. Задана нерівність з модулем рівносильна сукупності трьох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \in R, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 > x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 < -x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x \in R, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ (x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3}) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для того, щоб знайти розв'язок сукупності, потрібно знайти об'єднання проміжків, що є розв'язками систем сукупності.

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -1+\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \infty\right)$.

Розв'язування нерівностей з модулем методом інтервалів

Методом інтервалів розв'язують нерівності з модулем такого виду:
$a_1|f_1(x)| + a_2|f_2(x)| + \cdots + a_n|f_n(x)| \vee g(x)$,
де знак «$\vee$» означає значення якогось із знаків нерівності, тобто «>», «<», «≤» або «≥». Нагадаємо алгоритм для розв'язування нерівностей з модулем за допомогою методу інтервалів:

1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ).
2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.
3. Відмітити нулі функції на ОДЗ і розбити ОДЗ на множини (інтервали).
4. Визначити знаки всіх підмодульних функцій на кожному інтервалі.
5. Знайти розв'язки нерівності на кожному інтервалі (множині).

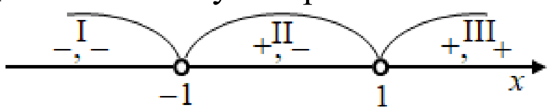
Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x+1| + |x-1| > 6$.

Розв'язання.

1) ОДЗ: $x \in R$.

2) Нулі підмодульних функцій: $x+1=0$, $x=-1$; $\quad x-1=0$, $x=1$.

3) Відмітимо нулі функцій і розіб'ємо ОДЗ на інтервали. Вкажемо знаки всіх підмодульних функцій на кожному інтервалі



4) Розв'яжемо нерівність на кожному з інтервалів.

I. $\begin{cases} x < -1, \\ -(x+1)-(x-1) > 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -2x > 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x < -3; \end{cases} \Rightarrow x < -3.$

II. $\begin{cases} -1 \le x < 1, \\ x+1-(x-1) > 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 1, \\ 2 > 6; \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing.$

III. $\begin{cases} x \ge 1, \\ x+1+x-1 > 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ 2x > 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x > 3; \end{cases} \Rightarrow x > 3.$

Об'єднавши розв'язки на всіх трьох проміжках, отримаємо

$$x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність: $|x+2| + |x-3| > x+5$.

Розв'язання. Відмітивши на числовій осі ті значення x, при яких вирази під знаками модуля перетворюються на нуль, одержуємо три інтервали, на кожному з яких ці вирази знакосталі:

1) $-\infty < x < -2$, $\qquad$ 2) $-2 \le x \le 3$, $\qquad$ 3) $3 < x < \infty$.

Враховуючи, що на кожному з цих інтервалів вирази під модулем не змінюють знак, складемо і розв'яжемо сукупність трьох систем нерівностей, розкривши модулі за означенням на кожному з інтервалів.

1) $\begin{cases} -\infty < x \leq -2, \\ -x - 2 - x + 3 > x + 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < x \leq -2, \\ x < -\frac{4}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2.$

2) $\begin{cases} -2 < x \leq 3, \\ x + 2 - x + 3 > x + 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -3, \\ x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 0.$

3) $\begin{cases} 3 < x < \infty, \\ x + 2 + x - 3 > x + 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < \infty, \\ x > 6, \end{cases} \Leftrightarrow x > 6.$

Таким чином, маємо сукупність трьох нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ -2 < x < 0, \\ x > 6. \end{array}\right.$$

Розв'язавши графічно, знайдемо об'єднання розв'язків усіх трьох нерівностей.

Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$..

Розв'язування нерівностей виду $|f(x)| \vee |g(x)|$.

Нерівності даного виду можна розв'язати, використовуючи спеціальні співвідношення, а саме:

1. $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) < 0.$
2. $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \leq 0.$
3. $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) > 0.$
4. $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geq g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \geq 0$

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|2x^2 + 5x - 7| > |2x^2 - 2|$.

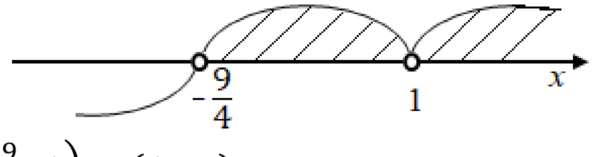
Розв'язання. Піднесемо обидві частини цієї нерівності до квадрата і подамо отриману рівносильну нерівність у вигляді різниці квадратів:

$$(2x^2 + 5x - 7)^2 - (2x^2 - 2)^2 > 0.$$

Застосуємо формулу різниці квадратів двох виразів, звідки одержимо рівносильну нерівність: $(5x - 5)(4x^2 + 5x - 9) > 0$.

Або, $5(x - 1)(x - 1)\left(x + \frac{9}{4}\right) > 0.$

Дану нерівність розв'яжемо методом інтервалів, матимемо:



Відповідь: $x \in \left(-\frac{9}{4}; 1\right) \cup (1; \infty)$..

Приклад 10. Розв'язати нерівність: $\frac{(|x+3|-|x|)(|x+5|-|x-2|)}{(|x-7|-|x+2|)} \leq 0.$

Розв'язання. Якщо кожний множник даної нерівності замінити за спеціальною властивістю модуля, то отримаємо рівносильну нерівність:

$$\frac{((x + 3)^2 - x^2)((x + 5)^2 - (x - 2)^2)}{((x - 7)^2 - (x + 2)^2)} \leq 0$$

Використавши формулу різниці квадратів двох виразів, спростимо нерівність:

$$\frac{(6x+9)(14x+21)}{-18x+45} \le 0.$$

Тоді вихідна нерівність набуде вигляду:

$$\frac{21(2x+3)^2}{-9(2x+5)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)^2}{2x+5} \ge 0.$$

Розв'язком цієї нерівності є $x \in \{-1{,}5\} \cup (2{,}5; \infty)$.

Відповідь: $x \in \{-1{,}5\} \cup (2{,}5; \infty)$.

Приклад 11. Розв'язати нерівність $\frac{2}{|x-2|} > \left|-\frac{3}{2x-1}\right|$.

Розв'язання. Оскільки обидві частини нерівності додатні, то при $x \ne \frac{1}{2}$, $x \ne 2$ вона рівносильна такій нерівності: $\frac{|x-2|}{2} < \frac{|2x-1|}{3}$.

Піднісши обидві частини нерівності до квадрата, перенісши всі члени в ліву частину та перетворивши одержаний вираз за формулою різниці квадратів, одержимо нерівність: $(7x-8)(x+4) > 0$.

Розв'язавши останню нерівність, отримаємо розв'язок $x \in (-\infty; -4) \cup$ $\cup \left(\frac{7}{8}; \infty\right)$

Відповідь: $x \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{7}{8}; 2\right) \cup (2; \infty)$.

Розв'язування нерівностей з модулем графічним способом

Нерівності з великою кількістю лінійних виразів під знаками модулів зручно розв'язувати графічно, оскільки у цьому разі розкриття модулів за означенням технічно ускладнює розв'язання задачі.

Приклад 12. Розв'язати нерівність

$$|x+2| - |x+1| + |x| - |x-1| + |x-2| \ge 4.$$

Розв'язання. Графіком лівої частини нерівності буде неперервна ламана лінія, яку легко побудувати за виразами тільки на двох проміжках $(-\infty; -2] \cup$ $\cup [2; \infty)$і за значеннями $f(x)$ в точках $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

Складемо таблицю:

x	$(-\infty; -2)$	–2	–1	0	1	2	$(2; \infty)$
$y(x)$	$y - x$	2	3	2	3	2	$y = x$

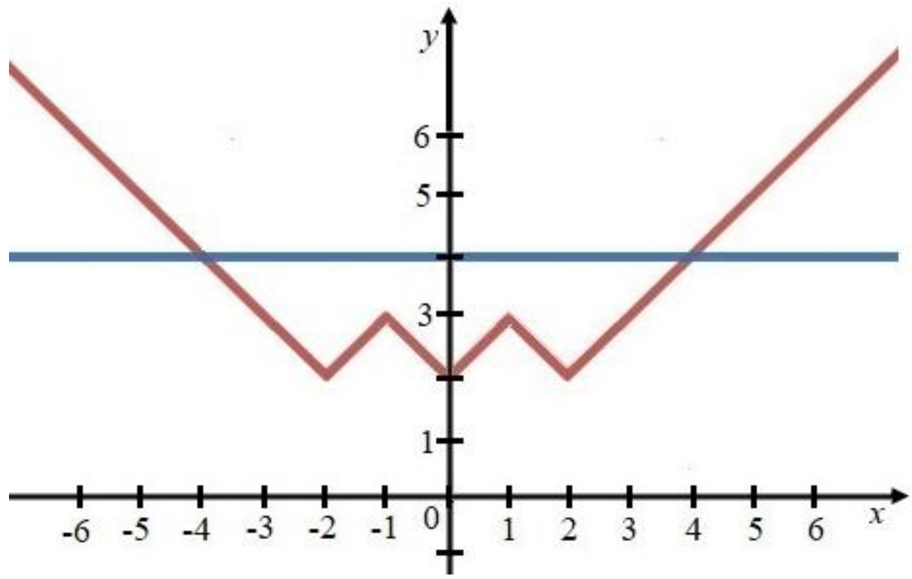


Рис. 82

Відповідь: $x \in (-\infty; 4] \cup [4; \infty)$.

Розв'язування нерівностей з модулем за допомогою заміни змінної

Приклад 13. Розв'язати нерівність $-\frac{2}{|x|+1} > |x| - 2$.

Розв'язання. Покладемо $|x| = y \geq 0$, тоді нерівність набуде вигляду:

$$-\frac{2}{y+1} > y - 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{y^2 - y}{y+1} < 0$$

Оскільки $y + 1 > 0$ при всіх $y \geq 0$,

то $y^2 - y < 0 \Leftrightarrow y(y-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1$.

Повертаючись до заміни, отримаємо $0 < |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Відповідь: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Зауважимо, що дану нерівність можна було б розв'язати і методом інтервалів, однак застосувавши заміну отримати результат в даному випадку можна швидше.

Приклад 14. Розв'язати нерівність $\sqrt{x + 2\left(2 - \sqrt{3+x}\right)} < \frac{x+5}{4-5\sqrt{3+x}}$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{3+x} = t$, тоді $x = t^2 - 3$, $t \geq 0$. Отже, нерівність набуває вигляду: $|t - 1| < \frac{t^2+2}{4-5t}$.

При $t \leq 1$, маємо $1 - t < \frac{t^2+2}{4-5t}$. Розв'язки цієї нерівності з урахуванням умови $t \in [0; 1]$: $t \in \left(\frac{1}{4}; \frac{4}{5}\right)$ звідки $\frac{1}{4} < \sqrt{3+x} < \frac{4}{5}$, тоді $-2\frac{15}{16} < x < -2\frac{9}{25}$.

При $t > 1$, маємо: $t - 1 < \frac{t^2+2}{4-5t}$, тобто $\frac{6t^2-9t+6}{4-5t} > 0$.

Оскільки $6t^2 - 9t + 6 > 0$ для будь-яких t, то $t < \frac{4}{5}$, що не задовольняє умову $t > 1$.

Розв'язування нерівностей зі складним модулем

Приклад 15. Розв'язати нерівність $\big|2x-|3-x|\big|>2$.

Розв'язання. Розкриємо внутрішній модуль.

1) Якщо $x<3$, то нерівність набуде вигляду:

$$|2x-3+x|>2 \Leftrightarrow |3x-3|>2 \Leftrightarrow |x-1|>\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1>\frac{2}{3}, \\ x-1<-\frac{2}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{5}{3}, \\ x<\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Враховуючи область, яку розглянули, матимемо $\left[\begin{array}{l} x<\frac{1}{3}, \\ \frac{5}{3}<x<3. \end{array}\right.$

2) Якщо $x\geq 3$, то маємо:

$$|2x+3-x|>2 \Leftrightarrow |x+3|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3>2, \\ x+3<-2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>-1, \\ x<-5. \end{array}\right.$$

Враховуючи область, яку розглянули, матимемо $x\geq 3$.

3) Поєднуючи розв'язки в обох проміжках, одержуємо відповідь

$$x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3};\infty\right).$$

Відповідь: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3};\infty\right)$.

Приклад 16. Розв'язати нерівність $\left||x|^{\log_x 4}-\sqrt{x^2}\right|<x+1$.

Розв'язання. Областю визначення даної нерівності є: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

Використовуючи основну властивість логарифмів, маємо:

$$\left||x|^{\log_x 4}-\sqrt{x^2}\right|<x+1 \Leftrightarrow |4-x|<x+1 \Leftrightarrow -x-1<x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4<1, \\ 2x>3; \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $x\in\left(\frac{3}{2};\infty\right)$.

18.4. Побудова графіків функцій з модулями

Вивчення поведінки функцій і побудова їх графіків є важливим розділом курсу математики. Вільне володіння технікою побудови графіків часто допомагає вирішувати складні задачі, а часом є єдиним засобом їх розв'язку. Крім того, уміння будувати графіки функцій становить великий інтерес для самих учнів.

Коли в «стандартні» функції, які задають прямі, параболи, гіперболи, включають знак модуля, їх графіки стають незвичайними. Щоб навчитися будувати такі графіки, треба добре розуміти визначення модуля й знати види найпростіших графіків.

Розглянемо побудову таких графіків функцій: $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$ та $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$.

Побудова графіка функції $y = f(|x|)$

Нагадаємо, що графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

На підставі означення модуля графік функції $y = f(|x|)$ можна побудувати наступним чином:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Виходячи з того, що функція $y = f(x)$ парна, бо $|x| = |-x|$, можна сформулювати алгоритм побудови функції $y = f(|x|)$:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$, де $x \geq 0$;

2) побудований графік симетрично відобразити відносно осі *Oy*.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = -2|x| + 5$.

Розв'язання.

Після розв'язання такого виду завдань можна зробити деякі узагальнення, а саме:

а) коли перед $|x|$ стоїть знак плюс, то пів прямі направлені вгору, а коли стоїть знак мінус – униз;

б) коли в формулі $y = k|x| + b$ число b – додатне, то графік функції $y = k|x|$ переміщується на $|b|$ одиниць вгору вздовж осі y, а коли b число від'ємне, то на $|b|$ одиниць униз.

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 3|x| + 2$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = x^2 - 3x + 2$ для $x \geq 0$.

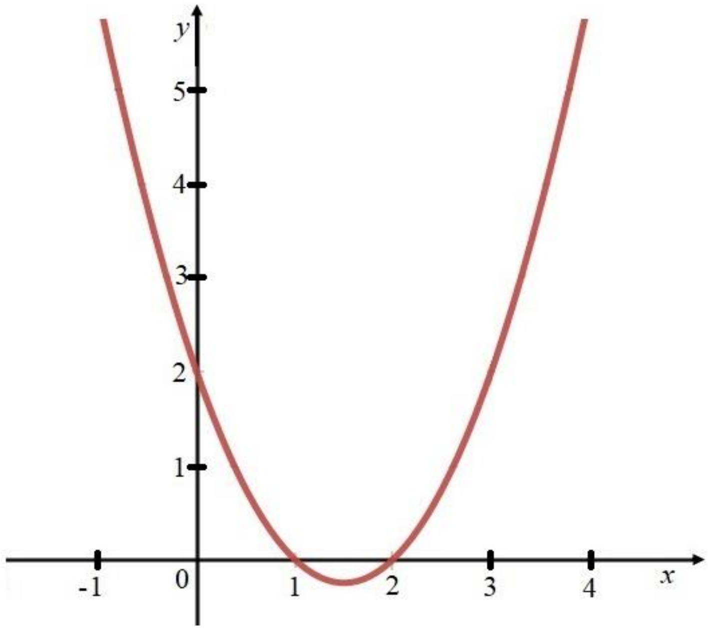


Рис. 83

Отриманий графік симетрично відобразимо відносно осі *Oy*. Матимемо

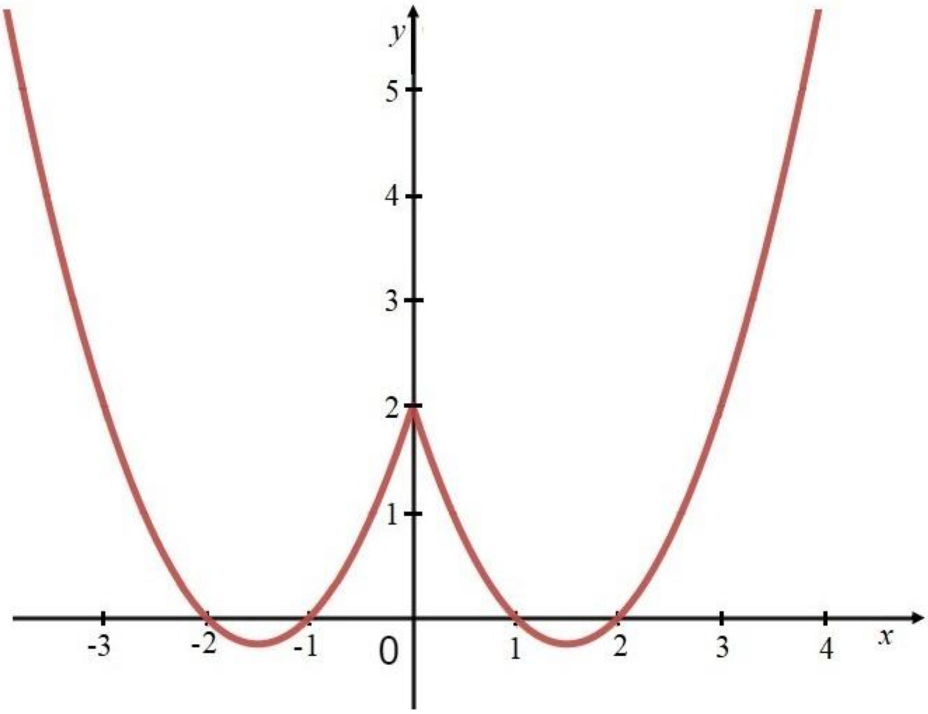


Рис. 84

Побудова графіка функції $y = |f(x)|$

Зауважимо, що дана функція не є парною. З формули, якою задана функція видно, що вона набуває лише невід'ємних значень. Отже, її графік розміщується лише у першому та другому координатних кутах. З означення модуля випливає, що

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Спираючись на ці міркування приходимо до висновку: щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$ треба:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;

2) ту частину графіка, що розташована вище осі *Ox* залишити без змін;

3) ту частину графіка, що розташована нижче осі *Ox*, відобразити симетрично відносно цієї осі.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = |2\ln x + 1|$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = 2\ln x + 1$.

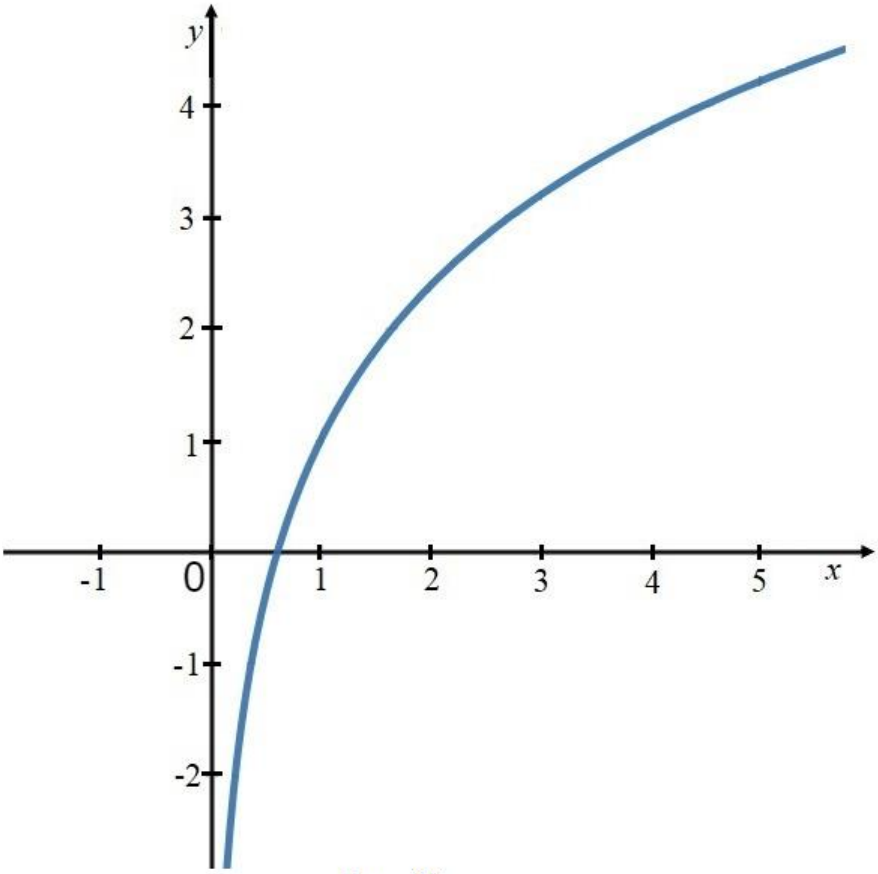


Рис. 85

Використовуючи сформульований вище алгоритм, отримаємо наступний графік.

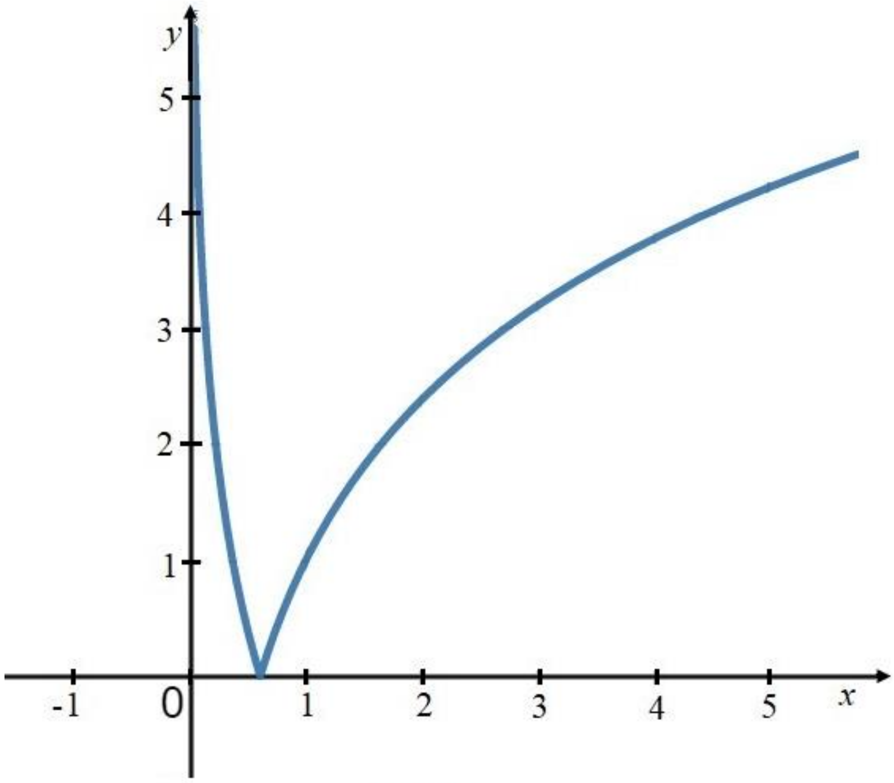


Рис.86

Побудова графіка функції $y = |f(|x|)|$.

Для побудови графіка $y = |f(|x|)|$ треба:

1) побудувати графік функції $y = f(|x|)$;

2) залишити без змін усі частини побудованого графіка, які розташовані вище від осі Ox;

3) частини графіка, розташовані нижче від осі абсцис, симетрично відобразити відносно цієї осі.

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = |x^2 - 6|x| + 8|$.

Розв'язання. Скориставшись описаним вище алгоритмом, матимемо:

1) будуємо параболу $y = x^2 - 6x + 8$, де $x \geq 0$, з вершиною в точці $(3; -1)$ та точками перетину з осями координат $(2; 0)$, $(4; 0)$ і $(0; 8)$;

2) частину параболи, яка знаходиться справа від осі ординат, симетрично відобразимо відносно осі ординат;

3) частину графіка, яка знаходиться нижче від осі абсцис, симетрично відобразимо відносно цієї осі.

Отже, маємо графік функції $y = |x^2 - 6|x| + 8|$.

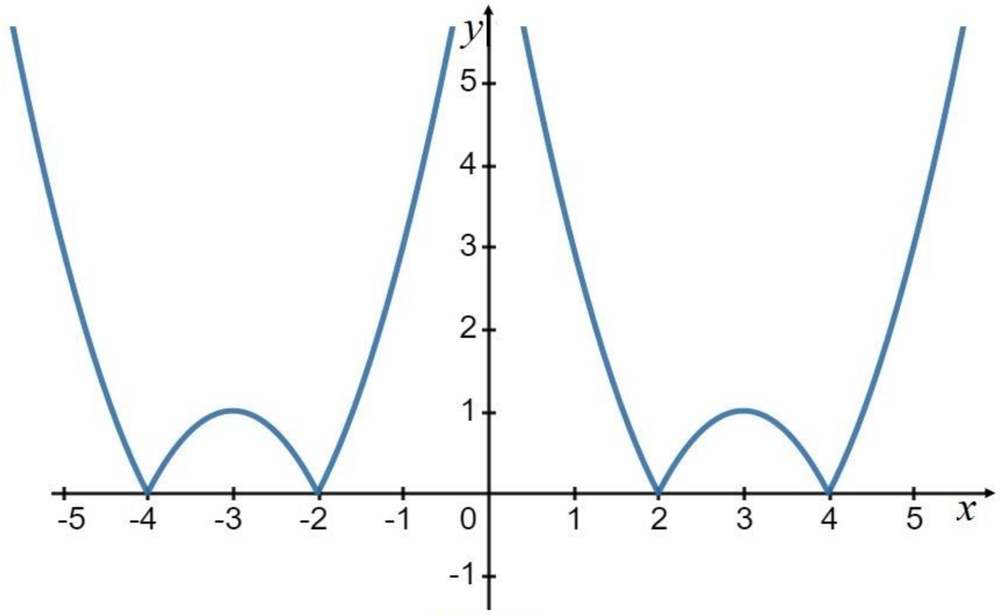


Рис. 87

Побудова графіка функції $|y| = f(x)$.

Областю визначення даної функції є всі ті значення аргументу x, при яких функція $y = f(x)$ є невід'ємною. Із означення модуля маємо:

$$|y| = f(x) = \begin{cases} \text{не існує, } & \text{якщо } f(x) < 0, \\ \pm f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Отже, графік рівняння $|y| = f(x)$ можна побудувати так:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, де $f(x) > 0$;

2) побудований графік симетрично відобразити відносно осі Ox.

Приклад 5. Побудувати графік функції $|y| = \sin x$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = f(x)$ на тій частині координатної площини, де $\sin x \geq 0$.

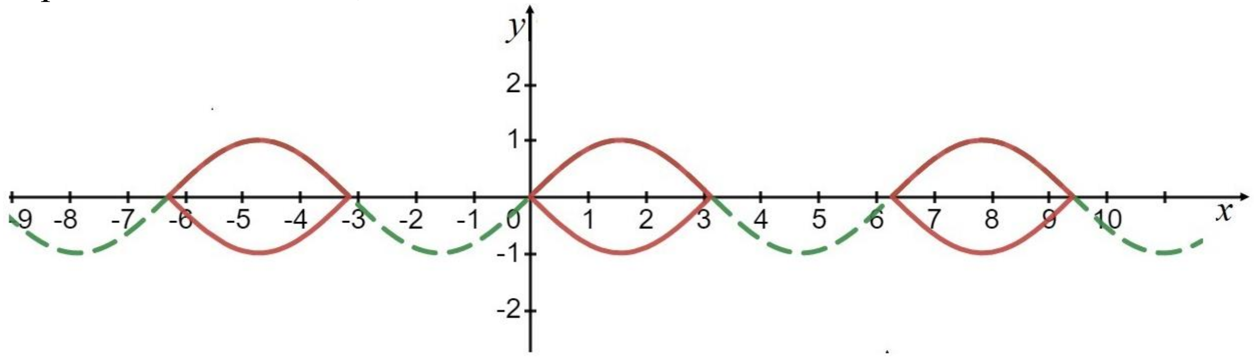


Рис. 88

Побудова графіка функції $|y| = |f(x)|$.

Враховуючи властивість модуля дана функція буде рівносильна рівнянню: $y^2 - f^2(x) = 0$. Розв'язок останнього рівняння – це розв'язок сукупності

$$\left[\begin{array}{l} y = f(x), \\ y = -f(x). \end{array}\right.$$

Отже, для побудови графіка функції $|y| = |f(x)|$ треба:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;

2) до побудованого графіка добавити графік функції $y = f(x)$, симетрично відображений відносно осі *Ox*.

Приклад 6. Побудувати графік функції $|y| = \left|\frac{1}{x-1}\right|$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{x-1}$.

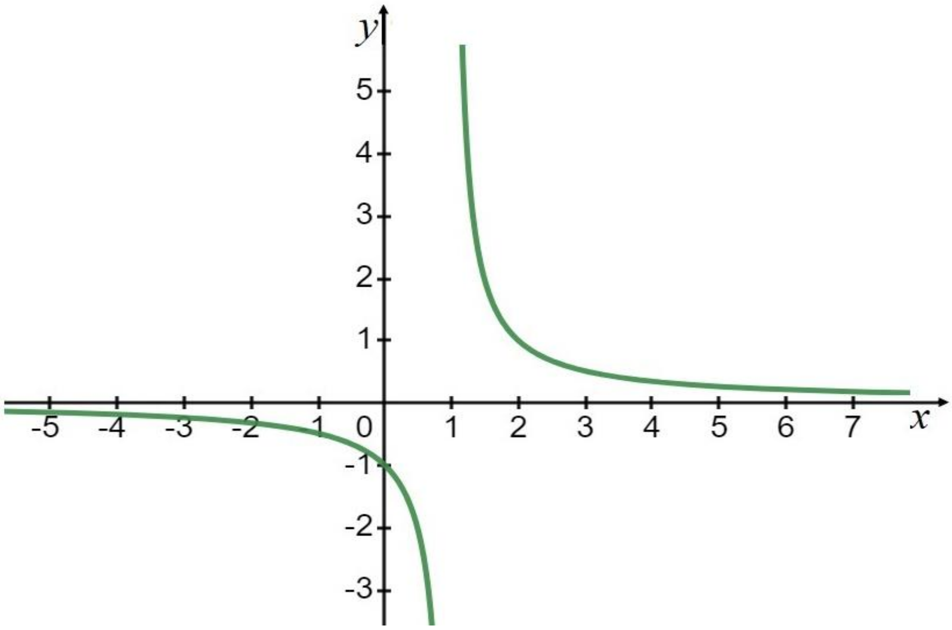


Рис. 89

Отриманий графік симетрично відобразимо відносно осі *Ox*. Відповіддю буде об'єднання цих двох графіків.

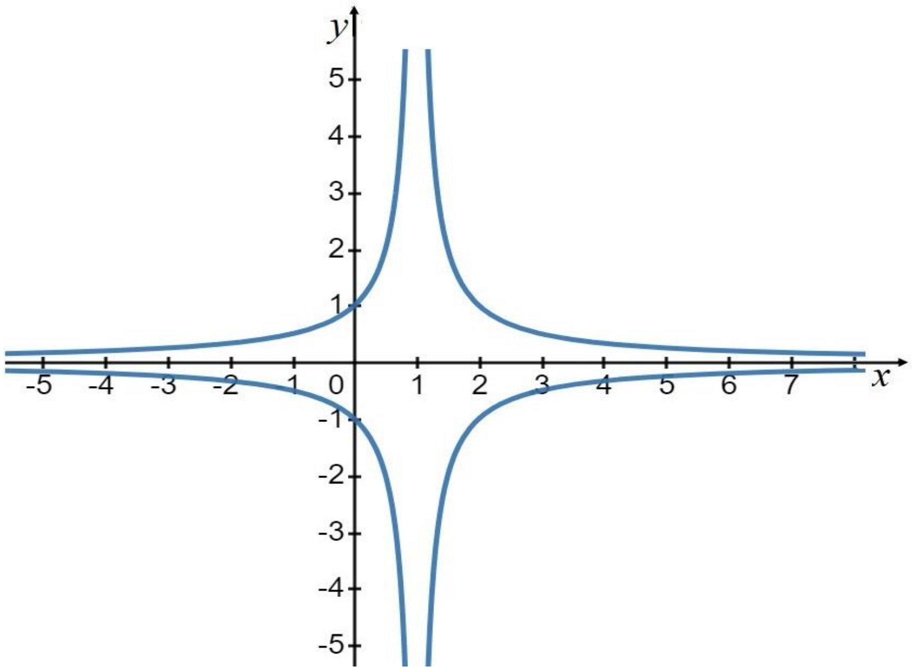


Рис. 90

Приклад 7. Побудувати графік функції $|y-1| = |x^2-2|$.

Розв'язання. Графіком даного рівняння буде об'єднання графіків $y-1 = x^2-2$ та $y-1 = -x^2+2$. Звідси $\left[\begin{array}{l} y = x^2-1, \\ y = -x^2+3. \end{array}\right.$ Маємо

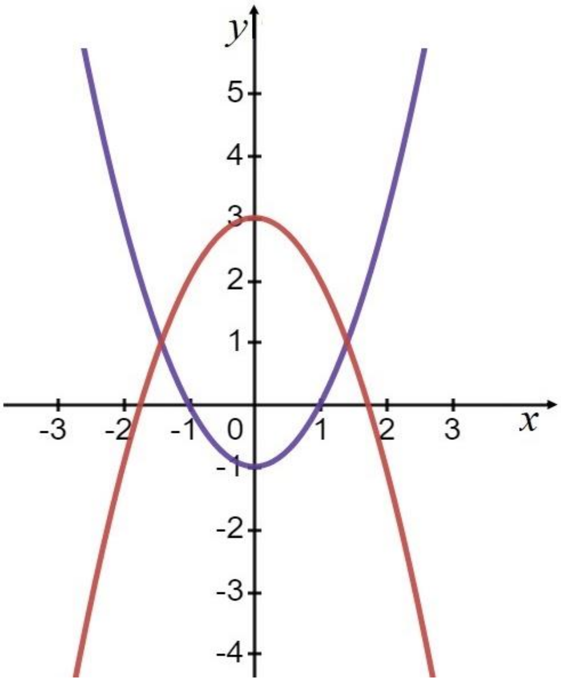


Рис. 91

Побудова графіка функції виду $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)|$.

При побудові графіків функцій такого виду найпоширенішим є метод, при якому знак модуля розкривається за означенням. Як правило, область допустимих значень даної функції розбивають на множини, на кожній з яких вираз, що розташований під знаком модуля, зберігає знак. На кожній такій множині функцію записують без знака модуля й будують графік. Об'єднання множини розв'язків, знайдених на всіх частинах області допустимих значень функції, становить множину всіх точок графіка заданої функції.

Приклад 8. Побудувати графік функції $y = |x-1| + |x-3|$. Знайти найменше значення функції.

Розв'язання. Точки $x = 1$ і $x = 3$ розбивають числову вісь на три проміжки. Для кожного проміжку запишемо отриману функцію:

1) при $x \leq 1$ маємо $y = 4 - 2x$;

2) при $1 < x \leq 3$ маємо $y = 2$;

3) при $x > 3$ маємо $y = 2x - 4$.

Отже, матимемо графік

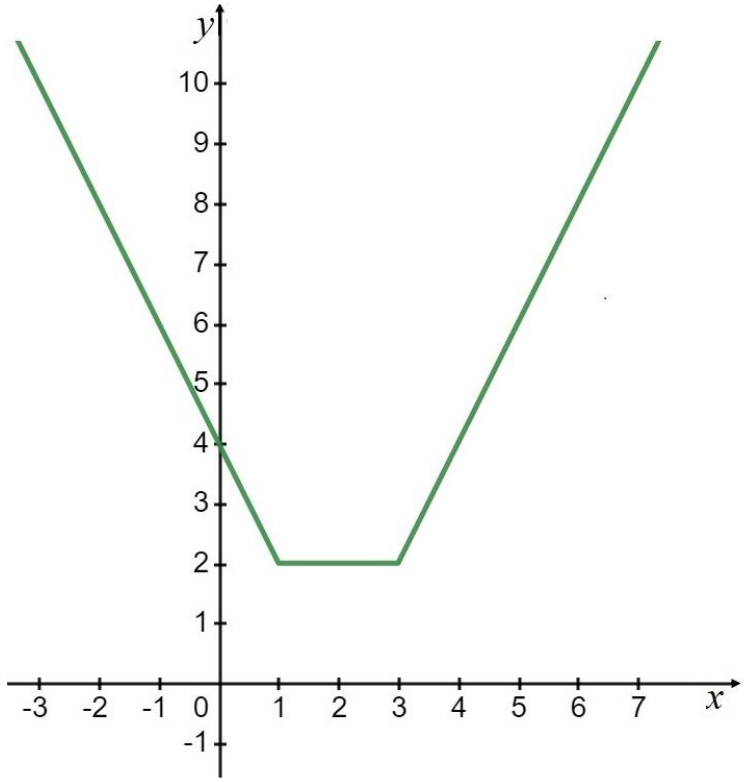


Рис. 92

Побудова деяких інших графіків функцій, що містять модуль

Якщо при будові графіків функцій з модулем не вдається застосувати жоден з наведених вище способів, то найчастіше застосовують означення модуля. Розглянемо деякі приклади.

Приклад 9. Побудувати графік рівняння $y = \left|\left||x|-1\right|-1\right|-1\Big|$.

Розв'язання. Графік будуємо в такій послідовності:

1) $y = |x| - 1$;

2) $y = \left||x|-1\right|$ – відображаємо симетрично відносно осі *Ox* від'ємну частину графіка;

3) $y = \left||x| - 1\right| - 1$ – піднімаємо вгору отриманий графік на одну одиницю;

4) $y = \left|\left||x| - 1\right| - 1\right|$ – відображаємо симетрично відносно осі Ox від'ємну частину графіка;

5) $y = \left|\left||x| - 1\right| - 1\right| - 1$ – піднімаємо отриманий графік вгору на одну одиницю;

6) $y = \left|\left|\left||x| - 1\right| - 1\right| - 1\right|$ – відображаємо симетрично відносно осі Ox від'ємну частину графіка

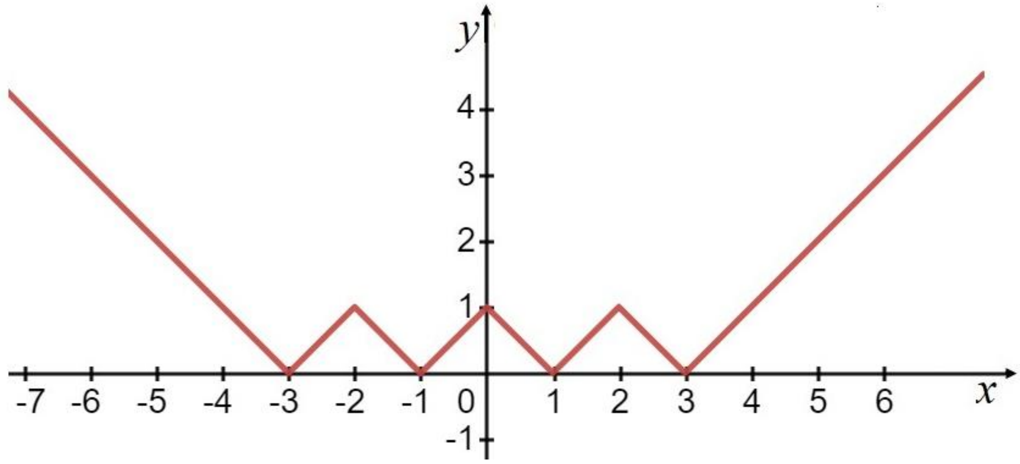


Рис. 93

Приклад 10. Побудувати множину точок $\left||x| + |y| - 1{,}5\right| = 0{,}5.$

Розв'язання. У розглянутих вище прикладах функції були задані аналітично, тобто формулами, що зв'язують відповідні значення аргументу й функції, причому у всіх прикладах у лівій частині рівності, що визначає функцію, стояв *y*, а в правій – вираз, що залежить від *x*. Функціональна залежність може бути задана й рівнянням, не дозволеним щодо залежної змінної. Такі функції називаються неявними. Зокрема дана множина точок також задана неявно.

Дане рівняння еквівалентне двом рівнянням $|x| + |y| = 1$ і $|x| + |y| = 2$.

Отже, шуканий графік – це об'єднання графіків цих двох рівнянь. Функція $|x| + |y| = 1$ парна щодо координатних осей. А тому досить розглянути функцію тільки в I чверті, тобто при $x \geq 0,\ y \geq 0$. Оскільки при цьому $|x| = x$ і $|y| = y$, задана функція приймає вид $x + y = 1$. Отже, будуємо графік прямої $y = 1 - x$, який лежить в I чверті. Потім добудовуємо графік, користуючись симетрією, щодо осей *Ox* і *Oy*. Одержуємо квадрат з вершинами $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. Аналогічно побудуємо графік функції $|x| + |y| = 2$ – квадрат з вершинами $(2; 0)$, $(0; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$.

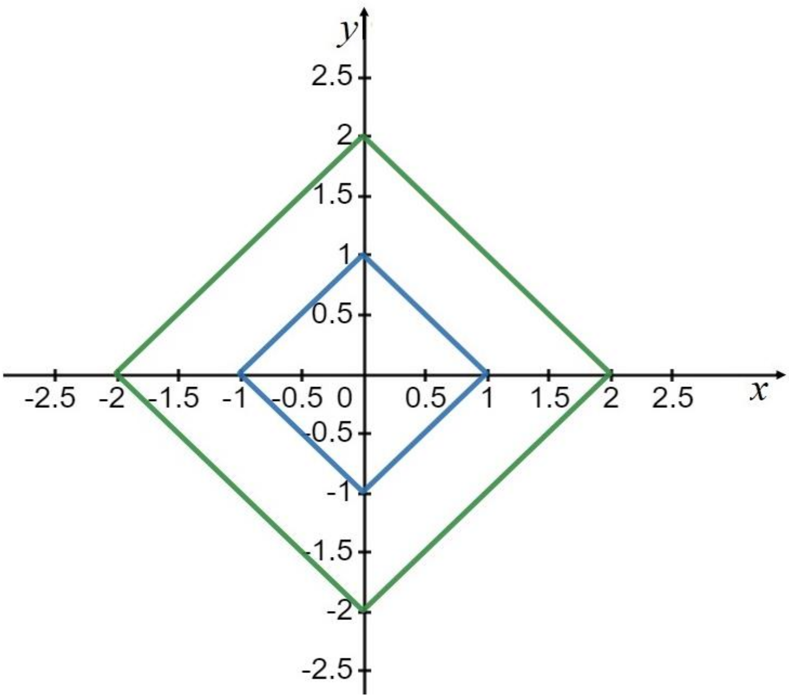


Рис. 94

Приклад 12. Побудувати графік функції $y = \frac{|x-1|}{|x|-1}$.

Розв'язання. Очевидно, що при $x = \pm 1$ дана функція невизначена, тобто її графік в точках $x = 1$ та $x = -1$ матиме розрив. При $x < 0$, $x \neq -1$ дана функція набуде вигляду $y = \frac{-(x-1)}{-(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$. При $0 \leq x < 1$ матимемо функцію $y = -\frac{x-1}{x-1} = -1$. При $x \geq 1$, $y = 1$. Побудуємо отримані функції на одній координатній площині. Матимемо

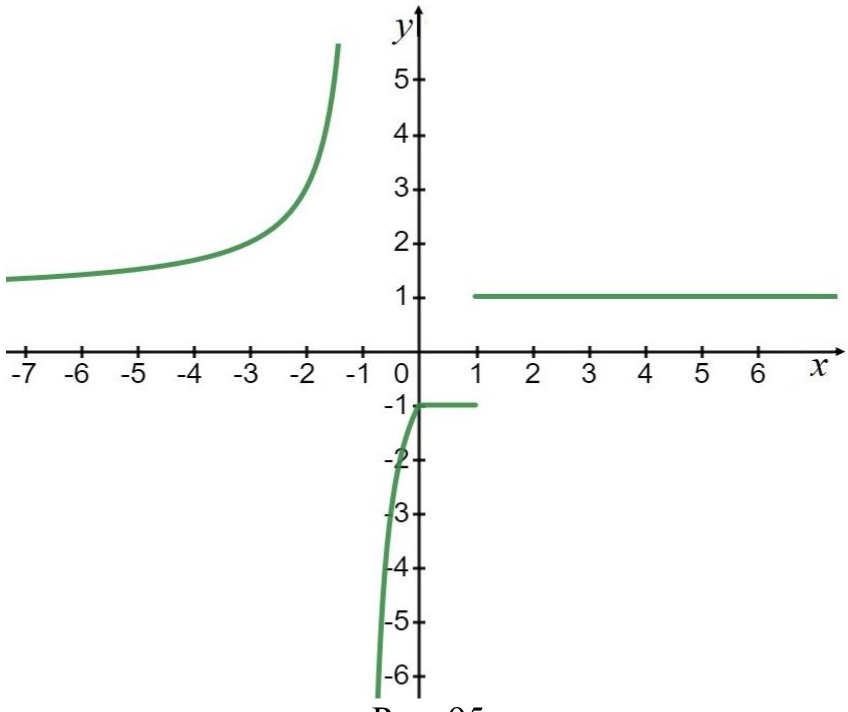


Рис. 95

Вправи

1. Розв'язати рівняння:

1. $x^2 - 6|x| + 4 = 1$; (*Відповідь:* $\pm 3;\ \pm\sqrt{6};\ \pm 5$)
2. $|x^2 - 5x + 4| = 4$; (*Відповідь:* 0; 5)
3. $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = 1$; (*Відповідь:* –1)
4. $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$; (*Відповідь:* $\sqrt{6}; 1$)
5. $|2x + 2| + |x - 5| + 1 = 0$; (*Відповідь:* рівняння розв'язків не має)
6. $x^2 + |1 - x| + |3 - x| = 1$; (*Відповідь:* рівняння розв'язків не має)
7. $|4x - 5| - |2 - x| = 0$; (*Відповідь:* 1; 1,4)
8. $|x^2 + x - 2| = |2x^2 - 3x - 1|$; (*Відповідь:* $2;\ \pm\sqrt{3};\ 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$)
9. $|x + 3| + |5 - 2x| = 2 - 3x$; (*Відповідь:* $x \le -3$)
10. $\frac{3}{|x+3|-1} = |x + 2|$; (*Відповідь:* $-1;\ -2 + \sqrt{3}$)
11. $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$; (*Відповідь:* $1 \le x \le 2;\ x = 5$)
12. $\left||x^2 - 6|x|| - 4\right| = 4$; (*Відповідь:* $\pm 3 + \sqrt{17};\ \pm 6;\ \pm 4;\ \pm 2; 0$)
13. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + |x - 2| = 1$; (*Відповідь:* $1 \le x \le 2$)
14. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$; (*Відповідь:* $-\frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ 2$)
15. $|\lg x + 2| + |\lg x - 1| = 3$; (*Відповідь:* $\frac{1}{100} \le x \le 10$)

2. Розв'язати нерівність:

1) $x^2 - 3x + |x - 3| > 0$;
2) $|x^2 - 4x + 3| > |2x - 5|$;
3) $\frac{|x-1|}{x+2} + x - 3 > \frac{1}{x+2}$;
4) $\left|\frac{x^2-4x}{x^2-1}\right| \ge 1$;
5) $\left|\frac{x-3}{x^2+3x}\right| \le 1$;
6) $|x + 2| + |x - 3| > x + 5$;
7) $\frac{x-|x-4|}{2-|6-x|} > 2$;
8) $\frac{|2x-1|}{|x-1|} > 2$;
9) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| \le 4$;
10) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \ge 1$;

3. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 1 - 2|x|$;
2) $|y| = -0{,}5x + 1$;
3) $y = -|x + 3| - 4$;
4) $y = \frac{x}{|x|}$;

5) $y = \frac{2}{|x|}$;

6) $|y| = x^2 + 4$;

7) $y = |-x^2 + 6x - 8|$;

8) $y = \left||x^2| - 3\right|$;

9) $y = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$;

10) $y = |x - 3| + |x + 5|$.

4. Розв'язати графічно рівняння:

1) $\left||x| - 1\right| = 4 + x$;

2) $4|x| + 2 = \frac{4x+4}{|x+1|}$;

3) $\left|3 - \left|2 - |x|\right|\right| = \frac{x-5}{x-5}$;

4) $|2x - 5| = |2x - 10|$;

5) $x^2 - 4|x| - 2 = \frac{16}{x^2 - 4|x|}$.

5. Розв'язати графічно системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = |x + 4|, \\ y = \frac{2x^2 - 2}{|x+1|}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = \frac{x^2 + 9x + 14}{|x+7|}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = |x| + 4, \\ y = \frac{x^3 - x}{|x-1|}; \end{cases}$

Частина 2
ГЕОМЕТРІЯ

ТЕМА 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ

1.1 Будова курсу геометрії

Геометричні фігури

Геометрія – це наука про властивості *геометричних фігур:* трикутника, квадрата, круга, піраміди, сфери і т.д.

Планіметрія – це розділ геометрії, в якому вивчаються геометричні фігури на площині.

Стереометрія – це розділ геометрії, в якому вивчаються фігури в просторі.

Всяку геометричну фігуру ми уявляємо собі складеною з точок. Частина будь-якої геометричної фігури також є геометричною фігурою.

Об'єднання кількох геометричних фігур є знову геометричною фігурою.

Точка. Пряма

Основними геометричними фігурами на площині є точка й пряма.

Точки позначаються великими (прописними) латинськими буквами:

$$A, B, C, D, \dots .$$

Прямі позначаються малими латинськими буквами:

$$a, b, c, \dots .$$

Пряму також можна позначити двома буквами, які відповідають точкам, що лежать на ній. Наприклад, пряму *a* на рис. 96 можна позначити *AB*, а пряму *b* позначиш *MK*.

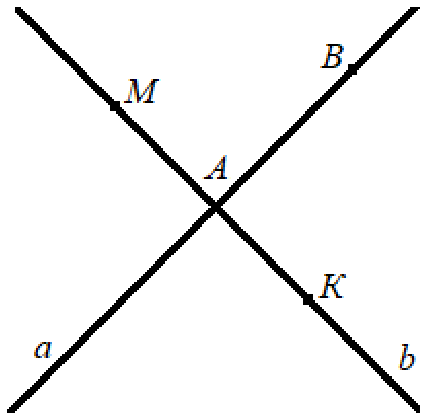


Рис. 96

На рис. 96 зображені прямі *a* й *b* і точки *A*, *B*, *M* і *K*.

Про точки *M* і *K* говорять, що вони *лежать на прямій b* або що точки *M* і *K належать прямій b*.

Аналогічно точки *A* і *B* лежать на прямій *a* або належать прямій *a*.

Про пряму ще кажуть, що вона *проходить через точки.* Так пряма *a* проходить через точки *A* і *B,* а пряма *b* проходить через точки *M, K* і *A.* Можна також сказати, що пряма *a не проходить через точку M* або що *точка K не належить прямій a.*

Визначення. Аксіоми. Теореми

Дати *визначення* чому-небудь – значить пояснити, що це таке. При визначенні будь-якого поняття вживають інші поняття, які вже повинні бути відомі. Проте не можна дати визначення всіх понять, тому деякі з них приймають без визначень і називають їх неозначуваними. До таких понять відносяться, наприклад, точка і пряма.

На рис. 96 прямі *a* і *b* мають одну спільну точку *A.* Прямі, які мають одну спільну точку, називаються *перетинними,* а точка *A – точкою перетину* прямих *a* і *b*.

Міркування, за допомогою якого встановлюється вірність твердження про властивість геометричної фігури, називається *доведенням.*

Речення, яке виражає властивість геометричної фігури, правильність якої доводиться, називається *теоремою.*

Цілком зрозуміло, що неможливо довести всі властивості геометричних фігур, не прийнявши деякі з них за основні, вихідні в доведенні інших властивостей фігур.

Властивості фігур, що приймаються без доведення, називаються *аксіомами.*

До аксіом планіметрії відносяться, наприклад, основні *властивості належності точок і прямих на площині.*

***Аксіома* 1.** Якою б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які не належать їй.

***Аксіома* 2.** Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

Користуючись визначеннями й аксіомами, які ми вже знаємо, можна довести першу теорему планіметрії.

***Теорема* 1**. Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці.

Якби дві різні прямі мали дві точки перетину, то вийшло б, що через ці точки проходять дві різні прямі. А це неможливо, тому що згідно з *Аксіомою* 1, через дві точки проходить тільки одна пряма.

Ця теорема доводиться *методом доведення від супротивного*. Цей метод полягає в тому, що спочатку робиться припущення протилежне тому, що стверджується теоремою. Потім шляхом міркувань, спираючись на аксіоми, а нерідко й на доведені раніше теореми, приходять до висновку суперечному або умові теореми, або одній із аксіом, або відомій раніше теоремі. На цій основі роблять висновок, що припущення було неправильне, а значить, правильне твердження теореми.

Будову курсу геометрії можна схарактеризувати так:

1) перелічуються основні геометричні поняття, вони вводяться без визначення;

2) на основі введених понять даються визначення всім іншим геометричним поняттям;

3) формулюються аксіоми;

4) на основі аксіом і визначень доводяться теореми, які, в свою чергу, використовуються для доведення інших теорем курсу геометрії.

Побудова геометрії з урахуванням усіх цих пунктів називається аксіоматичною.

1.2 Основні властивості найпростіших геометричних фігур

Відрізок

На прямій *a* (рис. 97, *а*) взяті точки *A*, *B* і *C*. Точка *B лежить між точками A* і *C*. Можна також сказати, що точки *A* і C *лежать по різні боки* від точки *B*. Точки *A* і *B лежать по один бік* від точки *C*, вони *не розділяються точкою C.* Точки *B* і *C* лежать по одну сторону від точки *A*.

Відрізком називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками. Ці точки називаються *кінцями відрізка.* Відрізок позначають, записуючи його кінці.

На рис. 97, *б* відрізок *AB* є частиною прямої *a.* Точка *M* лежить між точками *A* і *B*, а тому належить відрізкові *AB*; точка *K* не лежить між точками *A* і *B*, тому не належить відрізкові *AB*.

Аксіома (основна властивість) *розташування точок на прямій* формулюється так:

***Аксіома* 3.** З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Наступна аксіома виражає основні властивості вимірювання відрізків.

***Аксіома* 4.** Кожний відрізок має визначену довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

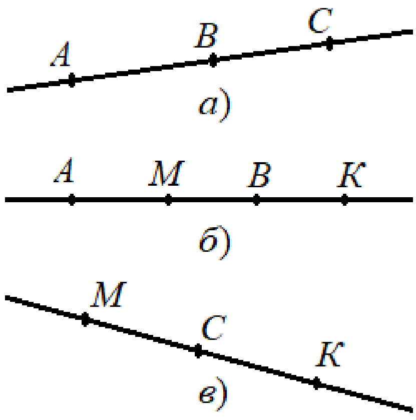


Рис. 97

Це означає, що коли на відрізку *MK* взяти любу точку С, то довжина відрізка *MK* дорівнює сумі довжин відрізків *MC* і *CK* (рис. 97, *в*). Довжину відрізка *MK* називають *відстанню між точками M* і *K.*

Промінь

Півпрямою або *променем* називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної точки. Ця точка називається *початковою точкою півпрямої* або *початком променя.* Різні піврямі однієї й тієї ж прямої з спільною початковою точкою називають *доповняльними.*

Півпрямі позначаються малими латинськими буквами. Можна позначити півпряму двома буквами: початковою та ще якою-небудь буквою, відповідною точці, що належить півпрямій. При цьому початкова точка ставиться на перше місце.

Наприклад, на рис. 98, *а* зображені промені *AB* і *AC*, доповняльні, на рис. 98, *б* зображені промені *MA*, *MB* і промінь *c*.

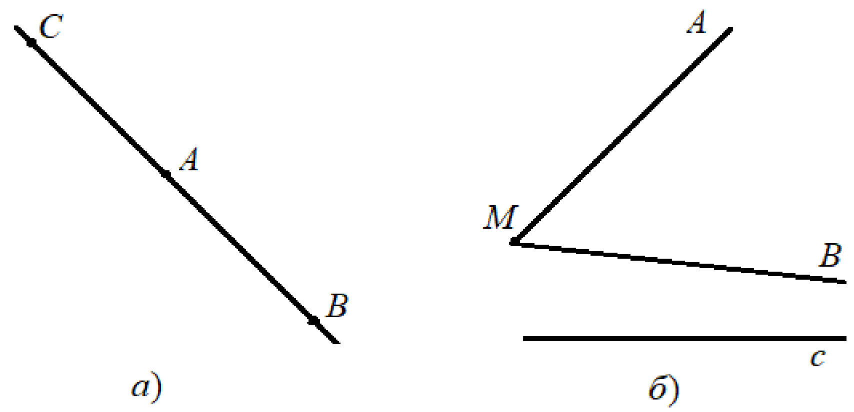


Рис. 98

Наступна аксіома відображує основну властивість відкладання відрізків:

***Аксіома* 5.** На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один.

Коло. Круг

Колом називається фігура, що складається з усіх точок площини, які знаходяться на даній відстані від даної точки. Ця точка називається *центром* кола.

Відстань від точок кола до його центра називається *радіусом* кола. Радіусом називається також будь-який відрізок, що сполучає, точку кола з її центром.

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називається *хордою.* Хорда, яка проходить через центр, називається *діаметром.*

На рис. 99, *а* зображене коло з центром в точці *O*. Відрізок *OA* – радіус цього кола, *BD* – хорда кола, *CM* – діаметр кола.

Кругом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, що лежать на відстані не більшій даної від даної точки. Ця точка називається *центром* круга, а дана відстань *радіусом* круга. *Межею* круга є коло з тим самим центром і радіусом (рис. 99, б).

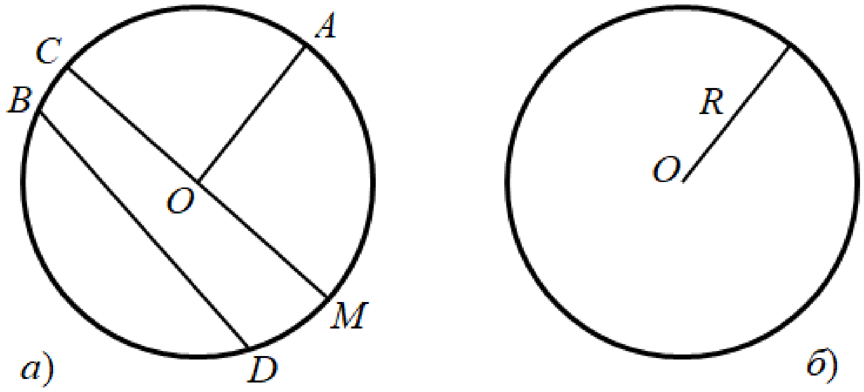


Рис. 99

Півплощина

Сформулюємо ще одну аксіому геометрії.

Аксіома 6. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

На рисунку 100 пряма *а розбиває* площину на дві *півплощини* так, що кожна точка площини, що не належить прямій *а*, лежить в одній з них. Це розбиття має таку властивість: якщо кінці якого-небудь відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму; якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму. На рис. 100 точки *A* і *B* лежать в одній з півплощин, на які пряма *a* розбиває площину. Тому відрізок *AB* не перетинає пряму *a*. Точки *C* і *D* лежать в різних півплощинах. Тому відрізок *CD* перетинає пряму *a*.

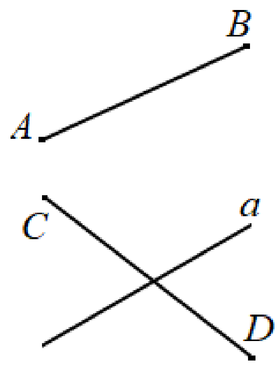


Рис. 100

Кут. Градусна міра кута

Кутом називається фігура, яка складається з точки – *вершини кута* й двох різних півпрямих, які виходять з однієї точки, *сторін кута* (рис. 101). Якщо сторони кута – доповняльні півпрямі, то кут називається *розгорнутим.*

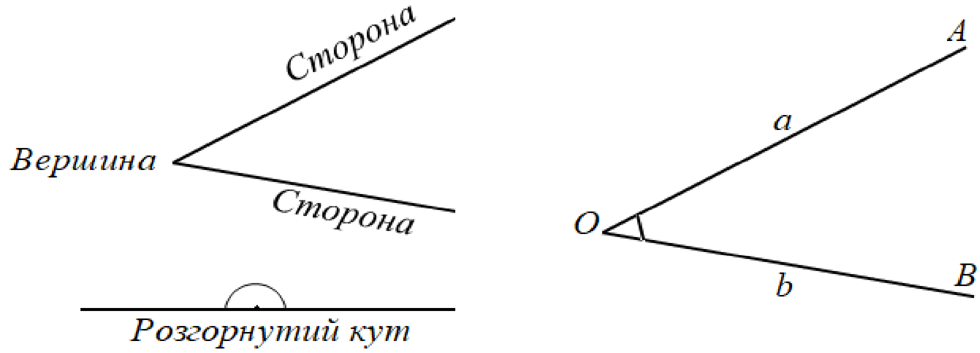


Рис. 101

Кут позначається або вказуванням його вершини, або вказуванням його сторін, або вказуванням трьох точок: вершини й двох точок на сторонах кута. Слово «кут» інколи замінюють символом ∠. Кут на рис. 101 можна позначити трьома способами:

$$\angle O, \quad \angle(ab), \ \angle AOB.$$

Кажуть, що промінь *c проходить між сторонами кута* (*ab*), якщо він виходить з його вершини й перетинає будь-який відрізок з кінцями на сторонах кута.

На рис. 102 промінь *c* проходить між сторонами кута (*ab*), тому що він перетинає відрізок *AB*.

У випадку для розгорнутого кута будь-який промінь, що виходить з його вершини й відмінний від його сторін, проходить між сторонами кута.

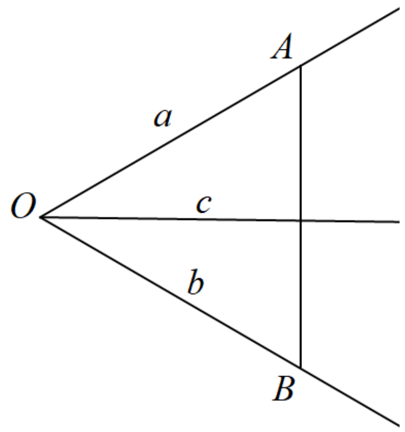


Рис. 102

Кути вимірюються в градусах. Якщо взяти

розгорнутий кут і поділити його на 180 рівних кутів, то градусна міра кожного з цих кутів називається *градусом.*

Основні властивості вимірювання кутів виражені аксіомою:

***Аксіома* 7.** Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Це означає, що коли промінь *c* проходить між сторонами кута (ab), то кут (ab) дорівнює сумі кутів (ac) і (cb), тобто $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$. Градусна міра кута знаходиться за допомогою *транспортира.* Кут, що дорівнює 90°, називається *прямим* кутом. Кут, менший за 90°, називається *гострим* кутом. Кут, більший за 90° і менший від 180°, називається *тупим.*

Сформулюємо *основні властивості відкладання кутів.*

***Аксіома* 8.** Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

***Теорема* 2**. Якщо від даної півпрямої відкласти в одну півплощину два кути, то сторона меншого кута, відмінна від даної півпрямої, проходить між сторонами більшого кута.

Нехай $\angle(ab)$ і $\angle(ac)$ – кути, відкладені від даної півпрямої *a* в одну півплощину, і нехай кут (ab) менший кута (ac). В теоремі 2 стверджується, що промінь b проходить між сторонами кута (ac) (рис. 103).

Бісектрисою кута називається промінь, який виходить з його вершини, проходить між його сторонами і ділить кут пополам. На рис. 104 промінь *OM* – бісектриса кута *AOB.* В геометрії існує поняття плоского кута. *Плоским кутом* називається частина площини, обмежена двома різними променями, які виходять з одної точки. Ці промені називаються сторонами *кута.* Існують два плоскі кути з даними сторонами. Вони називаються доповняльними. На рис. 105 заштрихований один з плоских кутів зі сторонами *a* і *b*.

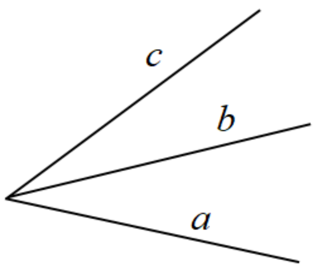


Рис. 103

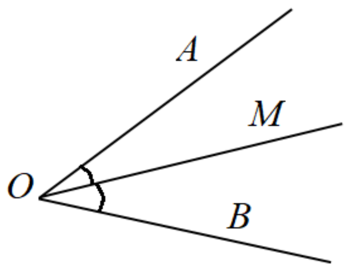


Рис. 104

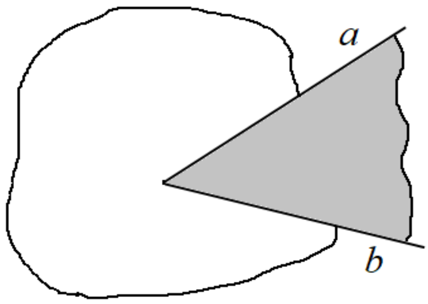


Рис. 105

Якщо плоский кут є частиною півплощини, то його градусною мірою буде градусна міра звичайного кута з тими ж сторонами. Якщо плоский кут містить півплощину, то його градусна міра дорівнює 360° – *α*, де *α* – градусна міра доповняльного плоского кута.

Суміжні та вертикальні кути

Два кути називаються *суміжними,* якщо в них одна сторона спільна, а інші сторони цих кутів – доповняльні півпрямі. На рис. 106 кути (ac) і (cb) суміжні.

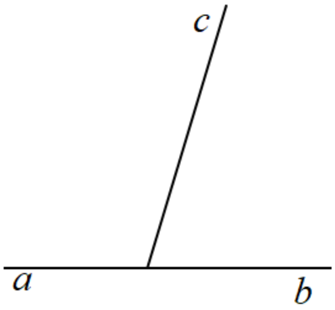


Рис. 106

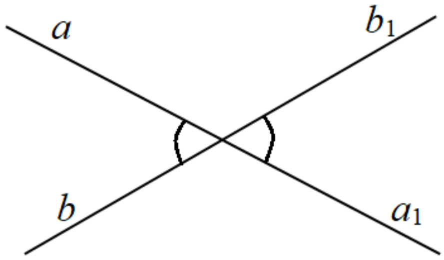


Рис. 107

***Теорема* 3.** Сума суміжних кутів дорівнює 180°

Із теореми 3 випливають властивості:

1) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути рівні;

2) кут, суміжний з прямим кутом, є прямий кут;

3) кут, суміжний з гострим, – тупий, а суміжний з тупим – гострий.

Два кути називаються *вертикальними,* якщо сторони одного кута є доповняльними півпрямими сторін іншого. На рис. 107 кути (ab) і (a_1b_1) вертикальні.

***Теорема* 4.** Вертикальні кути рівні.

Очевидно, що дві перетинні прямі утворюють суміжні та вертикальні кути. Суміжні кути доповнюють один одного до 180°. Кутова міра меншого з них називається *кутом між прямими.*

Центральні та вписані кути

Центральним кутом у колі називається плоский кут з вершиною в його центрі. Частина кола, розміщена всередині плоского кута, називається *дугою кола,* що відповідає цьому центральному куту. *Градусною мірою дуги* кола називається градусна міра відповідного центрального кута.

На рис. 108 кут AOB – центральний кут кола, його вершина O є центром даного кола, а сторони AO та OB перетинають коло. Дуга AB є частиною кола і розміщується всередині центрального кута.

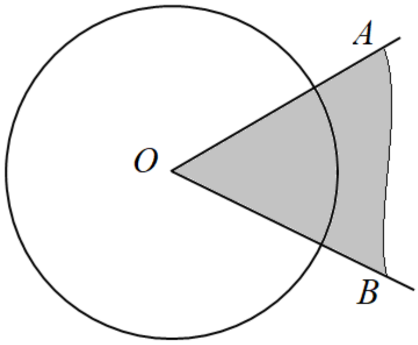


Рис. 108

Градусна міра дуги AB на рис. 108 дорівнює градусній мірі кута AOB. Градусна міра дуги AB позначається $\cup AB$.

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називається *вписаним* у коло.

На рис. 109 зображені вписані кути.

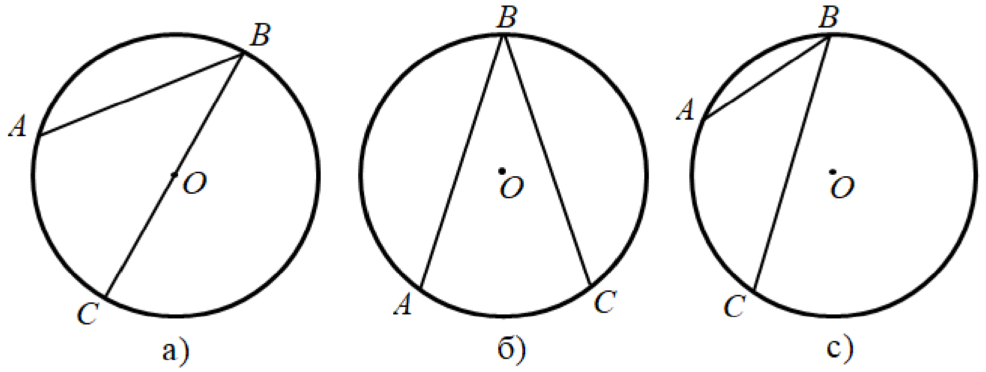


Рис. 109

***Теорема* 5.** Вписаний в коло кут, сторони якого проходять через дві дані точки кола, дорівнює половині кута між радіусами, проведеними в ці точки, або доповнює цю половину до 180°.

З теореми 5 зробимо висновок: усі вписані в коло кути, сторони яких проходять через дві дані точки, а вершини лежать по одну строну від прямої, що сполучає ці точки, рівні; вписані кути, сторони яких проходять через кінці діаметра кола, прямі.

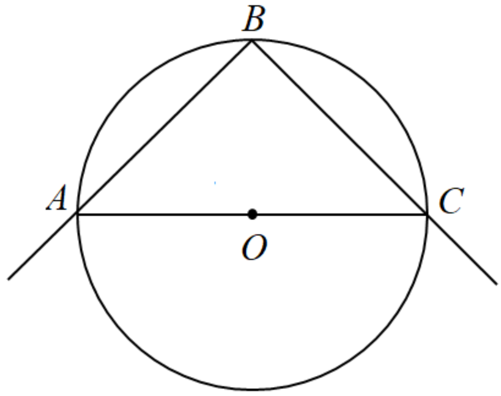


Рис. 110

На рис. 110 сторони вписаного кута ABC проходять через кінці діаметра AC, а тому $\angle ABC = 90°$.

Паралельні прямі

Дві прямі на площині називаються *паралельними,* якщо вони не перетинаються.

Для позначення паралельності прямих вживається символ ∥. Запис $a \parallel b$ читається: «Пряма *a* паралельна прямій *b*».

Аксіома паралельності прямих виражає *основну властивість паралельних прямих.*

***Аксіома* 9.** Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

***Теорема* 6.** Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

Можна довести, що через точку, яка не належить прямій, можна провести пряму, паралельну даній.

Зіставляючи це твердження й аксіому паралельних прямих, приходять до важливого висновку: на площині через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести паралельну їй пряму й тільки одну.

Прикладом теореми, яка використовує поняття паралельності, а її доказ спирається на аксіому паралельності, служить теорема Фалеса.

***Теорема* 7.** Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута й відсікають на одній його стороні однакові відрізки, то вони відсікають однакові відрізки й на другій його стороні *(теорема Фалеса).*

Нехай A_1, A_2, A_3 – точки перетину паралельних прямих із однією з сторін кута, і A_2 лежить між A_1 і A_3 (рис. 111). Нехай B_1, B_2, B_3 – відповідні точки перетину цих прямих з другою стороною кута. Теорема 7 стверджує: якщо $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

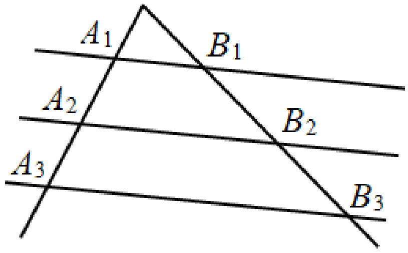
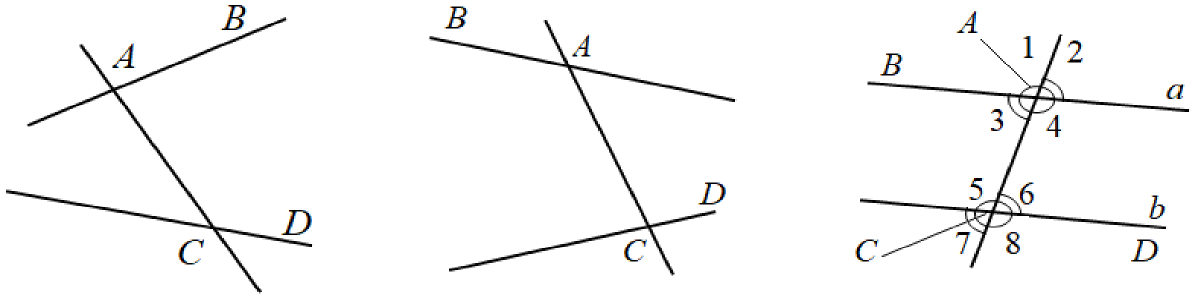


Рис. 111

Ознаки паралельності прямих

Нехай *AB* і *CD* – дві прямі. Нехай *AC* – третя пряма, яка перетинає прямі *AB* і *CD* (рис. 112, *а*). Пряма *AC* по відношенню до прямих *AB* і *CD* називається *січною.* Утворені цими прямими кути часто розглядаються попарно. Пари кутів отримали спеціальну назву. Так, якщо точки *B* і *D* лежать в одній півплощині відносно прямої *AC*, то кути *BAC* і *DCA* називаються ***внутрішніми односторонніми*** (рис. 112, *а*). Якщо точки *B* і *D* лежать в різних півплощинах відносно прямої *AC*, то кути *BAC* і *DCA* називаються ***внутрішніми різносторонніми*** (рис. 112, *б*).

Січна *AC* утворює з прямими *AB* і *CD* дві пари внутрішніх односторонніх ($\angle 4$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 5$, рис. 112 *в*) і дві пари внутрішніх різносторонніх кутів ($\angle 4$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 6$, рис. 112, *в*).



а) б) в)

Рис. 112

***Теорема* 8.** Якщо внутрішні різносторонні кути рівні, або сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

На рис 112, *в* позначені числами чотири пари кутів. Теорема 8 стверджує, що коли $\angle 3 = \angle 6$ або $\angle 4 = \angle 5$, то прямі a і b паралельні. Теорема 8 також стверджує, що коли $\angle 4 + \angle 6 = 180°$, або $\angle 3 + \angle 5 = 180°$, то прямі a і b паралельні.

Теореми 6 і 8 є *ознаками паралельності* прямих. Вірна й теорема, обернена теоремі 8.

***Теорема* 9.** Якщо дві паралельні прямі перетинаються третьою прямою, то внутрішні різносторонні кути рівні, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Перпендикулярні прямі

Дві прямі називаються *перпендикулярними,* якщо вони перетинаються під прямим кутом (рис. 113).

Перпендикулярність прямих записується за допомогою символу $\perp$. Запис $a \perp b$ читається: «Пряма *a* перпендикулярна прямій *b*».

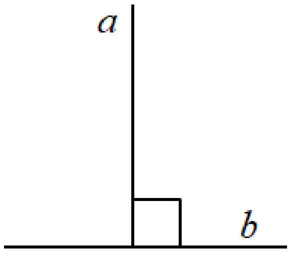


Рис. 113

Перпендикуляром до даної прямої називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної, який має одним із своїх кінців точку їх перетину. Цей кінець відрізка називається *основою перпендикуляра.*

На рис. 114 перпендикуляр *AB* проведений з точки *A* до прямої *a*. Точка *B* – основа перпендикуляра.

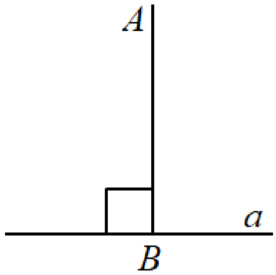


Рис. 114

***Теорема* 10.** Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну їй пряму і тільки одну.

***Теорема* 11.** З будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один.

Нехай *BA* – перпендикуляр, опущений з точки *B* на пряму *a*, і *C* – будь-яка точка прямої *a*, відмінна від *A*. Відрізок *BC* називається похилою, проведеною з точки *B* до прямої *a* (рис. 115). Точка *C* називається основою похилої. Відрізок *AC* називається проекцією похилої.

Пряму, яка проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, називають *серединним перпендикуляром.*

На рис 116 пряма *a* перпендикулярна до відрізка *AB* і проходить через точку *C* – середину відрізка *AB*, тобто *a* – серединний перпендикуляр.

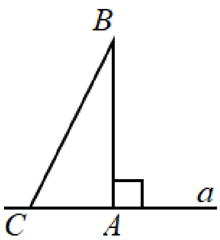


Рис. 115

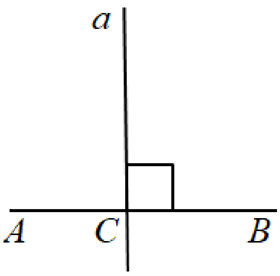


Рис. 116

Дотична до кола. Дотик кіл

Пряма, яка проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається *дотичною.* При цьому дана точка називається *точкою дотику.* На рис. 117 пряма *a* проведена через точку кола *A* перпендикулярно до радіуса *OA*. Пряма *a* є дотичною до кола. Точка *A* є точкою дотику. Можна сказати також, що коло дотикається до прямої *a* в точці *A*.

Кажуть, що два кола, які мають спільну точку, дотикаються в цій точці, якщо вони мають в цій точці дотичну. Дотик кіл називається *внутрішнім,* якщо центри кіл лежать по одну сторону від їхньої спільної дотичної. Дотик кіл називається зовнішнім, якщо центри кіл лежать по різні сторони від їхньої спільної дотичної. На рис. 118, *а* дотик кіл внутрішній, а на рис. 118, *б* – зовнішній.

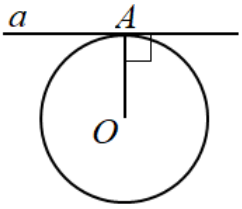
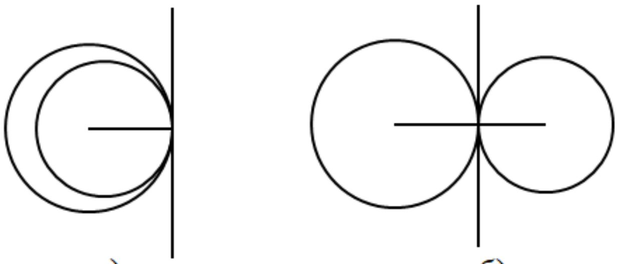


Рис. 117



а) *б*)

Рис. 118

Трикутники

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються *вершинами* трикутника, а відрізки – його *сторонами.* Трикутник позначається його вершинами. Замість слова «трикутник» вживається символ Δ.

На рис. 119 зображений трикутник *ABC*; *A*, *B*, *C* – вершини цього трикутника; *AB*, *AC* і *BC* – його сторони.

Кутом трикутника ABC при вершині *A* називається кут, утворений півпрямими *AB* і *AC.* Так само позначаються кути при вершинах *B* і *C*.

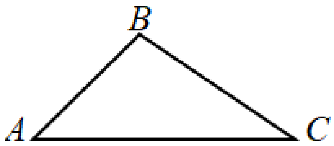
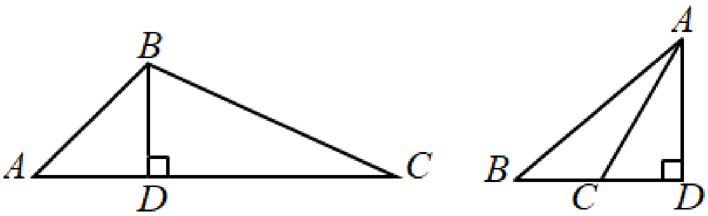


Рис. 119

***Теорема* 12.** Якщо пряма, яка не проходить ні через одну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін.

Висотою трикутника, опущеною з даної вершини, називається перпендикуляр, проведений з цієї вершини до прямої, на якій лежить протилежна сторона трикутника. На рис. 120, *а* відрізок *BD* – висота гострокутного Δ*ABC*, а на рис. 120, *б* основа висоти тупокутного Δ*ABC* – точка *D* – лежить на продовженні сторони *BC*.



а) *б*)

Рис. 120

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні. На рис. 121 відрізок *AD* – бісектриса трикутника *ABC*.

Медіаною трикутника, проведеною з даної вершини, називається відрізок, що сполучає цю вершину з серединою протилежної сторони трикутника. На рис. 122 відрізок *AD* – медіана трикутника *ABC*.

Середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін (рис. 123).

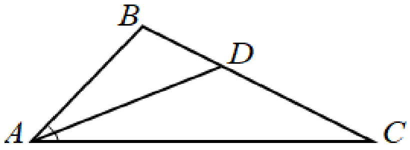


Рис. 121

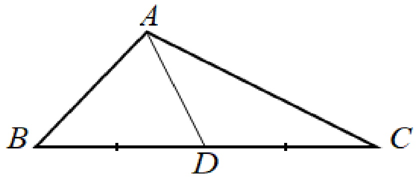


Рис. 122

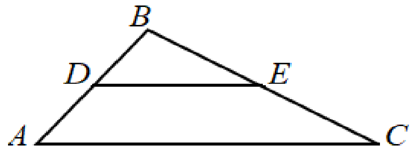


Рис. 123

***Теорема* 13.** Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох даних сторін, паралельна третій стороні й дорівнює її половині.

Нехай *DE* – середня лінія трикутника *ABC* (рис. 123). Теорема стверджує, що $DE \parallel AC$ і $DE = \frac{1}{2}AC$.

Нерівністю трикутника називається властивість відстаней між трьома точками, яка виражається такою теоремою:

***Теорема* 14.** Якими б не були три точки, відстань між будь-якими двома з цих точок не більша суми відстаней від них до третьої точки.

Нехай A, B, C – три дані точки. Взаємне розташування цих точок може бути будь-яким: а) дві точки з трьох або всі три співпадають, в цьому випадку твердження теореми очевидне; б) точки відмінні та лежать на одній прямій (рис. 124, *а*), одна з них, наприклад B, лежить між двома іншими, в цьому випадку $AB + BC = AC$, звідки випливає, що кожна з трьох відстаней не більша суми двох інших; в) точки не лежать на одній прямій (рис. 124, *б*), тоді теорема 14 стверджує, що $AC < AB + BC$.

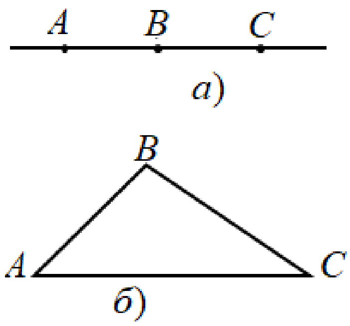


Рис. 124

У випадку *в*) три точки *A*, *B*, *C* є вершинами трикутника. Тому *в будь-якому трикутнику кожна сторона менша суми двох інших сторін.*

Рівність трикутників

Два відрізки називаються *рівними,* якщо вони мають однакову довжину. Два кути називаються *рівними,* якщо вони мають однакову кутову міру в градусах.

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ називаються *рівними*, якщо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Коротко це виражають словами: трикутники рівні, якщо в них відповідні сторони й відповідні кути рівні.

Сформулюємо *основну властивість існування рівних трикутників* (аксіому існування трикутника, рівного даному):

***Аксіома* 10.** Яким би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

Справедливі три ознаки рівності трикутників:

***Теорема* 15.** Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника рівні відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні *(ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними).*

***Теорема* 16.** Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника рівні відповідно стороні й прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні *(ознака рівності трикутників за стороною й прилеглими до неї кутами).*

***Теорема* 17.** Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні *(ознака рівності трикутників за трьома сторонами).*

Рівнобедрений трикутник

Трикутник називається *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні. Ці рівні сторони називаються *бічними сторонами,* а третя сторона називається *основою трикутника.*

У трикутника ABC (рис. 125) $AB = CB$, це означає, що ΔABC рівнобедрений з основою AC.

***Теорема* 18.** В рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

***Теорема* 19.** Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений *(обернена теоремі* 18).

***Теорема* 20.** В рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою.

Можна також довести, що в рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, є бісектрисою і медіаною. Аналогічно бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена з вершини, протилежної основі, є медіаною і висотою.

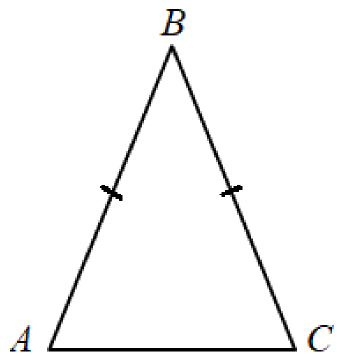


Рис. 125

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається рівностороннім.

Сума кутів трикутника

В будь-якому трикутнику справедлива теорема про суму його кутів.

***Теорема* 21.** Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

З теореми 21 випливає, що в будь-якого трикутника хоч два кути гострі.

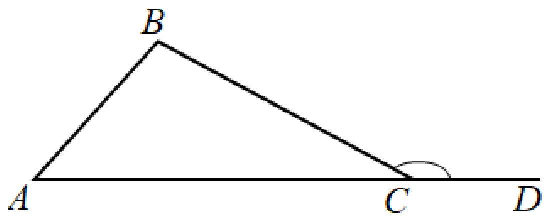


Рис. 126

Зовнішнім кутом трикутника при даній вершині називається кут, суміжний з кутом трикутника при цій вершині. На рис. 126 зображений $\angle BCD$ – зовнішній кут трикутника ABC. Щоб не плутати кут трикутника при даній вершині із зовнішнім кутом при цій же вершині, його називають *внутрішнім кутом.*

***Теорема* 22.** Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

Прямокутний трикутник. Теорема Піфагора

Трикутник називається *прямокутним*, якщо він має прямий кут. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то у прямокутному трикутнику тільки один прямий кут. Два інші кути прямокутного трикутника гострі, й вони доповнюють один одного до 90°. Сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, називається *гіпотенузою*, дві інші сторони називаються *катетами.* ΔABC, зображений на рис. 127, прямокутний, $\angle B$ – прямий, CA – гіпотенуза, CB і BA – катети.

Для прямокутних трикутників можна сформулювати ознаки рівності.

***Теорема* 23.** Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого трикутника, то такі трикутники рівні *(ознака рівності за гіпотенузою й гострим кутом).*

***Теорема* 24**. Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному куту іншого трикутника, то такі трикутники рівні *(ознака рівності за катетом і протилежним кутом).*

***Теорема* 25.** Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету іншого трикутника, то такі трикутники рівні *(ознака рівності за гіпотенузою й катетом).*

В прямокутному трикутнику з кутом 30° катет, протилежний цьому куту, дорівнює половині гіпотенузи.

В трикутнику *ABC*, зображеному на рис. 128, $\angle C$ – прямий, $\angle B = 30°$. Значить в цьому трикутнику $CA = \frac{1}{2}AB$.

В прямокутному трикутнику справедлива *теорема Піфагора*.

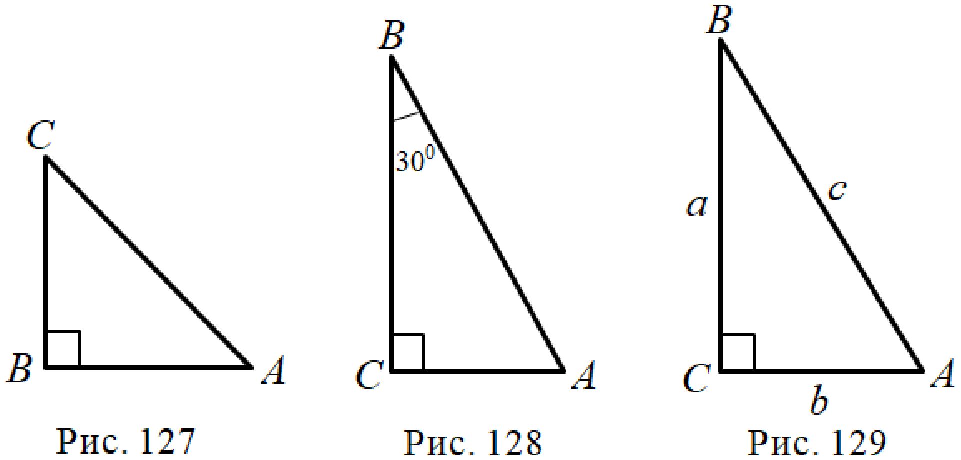


Рис. 127 Рис. 128 Рис. 129

***Теорема* 26.** В прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів *(теорема Піфагора).*

Нехай *ABC* – даний прямокутний трикутник з прямим кутом *C*, катетами *a* і

b та гіпотенузою c (рис. 129). Теорема стверджує, що $a^2 + b^2 = c^2$.

З теореми Піфагора випливає, що в прямокутному трикутнику будь-який з катетів менший гіпотенузи.

З теореми Піфагора випливає, що коли до прямої з однієї точки проведені перпендикуляр і похила, то похила більша перпендикуляра; рівні похилі мають рівні проекції; з двох похилих більша та, в якої проекція більша.

На рис. 130 з точки O до прямої a проведений перпендикуляр OA й похила OB, OC і OD, при цьому $OC = OD$, а $OB > OC$. Опираючись на сказане, можна зробити висновок:

а) $OA < OB$, $OA < OC$, $OA < OD$;

б) $AC = AD$, так як $OC = OD$;

в) $AB > AC$, так як $OB > OC$.

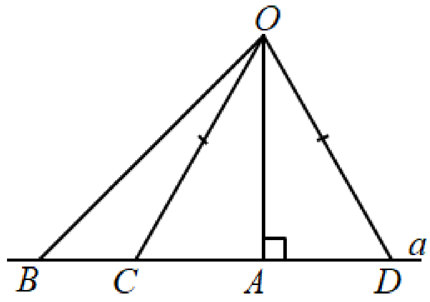


Рис. 130

Кола, вписані в трикутники й описані навколо трикутників

Коло називається *описаним* навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини трикутника.

***Теорема* 27.** Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

На рисунку 131 коло описане навколо трикутника ABC. Центр цього кола O є точкою перетину серединних перпендикулярів OM, ON і OK, проведених відповідно до сторін AB, BC і CA.

Коло називається *вписаним* в трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

***Теорема* 28.** Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.

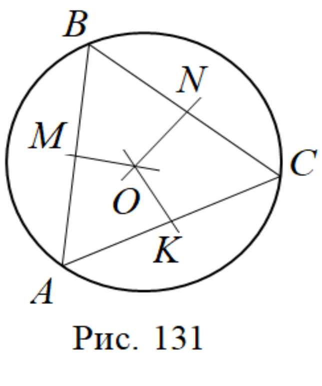


Рис. 131

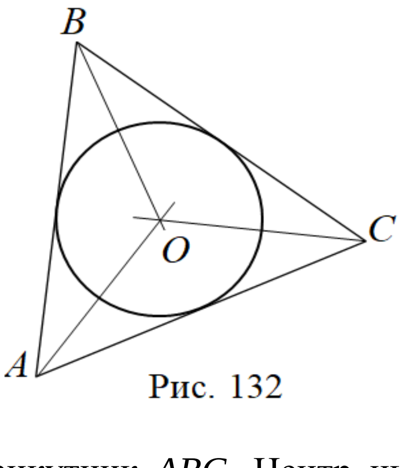


Рис. 132

На рисунку 132 коло вписане в трикутник ABC. Центр цього кола O є точкою перетину бісектрис AO, BO і CO відповідних кутів трикутника.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Точки *A*, *B* і *C* лежать на одній прямій. Найдіть довжину відрізка *BC*, якщо *AB* = 2,7 м, *AC* = 3,2 м. Скільки розв’язків має ця задача?

Розв’язання: з трьох точок на прямій одна й тільки одна лежить між двома іншими (аксіома 3). Точка *C* не може лежати між точками *A* і *B*, так як *AC* >*AB*. Розглянемо два можливі випадки.

1. Точка *A* лежить між точками *B* і *C*. Тоді *AB* + *AC* = *BC* (аксіома 4),

$$BC = 2{,}7\text{м} + 3{,}2\text{ м} = 5{,}9\text{ м}.$$

2. Точка *B* лежить між точками *A* і *C*. Тоді *AB* + *BC* = *AC* (аксіома 4),

$$BC = AC - AB = 3{,}2\text{ м} - 2{,}7\text{ м} = 0{,}5\text{ м}.$$

Відповідь: задача має два розв’язки: *BC* = 5,9 м або *BC* = 0,5 м.

Задача 2. Дано пряму й три точки *A*, *B*, *C*, які не лежать на цій прямій. Відомо, що відрізок *AB* перетинає пряму, а відрізок *AC* не перетинає її. Чи перетинає пряму відрізок *BC*? Мотивуйте відповідь.

Розв’язання: нехай дано пряму *a* й точки *A*, *B* і *C*, які не лежать на прямій *a* (рис. 133). Згідно з аксіомою 6, пряма *a* розбиває площини на дві півплощини. Точка *A* належить одній з цих півплощин разом з точкою *C*, так як відрізок *AC* не перетинає пряму *a*. Отже, точки *A* і *B* лежать в різних півплощинах. Тоді точки *B* і *C* також лежать в різних півплощинах. Тому відрізок *BC* перетинає пряму *a*.

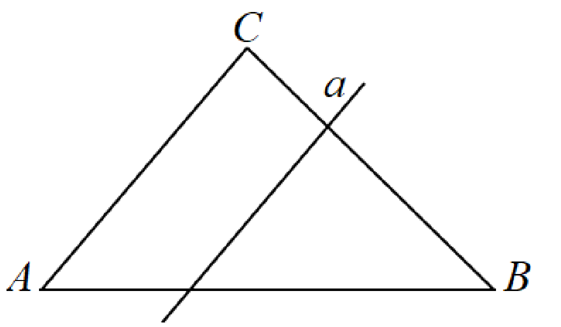


Рис. 133

Задача 3. Чи існує на півпрямій *AB* така точка *X*, відмінна від *B*, щоб *AX* = *AB*? Мотивуйте відповідь.

Розв’язання: згідно з аксіомою 5, на будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини й тільки один. Оскільки за умовою *AX* = *AB*, то точка *X* співпадає з *B*.

Задача 4. На промені *AB* відмічена точка *C*. Найдіть довжину відрізка *BC*, якщо *AB* = 1,5 м, *AC* = 0,3 м.

Розв’язання: так як *AC* < *AB*, то точка *C* лежить між точками *A* і *B*. Тоді *AC* + *BC* = *AB* (аксіома 4), *BC* = *AB* – *AC* = 1,5 м – 0,3 м = 1,2 м.

Відповідь: *BC* = 1,2 м.

Задача 5. Доведіть, що будь-який промінь, який виходить з центра кола, перетинає коло в одній точці.

Розв’язання: нехай точка *O* – центр кола й *OA* – промінь, який виходить з точки *O*. Допустимо, що промінь *OA* перетинає коло в двох різних точках *M* і *N*. Тоді з точок *O*, *M* і *N* одна лежить між іншими (аксіома 3). Нехай точка *M* знаходиться між точками *O* і *N*. Тоді *OM* < *ON*. Але *OM* і *ON* є радіусами даного кола, і тому *OM* = *ON*. Отримана суперечність показує, що промінь *OA* може перетинати коло тільки в одній точці. Така точка існує, тому що на промені *OA* існує така точка B, а довжина відрізка OB дорівнює радіусу кола. Точка лежить одночасно на промені OA і на колі, отже, є точкою перетину променя OA й кола, яке розглядається.

Задача 6. Кола з радіусами 30 і 40 см дотикаються. Знайдіть відстань між центрами кіл у випадку зовнішнього і внутрішнього дотику.

Розв'язання: нехай O_1 – центр кола, радіус якого 30 см, а O_2 – центр кола, радіус якого 40 см, тоді O_1O_2 – відстань між центрами кіл. Пряма O_1O_2 перетинає обидва кола в точці A, яка є точкою дотику кіл.

Якщо кола дотикаються зовнішнім дотиком, то

$$O_1O_2 = O_1A + AO_2 = 30\text{см} + 40\text{см} = 70\text{см}.$$

Якщо кола дотикаються внутрішнім дотиком, то

$$O_1O_2 = O_2A - O_1A = 40\text{см} - 30\text{см} = 10\text{см}.$$

Відповідь: $O_1O_2 = 70\text{см}$, $O_1O_2 = 10\text{см}$.

Задача 7. Промінь a проходить між сторонами кута (cd). Знайдіть кут (cd), якщо: $\angle(ac) = 94°$, $\angle(ad) = 85°$.

Розв'язання: за аксіомою 7 $\angle(cd) = \angle(ac) + \angle(ad) = 94° + 85° = 179°$.

Відповідь: $\angle(cd) = 179°$.

Задача 8. Між сторонами кута (ab), який дорівнює 60°, проходить промінь c. Знайдіть кути (ac) і (bc), якщо градусні міри кутів (ac) і (bc) співвідносяться як 2 : 3.

Розв'язання: оскільки промінь c проходить між сторонами кута (ab), то за аксіомою 7 $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$. Нехай градусна міра кута (ac) дорівнює $2a$, а кута (be) $3a$. Тоді $2a + 3a = 60°$, $a = 12°$. Отже, $\angle(ac) = 24°$, $\angle(bc) = 36°$.

Відповідь: $\angle(ac) = 24°$, $\angle(bc) = 36°$.

Задача 9. Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, в 4 рази більший іншого. Знайдіть ці кути.

Розв'язання: позначимо шукані кути α і β. Шукані кути, утворені при перетині, суміжні. За теоремою 3 $\alpha + \beta = 180°$. За умовою $\alpha = 4\beta$, тоді $5\beta = 180°$, $\beta = 36°$, отже, $\alpha = 144°$.

Відповідь: $\alpha = 144°$, $\beta = 36°$.

Задача 10. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

Розв'язання: нехай $\angle AOB$ і $\angle BOC$ – суміжні кути, OM – бісектриса $\angle AOB$, ON – бісектриса $\angle BOC$ (рис. 134). Тоді $\angle AOB + \angle BOC = 180°$ (теорема 3).

Шуканий $\angle MON = \angle MOB + \angle BON$. Так як OM – бісектриса $\angle AOB$, а ON – бісектриса $\angle BOC$, то $\angle MOB = \frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle BON = \angle BOC$. Отже,

$$\angle MON = \angle MOB + \angle BON = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC) = 90°.$$

Відповідь: $\angle MON = 90°$.

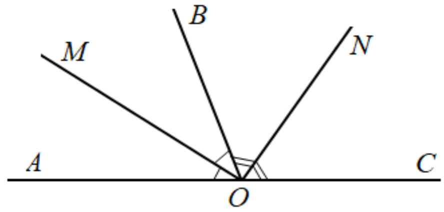


Рис. 134

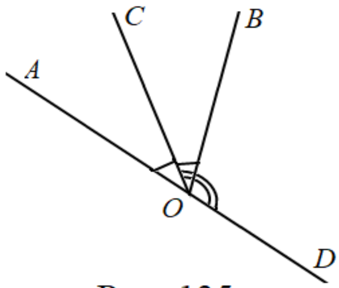


Рис. 135

Задача 11. Знайдіть кут між бісектрисою й продовженням однієї з сторін даного кута, який дорівнює 50°.

Розв'язання: нехай *AOB* – даний кут, *OC* – бісектриса $\angle AOB$, *OD* – продовження сторони *OA* кута *AOB*. Тоді шуканим і кут *COD* (рис. 135).

Так як $\angle AOC$ і $\angle COD$ – суміжні, то $\angle AOC + \angle COD = 180°$. За умовою *OC* – бісектриса $\angle AOB$, тому $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = 25°$.

Отже, $\angle COD = 180° - \angle AOC = 180° - 25° = 155°$.

Відповідь: $\angle COD = 155°$.

Вправи

Задача 1. Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох з цих кутів дорівнює 270° (рис. 136).

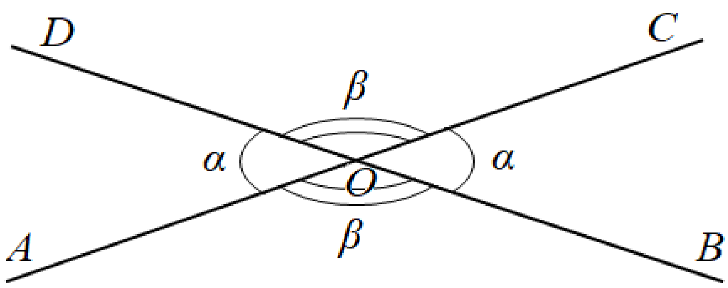


Рис. 136

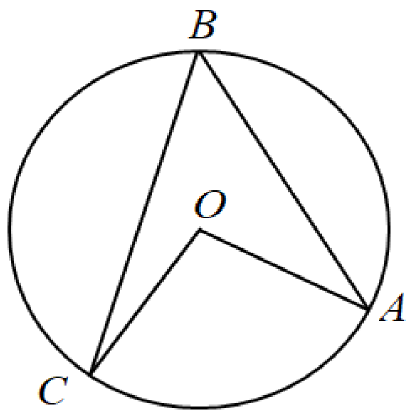


Рис. 137

Задача 2. Точки *A*, *B* і *C* лежать на колі. Знайти $\angle AOC$, якщо $\angle ABC = 42°$ (рис. 137).

Задача 3. З точки *M*, що рухається, опускаються перпендикуляри *MP* і *MQ* на діаметри *AB* і *CD* (рис. 138) Доведіть, що довжина відрізка *PQ* не залежить від розміщення точки *M*.

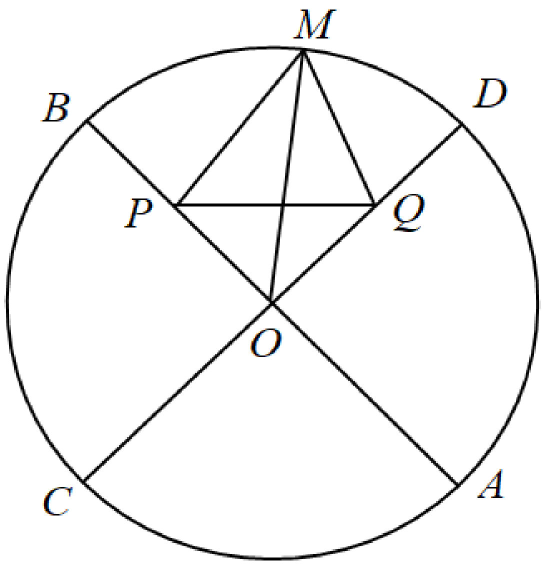


Рис. 138

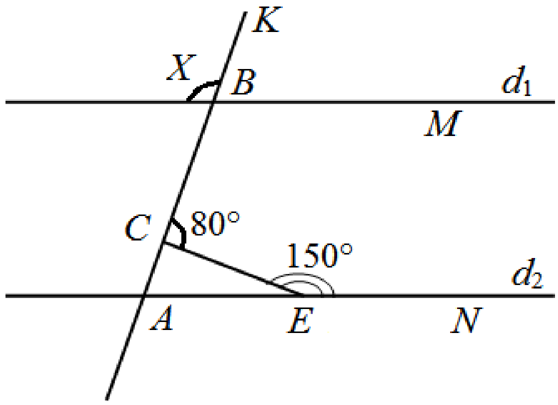


Рис. 139

Задача 4. На рис. 139 $d_1 \parallel d_2$, $\angle BCE = 80°$, $\angle CEN = 150°$. Якою є градусна міра $\angle X$?

Задача 5. На рис. 140 $AB = AC$, $BM \parallel DE$, $\angle D = 63°$. Якою є градусна міра кута ACM (рис. 140)?

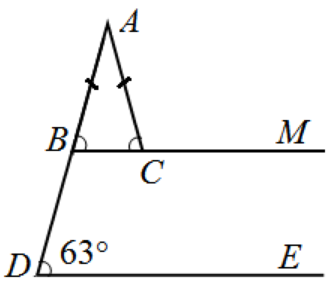


Рис. 140

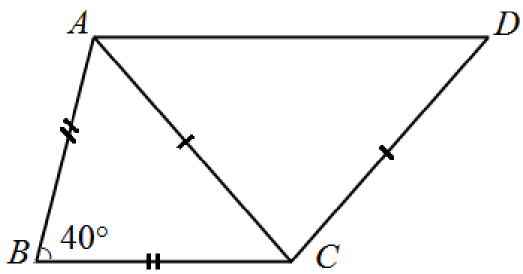


Рис. 141

Задача 6. На рис. 141 $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $AC = CD$, $\angle ABC = 40°$. Якою є градусна міра $\angle ACD$?

Задача 7. На рис. 142 K – точка перетину бісектрис ΔABC, $\angle CKA = 120°$. Знайдіть градусну міру кута ABC.

Задача 8. В рівнобедреному ΔABC $\angle ABC = 150°$, $BC = 10$. Знайдіть довжину висоти трикутника AH (рис. 143).

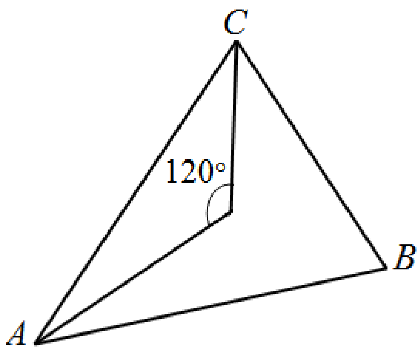


Рис. 142

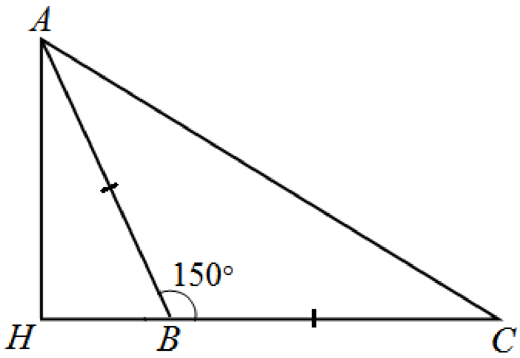


Рис. 143

Задача 9. В трикутнику ABC $\angle A = 90°$, $AD \perp BC$, $AB = 2BD$. Знайдіть градусну міру кута BCA (рис. 144).

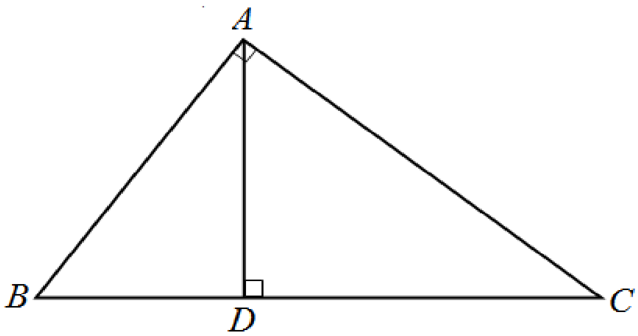


Рис. 144

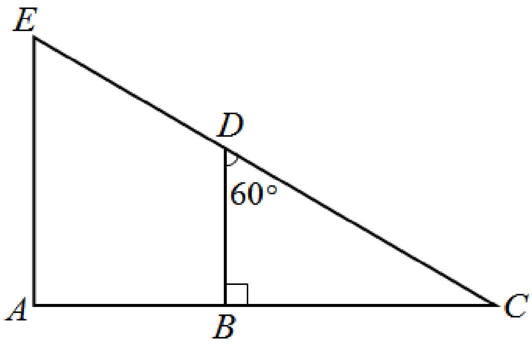


Рис. 145

Задача 10. В ΔCAE $BD \perp AC$, $AE \parallel DB$, $DE = 8$, $DB = 3$, $\angle BDC = 60°$. Знайдіть довжину відрізка AE (рис. 145).

Задача 11. В прямокутному трикутнику точка дотику Вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 і 12 см. Знайти катети трикутника (рис. 146).

Задача 12. В прямокутному трикутнику довжини сторін утворюють арифметичну прогресію з різницею 1 см. Знайти довжину гіпотенузи (рис. 147).

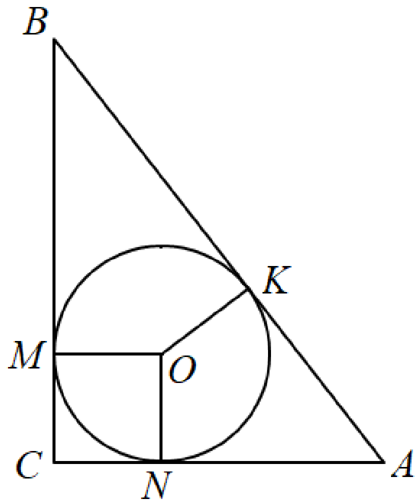


Рис. 146

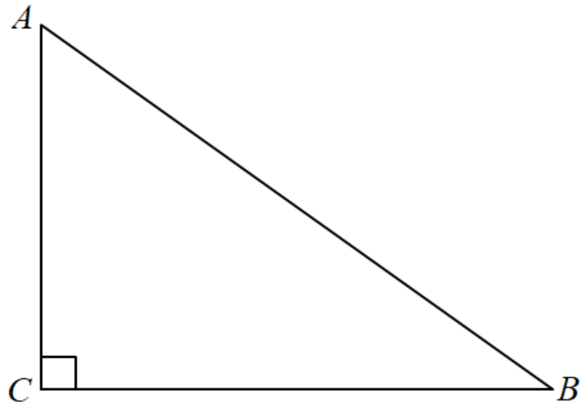


Рис. 147

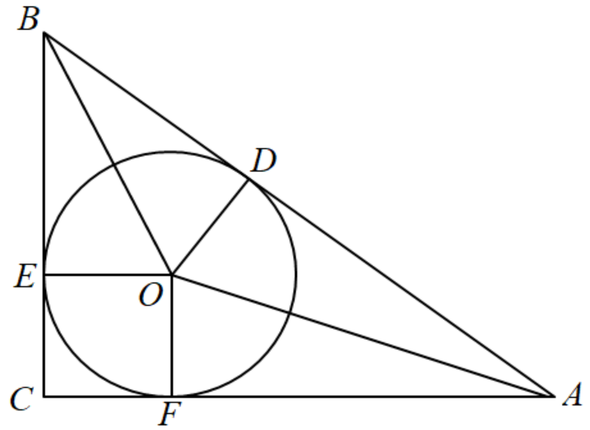


Рис. 148

Задача 13. Периметр прямокутного трикутника дорівнює $2p$, гіпотенуза дорівнює c. Визначити площу круга, вписаного в цей трикутник (рис. 148).

Задача 14. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайти відношення радіуса кола, вписаного в нього, до висоти, що проведена до гіпотенузи (рис. 149).

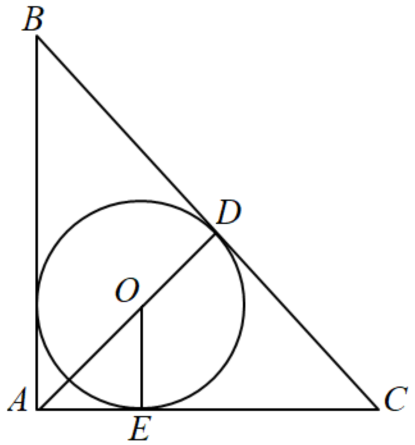


Рис. 149

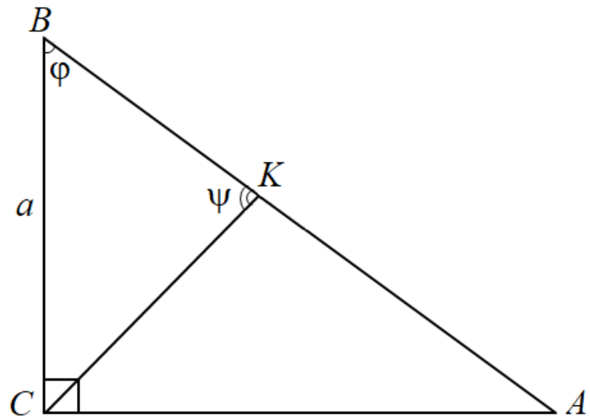


Рис. 150

Задача 15. Знайти бісектрису прямого кута трикутника, в якого катети дорівнюють a і b (рис. 150).

Задача 16. На сторонах трикутника в зовнішню сторону побудовані три квадрати. Якими мають бути кути трикутника, щоб шість вершин цих квадратів, відмінні від вершин трикутника, лежали на одному колі (рис. 151)?

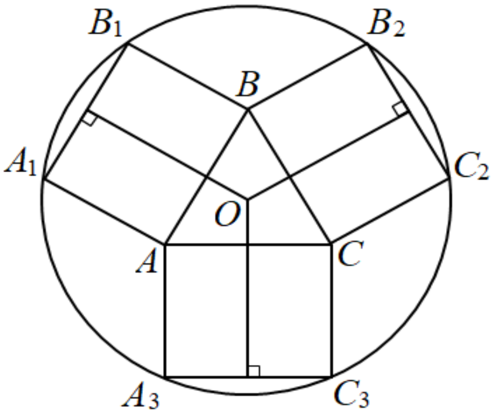


Рис. 151

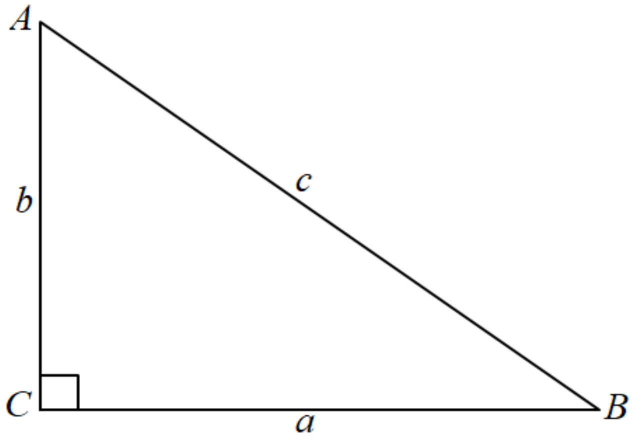


Рис. 152

Задача 17. Дано прямокутний трикутник з периметром $2p$, площею m^2. Визначити сторони цього прямокутного трикутника (рис. 152).

Задача 18. Знайти бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо сума двох нерівних висот цього трикутника дорівнює l, а кут при вершині дорівнює α (рис. 153).

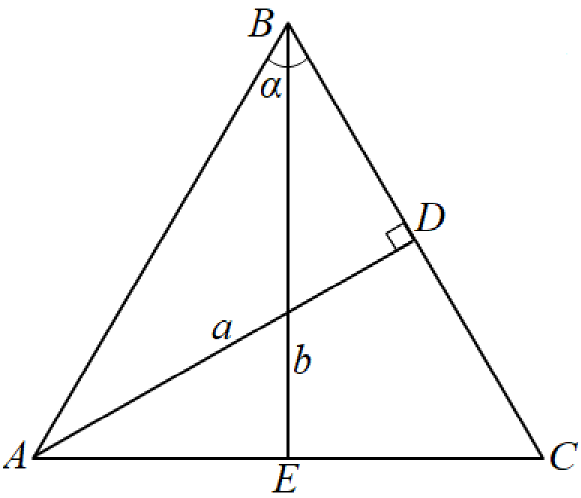


Рис. 153

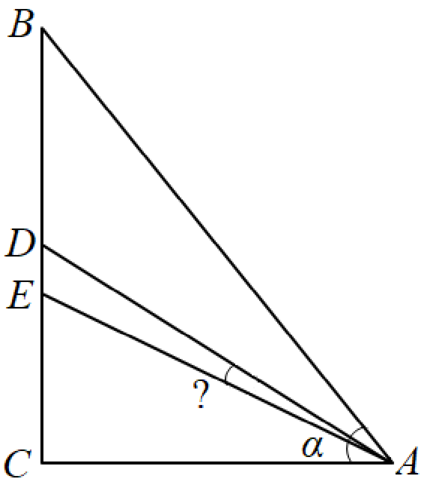


Рис. 154

Задача 19. В прямокутному трикутнику знайти кут між медіаною та бісектрисою, що проведені з вершини гострого кута, який дорівнює α (рис. 154).

Задача 20. Знайти косинуси гострих кутів прямокутного трикутника, знаючи, що добуток тангенсів половини цих кутів дорівнює 1/6 (рис. 155).

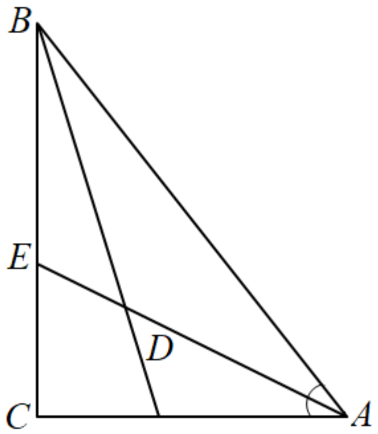


Рис. 155

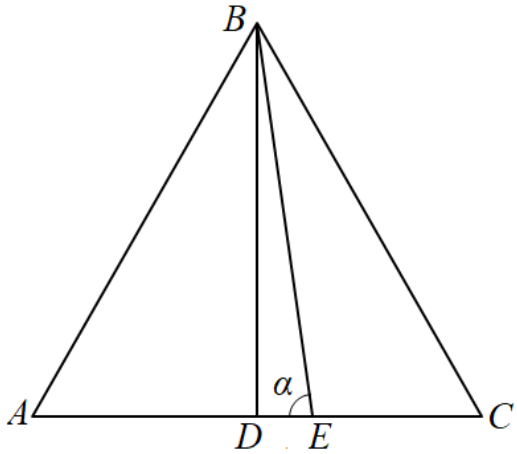


Рис. 156

Задача 21. Промінь, проведений з вершини рівнобічного трикутника, розбиває його основу у відношенні $m\colon n$. Знайти тупий кут між променем і основою (рис. 156).

Задача 22. Довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника розбиває протилежну сторону на відрізки, пропорційні бічним сторонам (рис. 157).

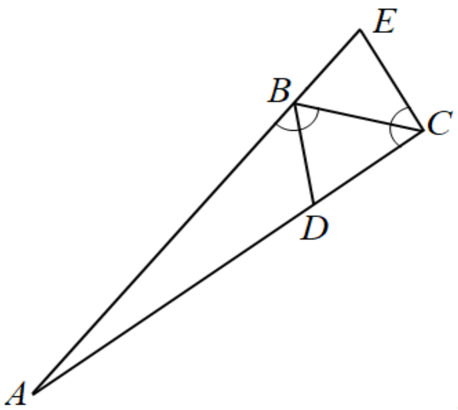


Рис. 157

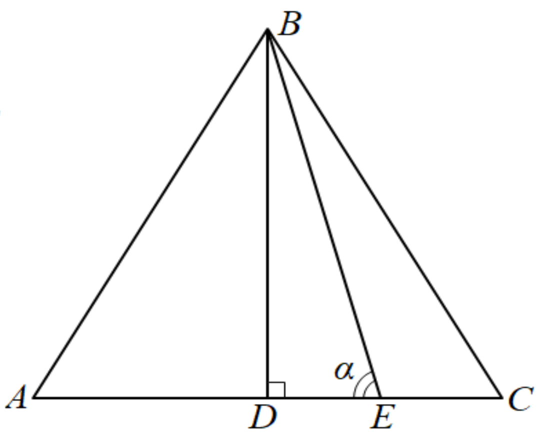


Рис. 158

Задача 23. Через вершину рівностороннього трикутника проведена пряма, яка ділить основу у відношенні 2:1. Під якими кутами вона нахилена до бічних сторін трикутника (рис. 158)?

Задача 24. В рівнобедрений трикутник з основою a й кутом α при основі вписане коло. Знайти радіус кола, яке дотикається до вписаного кола й бічних сторін трикутника (рис. 159).

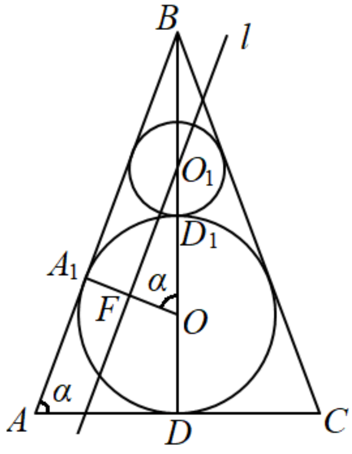


Рис. 159

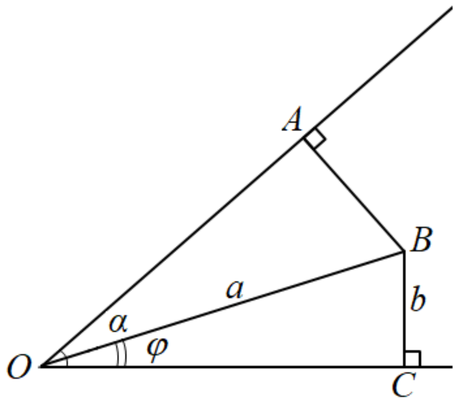


Рис. 160

Задача 25. Всередині даного кута α розміщена точка на відстані a від вершини і на відстані b від однієї сторони. Знайти відстань від цієї точки до іншої сторони (рис. 160).

Задача 26. Довести, що в будь-якому прямокутному трикутнику для висоти h, опущеної з вершини прямого кута, й радіуса r вписаного круга справедлива нерівність $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$.

Задача 27. В рівнобедреному трикутнику основа й бічна сторона дорівнюють a і b. Кут при вершині дорівнює 20°. Довести, що $a^2 + b^2 = 3ab^2$.

Задача 28. На колі, описаного навколо рівностороннього трикутника, взята довільна точка. Довести, що сума відстаней від цієї точки до найближчих вершин трикутника дорівнює відстані від цієї точки до найбільш віддаленої вершини (рис. 161).

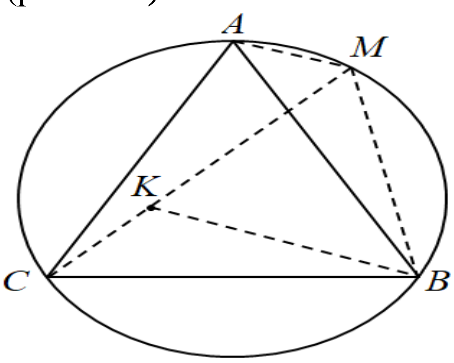


Рис. 161

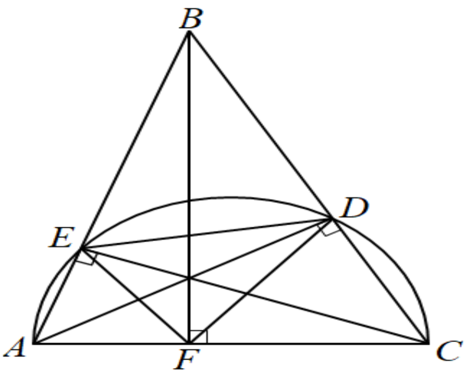


Рис. 162

Задача 29. В довільному гострокутному трикутнику основи його висот сполучаються відрізками прямих. Довести, що для отриманого таким чином трикутника відрізки висот є бісектрисами.

Задача 30. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює H і вдвічі більша своєї проекції на бічну сторону. Знайти площу трикутника (рис. 163).

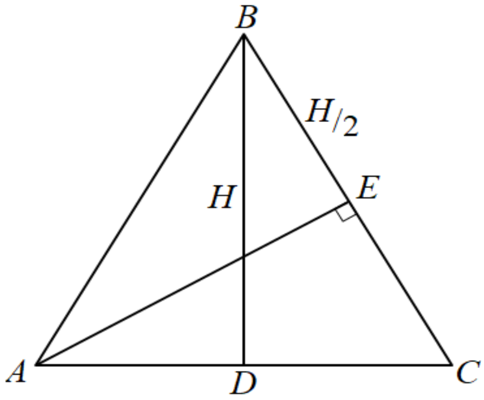


Рис. 163

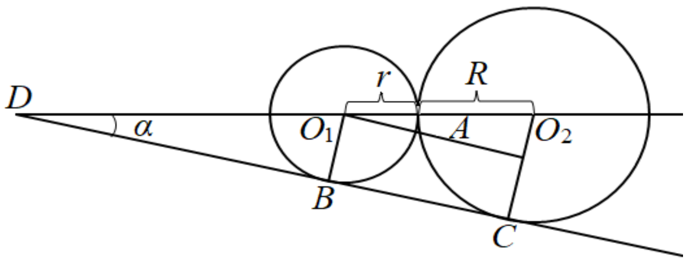


Рис. 164

Задача 31. Зовнішня дотична двох кіл, які зовнішньо дотикаються, складає з лінією центрів кут α. Знайти відношення радіусів цих кіл (рис. 164).

Задача 32. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює m і ділить прямий кут у відношенні 1 : 2. Знайти сторони трикутника (рис. 165).

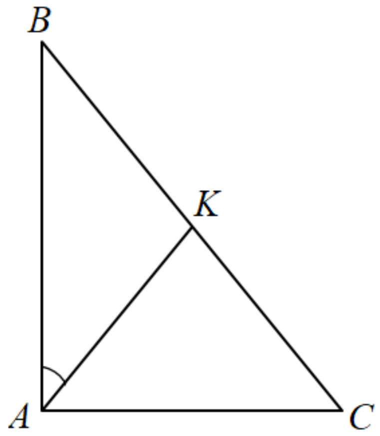


Рис. 165

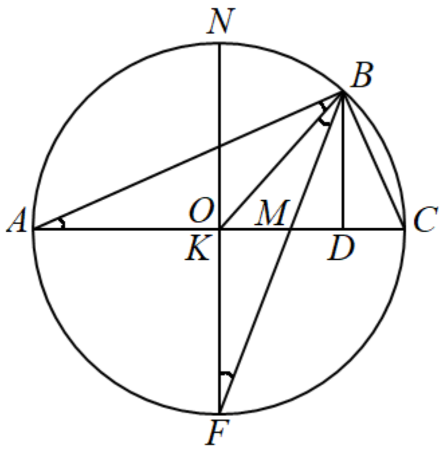


Рис. 166

Задача 33. Медіана, бісектриса й висота трикутника, які виходять з однієї вершини, ділять кут на чотири рівні частини. Знайти кути трикутника (рис. 166).

ТЕМА 2. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ НА ПЛОЩИНІ

2.1. Креслярські інструменти

В геометрії постійно доводиться розв’язувати задачі на побудову геометричних фігур за допомогою креслярських інструментів.

В деяких випадках у задачі сказано, якими креслярськими інструментами користуватись при побудові. У випадках, коли це не обумовлено, можна самим вибирати потрібні для побудови

Існують різні види задач на побудову в залежності від набору інструментів: побудова циркулем і лінійкою; побудова тільки одним циркулем (побудова Мора-Маскервіні); побудова тільки однією лінійкою: якщо на площині накреслене коло і його центр (побудова Штейнгера); за допомогою косинця; за допомогою транспортира і т.д.

За допомогою лінійки можна накреслити (у вигляді відрізка) зображення: а) довільної прямої; б) прямої, яка проходить через дану точку; в) прямої, яка проходить через дві дані точки. За допомогою лінійки не можна відкладати відрізки, навіть якщо вона має поділки, не можна користуватись обома краями лінійки.

За допомогою циркуля можна: а) побудувати коло даного радіуса з центром в даній точці; б) відкласти даний відрізок на даній прямій від даної точки.

За допомогою косинця можна виконати ті самі побудови, що й лінійкою; крім цього, можна сумістити одну з сторін косинця з даною прямою й провести пряму по іншій стороні кута. За допомогою косинця можна також побудувати прямий кут.

За допомогою транспортира можна побудувати точку на промені, який утворює деякий даний кут з даною прямою з вершиною в даній точці.

В геометрії, як правило, точними вважаються побудови, які виконуються за допомогою циркуля та лінійки.

Існують задачі на побудову, які неможливо розв’язати за допомогою циркуля та лінійки.

1. Задача на трисекцію кута. Дано кут α. Побудувати кут $\frac{1}{3}\alpha$.

2. Задача на подвоєння куба. Дано куб (тобто дано відрізок, який дорівнює ребру куба). Побудувати інший куб (тобто побудувати ребро такого куба), об’єм якого вдвічі більший за об’єм даного куба.

3. Задача на квадратуру круга. Дано круг. Побудувати квадрат, рівновеликий цьому кругу.

Доведення неможливості розв’язання цих задач вимагає глибоких математичних знань. Доведено, що коли геометрична фігура, яку ми хочемо побудувати, може бути виражена формулою, що містить тільки раціональні функції й дію добування квадратного кореня, то тоді цей об’єкт можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки.

2.2. Найпростіші задачі на побудову

У всіх розглянутих тут задачах можна користуватися тільки двома креслярськими інструментами – лінійкою та циркулем.

Під час розв’язання задач на побудову перш за все потрібно знати, як виконати побудову, а вже потім її виконувати. Крім того, важливо вміти довести, що запропонована побудова приведе до побудови фігури з потрібними властивостями.

Розглянемо найпростіші задачі на побудову.

Задача 1. Побудувати трикутник з даними сторонами a, b і c.

На рис. 167 побудова ΔABC виконана так: за допомогою лінійки провели пряму й за допомогою циркуля – три кола: з радіусами $BC = a$ і $BA = c$ з центром в точці B, радіусом $CA = b$ з центром в точці C.

Ця задача не завжди може мати розв'язок. Для сторін a, b, c трикутника повинні виконуватися умови:

$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b$ (див. теорема 14).

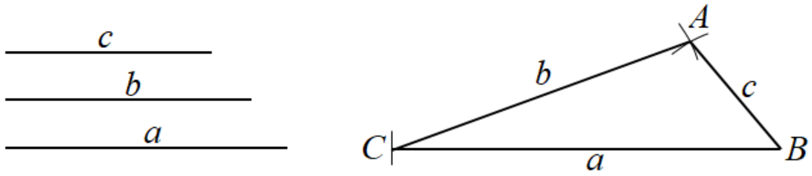


Рис. 167

Задача 2. Побудувати кут, що дорівнює даному.

На основі аксіоми 8 від даної півпрямої в дану півплощину можна відкласти кут, що дорівнює даному куту. Як це зробити за допомогою циркуля та лінійки?

На рис. 168 побудова виконана так: $\angle A$ – даний кут, OB_1 – дана півпряма. Провели два кола з центрами A й O та однаковими довільними радіусами й коло з центром B_1 радіусом BC. Очевидно, $\Delta BAC = \Delta B_1OC_1$ за третьою ознакою рівності трикутників (теорема 17), звідки $\angle A = \angle O$.

Задача 3. Побудувати бісектрису даного кута.

На рис. 169 побудова бісектриси AD даного кута BAC виконана так: побудували три кола з центрами в точках A, B і C та одним довільним радіусом. Точку перетину кіл із центрами в точках B і C – точку D сполучили з точкою A. Півпряма AD – бісектриса кута BAC. Доведення цього факту полягає на рівності трикутників ABD і ACD за третьою ознакою рівності трикутників (теорема 17).

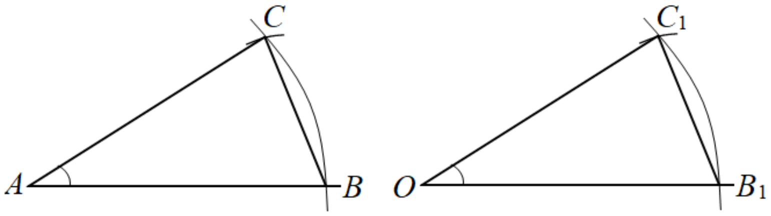


Рис. 168

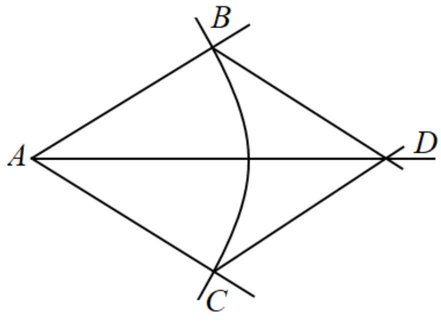


Рис. 169

Задача 4. Розділити відрізок пополам.

На рис. 170 побудова середини відрізка AB виконана так: будуємо два кола з центрами в точках A і B радіусом AB. Точки C і C_1 лежать в різних півплощинах, тому відрізок CC_1 перетинає AB в точці O – середині відрізка AB.

Доведення базується на рівності трикутників: $\Delta CAC_1 = \Delta CBC_1$ (теорема 17), $\Delta ACO = \Delta BCO$ (теорема 15).

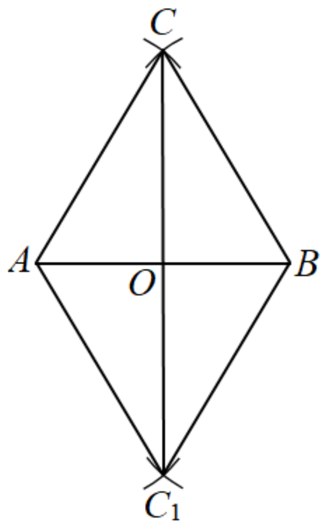


Рис. 170

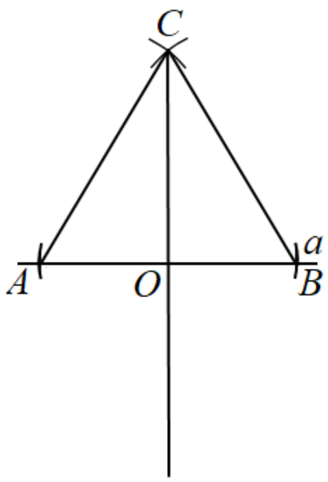


Рис. 171

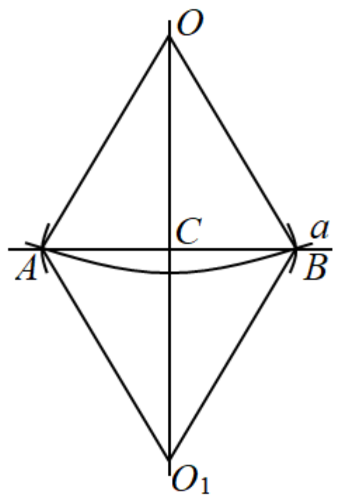


Рис. 172

Задача 5. Через дану точку O провести пряму, перпендикулярну даній прямій a.

Можливі два випадки.

1. Точка O належить прямій a. Побудова зображена на рис. 171. Будуємо три кола: з центром в точці O довільним радіусом (вони перетинають пряму a в точках A і B), з центрами в точках A і B радіусом AB. Точку перетину двох останніх кіл – точку C сполучимо з точкою O. Пряма OC шукана.

Перпендикулярність прямих витікає з рівності трикутників ACO і BCO (теорема 17).

2. Точка O не належить прямій a. Побудова, зображена на рис. 172, виконана так: побудували три кола: з центром в точці O довільним радіусом, A і B – точки перетину кола з прямою a; з центрами в точках A і B, таким самим радіусом, O_1 – точка їх перетину, що лежить у півплощині, в якій не лежить точка O. Пряма OO_1 – шуканий перпендикуляр.

Доведення будуємо так:

1) $\Delta AOB = \Delta AO_1B$ (теорема 17), звідси $\angle OAC = \angle O_1AC$.

2) $\Delta AOC = \Delta AO_1C$ (теорема 17), звідси $\angle ACO = \angle ACO_1$.

3) $\angle ACO$ і $\angle ACO_1$ суміжні, а так як вони рівні, то вони прямі. Значить, OC – перпендикуляр, опущений з точки O на пряму a.

2.3. Геометричне місце точок на площині

Геометричним місцем точок на площині називається фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певні властивості.

***Теорема* 29.** Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних точок, є серединний перпендикуляр до відрізка, що сполучає ці точки.

На рис. 173 до відрізка AB проведено серединний перпендикуляр CC_1. Теорема 29 стверджує, що: а) кожна точка прямої CC_1 рівновіддалена від A і B;

б) кожна точка площини рівновіддалена від A і B, лежить на прямій CC_1. Нижче перелічені кілька геометричних місць точок на площині.

1. Геометричне місце точок, які знаходяться на даній відстані від даної точки, є колом з центром в цій точці та радіусом, який дорівнює даній відстані.

2. Геометричне місце точок, що знаходяться на даній відстані від даної прямої, складається з двох прямих, кожна з яких паралельна даній і знаходиться від неї на даній відстані.

3. Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох перетинних прямих, складається з двох прямих, на яких лежать бісектриси всіх кутів, отриманих при перетині даних прямих.

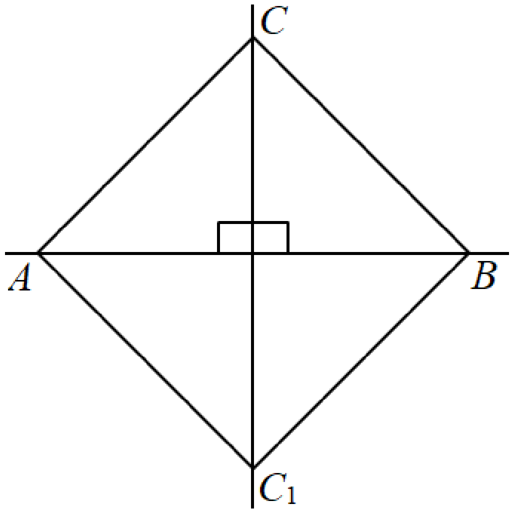


Рис. 173

4. Геометричне місце точок, з яких відрізок AB видно під даним кутом α і які лежать по одну сторону від прямої AB, є дуга кола з кінцями в точках A і B.

Метод геометричних місць, застосований при розв'язанні задач на побудову, полягає в слідуючому: нехай треба побудувати точку X, що задовольняє дві умови. Геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, є фігура F_1, а геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, є фігура F_2. Шукана точка X належить F_1 і F_2, тобто є їх спільною точкою.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і сумою другого катета й гіпотенузи.

Розв'язання: нехай прямокутний трикутник ABC, один з катетів якого a, а сума другого катета і гіпотенузи $b + c$, побудовано (рис. 174).

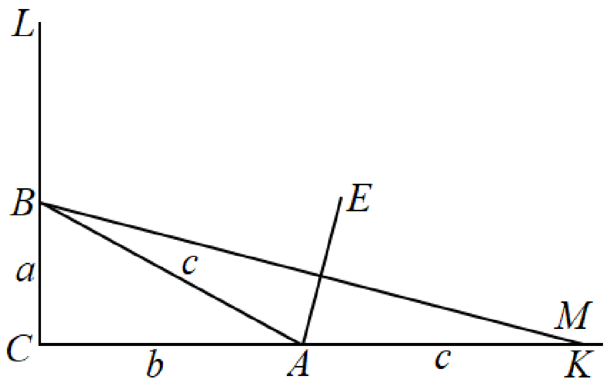


Рис. 174

На продовженні катета b від вершини C відкладемо відрізок CM довжиною $b + c$. Сполучивши точки B і M, одержимо трикутник ABM. Цей трикутник рівнобедрений, так як AB дорівнює AM. Тому точка A рівновіддалена від точок B і M.

Побудова. Будуємо прямий кут LCK. Від вершини C на сторонах кута відкладаємо відповідно відрізки $CB = a$ і $CM = c + b$. Сполучивши B і M, отримаємо ΔBCM.

Проводимо до відрізка BM через його середину E перпендикуляр EA. Точку перетину перпендикуляра з відрізком CM (точку A) сполучимо з точкою B.

Трикутник *ABC* – шуканий.

Дійсно, точка *A*, яка належить *AE*, рівновіддалена від *B* і *M*, а тому *AB* = *AM*. Але *CA* і *CB* – катети прямокутного трикутника, при цьому *BC* = *a*. Так як *CA* + *AM* = *b* + *c*, а *AM* = *AB*, то *CA* + *AB* = *b* + *c*. Отже, трикутник *ABC* – шуканий.

Щоб побудова трикутника *ABC* була можливою, необхідно додержуватися умови $a < b + c$.

Задача 2. Побудувати трикутник за кутом і двома висотами, опущеними на сторони даного кута.

Розв'язання: припустимо, що трикутник *ABC* (рис. 175) побудований. *BR*, *AD*, $\angle BCA$ – дані висоти і кут.

Якщо з якої-небудь точки *E* сторони *AC* відновимо перпендикуляр і відкладемо на ньому відрізок *EK*, що дорівнює h_b, то вершина *B* трикутника *ABC* є точкою перетину сторони кута *ACB* (сторони *BC*) з прямою *KL*, проведеною через точку *K* паралельно AC.

Аналогічно вершина *A* служить точкою перетину сторони *AC* з прямою *NM*, проведеною паралельно до *CB* з довільної її точки *P*, причому довжина відрізка *NP* дорівнює h_a.

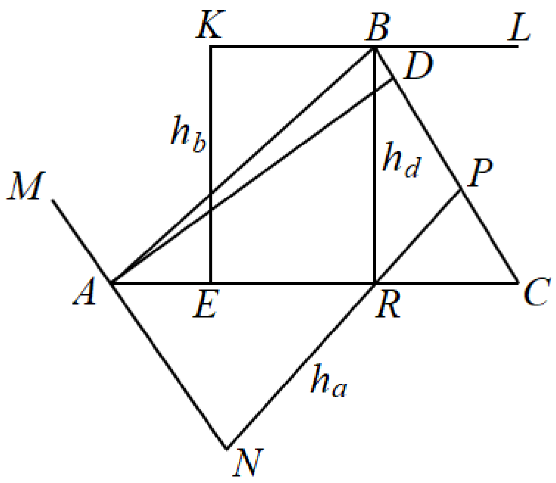


Рис. 175

Побудова. З довільної точки *P* сторони *BC* і довільної точки *E* сторони *AC* кута *BCA* відновимо перпендикуляри до цих сторін, відкладемо на них відрізки, що дорівнюють h_a і h_b; через кінці цих відрізків проведемо прямі, паралельні сторонам кута, до перетину з цими сторонами в точках *B* і *A*. Трикутник *ABC* і буде шуканим.

Задача 3. Побудувати трикутник за стороною, сумою двох інших сторін і висотою, опущеною на одну з цих сторін.

Розв'язання: допустимо, що трикутник *ABC* побудований (рис. 176). Відомо, що *BC* +*AC* = *s*, *AB* = *c*, *BD* = h_b.

Продовжимо сторону *AC* на відрізок *CK* = *BC*. Точка *C* лежить на перетині прямої *AK* з перпендикуляром, проведеним через середину *BK*.

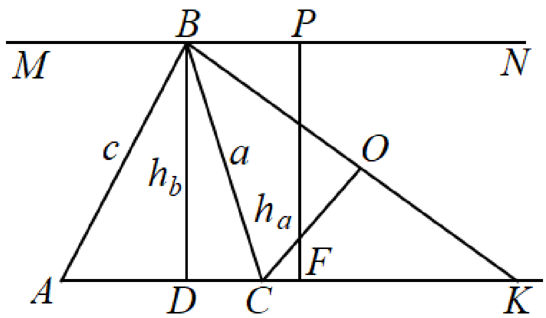


Рис. 176

Побудова. Відкладемо відрізок *AK*, що дорівнює *s*. Із довільної точки *F* прямою *KA* відновимо перпендикуляр і відкладемо на ньому відрізок $FP = h_b$. Через точку *P* проведемо пряму *MN* паралельно до *KA*. Із точки *A* радіусом, що дорівнює *c*, проведемо дугу й знайдемо точку перетину її з прямою *MN* (точка *B*). Розділимо відрізок *BK* пополам і з його середини (точки *O*) відновимо перпендикуляр до перетину в точці *C* з прямою *BK*. Сполучивши точки *A* з *B* і *B* з *C*, отримаємо шуканий трикутник *ABC*.

Задача 4. Побудувати трикутник за основою, протилежним кутом і медіаною, проведеною до основи.

Розв'язання: нехай ΔABC (рис. 177) шуканий. Тоді відрізок AC буде видно під даним кутом *ABC*. За умовою задачі також відома медіана *BD*. Таким чином, можна стверджувати, що вершина *B* лежить на перетині двох геометричних місць точок, а саме: кола з центром в точці *D* і радіусом, що дорівнює довжині медіани *BD*, і дуги сегмента, що містить даний кут *ABC*.

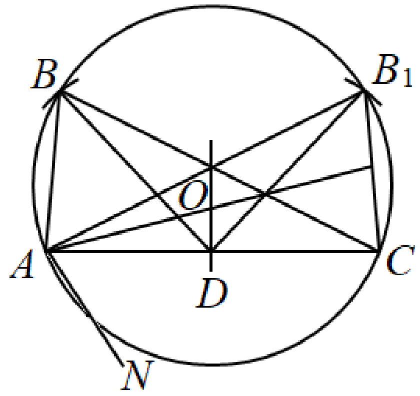


Рис. 177

Побудова. В точці *A* будуємо $\angle CAN = \angle B$. Проводимо $OA \perp AN$, а через середину $AC - DO \perp AC$. Точка *O* перетину AO і *DO* дасть центр кола, дуга ABB_1C якого є геометричним місцем точок, з яких AC видно під кутом *B*. Розхилом циркуля, що дорівнює довжині медіани, із *D* як центра знаходимо точки перетину з колом, що дадуть нам шукану вершину *B*.

Задача може мати два розв'язки або один, або взагалі не мати розв'язків.

Задача 5. Побудувати трикутник за трьома медіанами.

Розв'язання: допустимо, що ΔABC (рис. 178) шуканий. Продовжимо медіану *BD* на величину, що дорівнює $\frac{1}{3}$ її довжини. Розглянемо ΔOAE, де *O* – точка перетину медіан ΔABC:

$$AO = \frac{2}{3}m_a;\;\; OE = \frac{2}{3}m_b;\;\; \Delta ADE = \Delta ODC,$$

тому що $AD = DC$, $OD = DE$, $\angle ODC = \angle ADE$. Отже, $AE = OC = \frac{2}{3}m_c$.

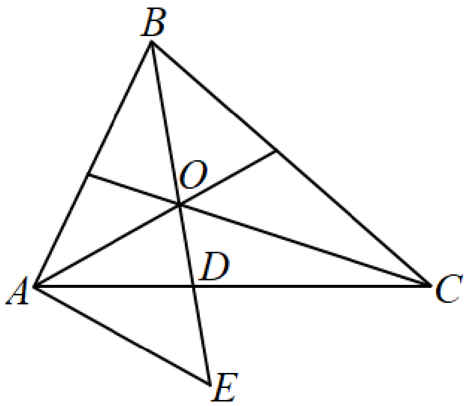


Рис. 178

Побудова. Побудуємо ΔAOE за даними трьома сторонами, кожна з яких дорівнює $\frac{2}{3}$ відповідної медіани шуканого трикутника. Проведемо медіану *AD* і продовжимо її на величину *DC* = *AD*. Сторону *OE* продовжимо на величину *OB* = *OE*. Отриману точку *B* сполучимо з точками *A* і *C*. Таким чином, ΔABC шуканий.

Вправи

Задача 1. Побудувати трикутник за основою, кутом, прилеглим до основи, кутом між медіаною, проведеною з вершини даного кута, й стороною, до якої проведена медіана (рис. 179).

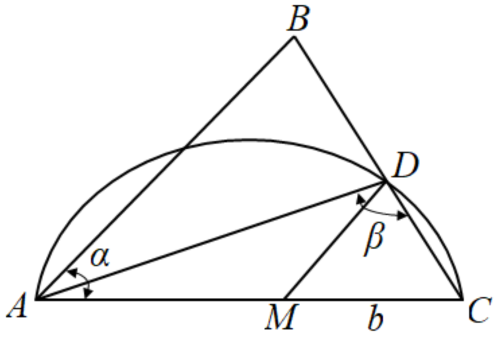


Рис. 179

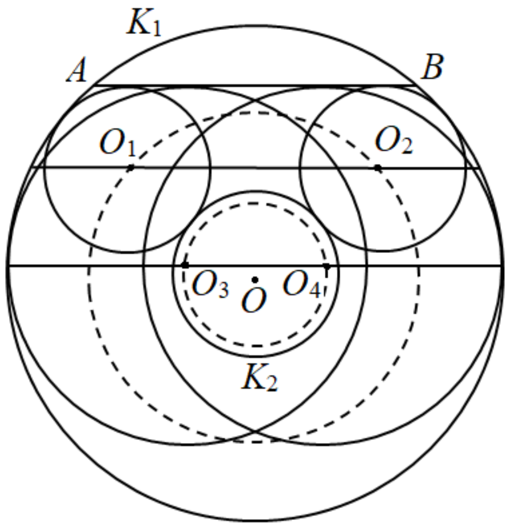


Рис. 180

Задача 2. Побудувати коло, дотичну до двох даних концентричних кіл і до даної прямої (рис. 180).

Задача 3. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і медіаною одного з катетів (рис. 181).

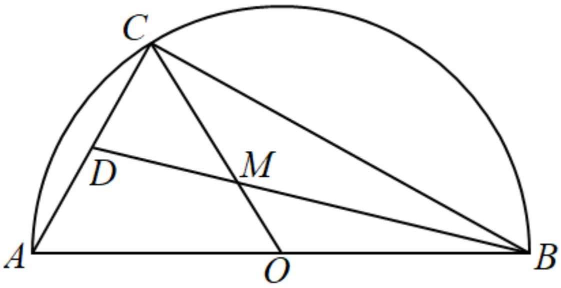


Рис. 181

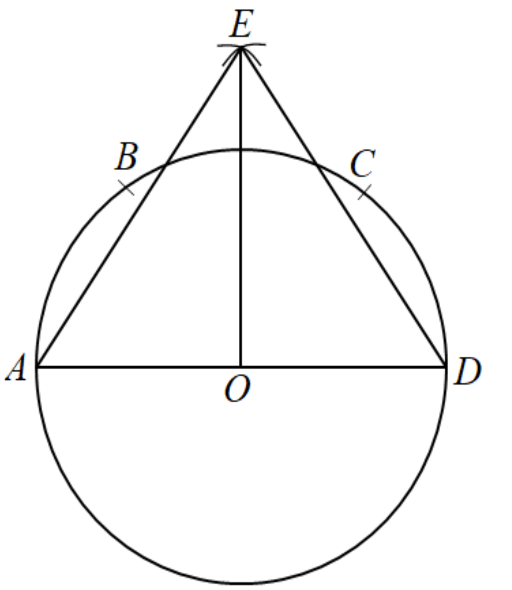


Рис. 182

Задача 4. Дані коло і його центр *O*. Пропонується за допомогою тільки циркуля розділить це коло на чотири рівні частини (задача Наполеона) (рис. 182, рис. 183).

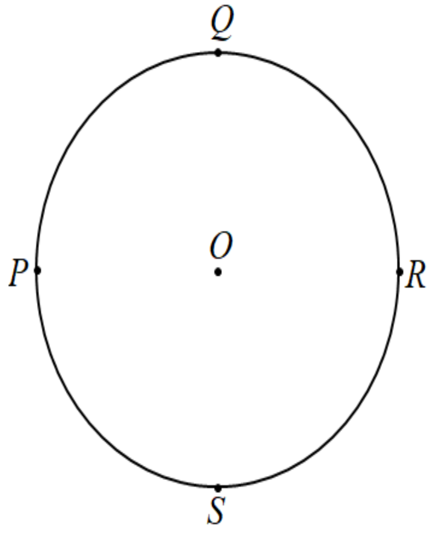


Рис. 183

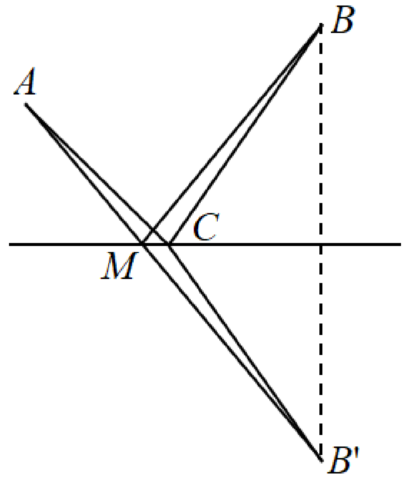


Рис. 184

Задача 5. По одну сторону від прямої дано довільні точки *A* і *B*. Потрібно знайти таку точку *M* на прямій, щоб ламана *AMB* мала найменшу довжину (рис. 184).

Задача 6. Побудуйте трикутник *ABC* за радіусом писаного кола і бісектрисою кута *A*, якщо відомо, що різниця кутів *B* і *C* дорівнює 90° (рис. 185).

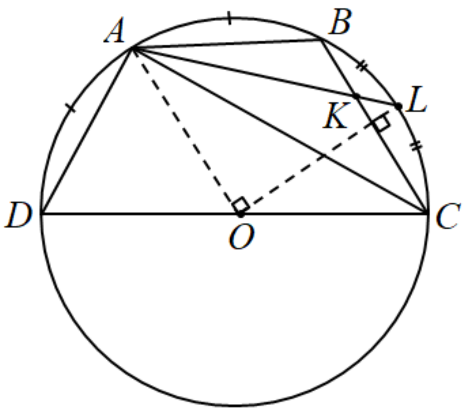


Рис. 185

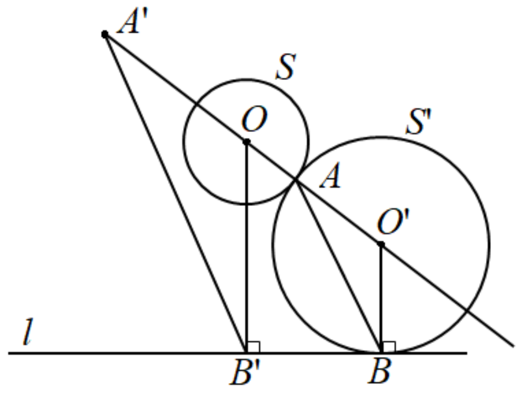


Рис. 186

Задача 7. Дані коло *S*, точка *A* на ньому й пряма *l*. Побудуйте коло, що дотикається до даного кола в точці *A* й даної прямої (рис. 186).

ТЕМА 3. ЧОТИРИКУТНИКИ

3.1. Опуклі чотирикутники

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно сполучають їх. При цьому жодні три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а сполучаючі їх відрізки не повинні перетинатися. Дані точки називаються *вершинами* чотирикутника, а відрізки, що їх сполучають, – *сторонами* чотирикутника.

Чотирикутник позначається його вершинами. Наприклад, на рис. 187, *а* зображений чотирикутник *MKCD*.

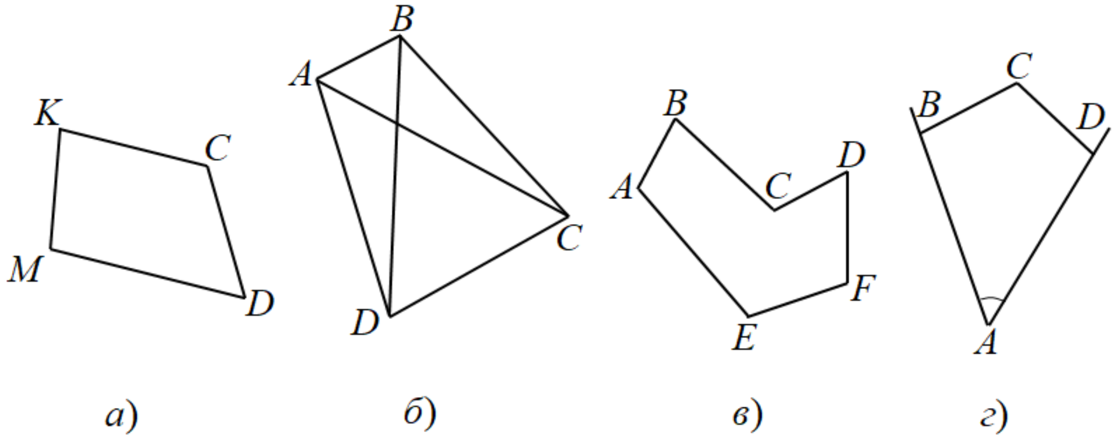


Рис. 187

Вершини чотирикутника називаються *сусідніми*, якщо вони є кінцями однієї з його сторін. Вершини, які не є сусідніми, називаються *протилежними*. Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються *діагоналями*. У чотирикутника *ABCD* на рис. 187, *б* вершини *A* і *B* є сусідніми, а вершини *B* і *D* – протилежними; діагоналями є відрізки *AC* і *BD*.

Сторони чотирикутника, які виходять з однієї вершини, називаються *сусідніми* сторонами. Сторони, які не мають спільного кінця, називаються *протилежними* сторонами. У чотирикутника *ABCD* на рис. 187, *б* протилежними є сторони *AB* і *DC*, *BC* і *AD*, а сторони *AB* і *AD* – сусідні.

Чотирикутник (як і будь-який багатокутник) називається *опуклим*, якщо він розміщений в одній півплощині відносно прямої, яка містить будь-яку його сторону. При цьому сама пряма вважається належною півплощині. На рис. 187, *а* і 187, *б* чотирикутники, а на рисунку 187, *в* неопуклий багатокутник.

Далі ми будемо розглядати тільки опуклі чотирикутники. *Кутом* опуклого чотирикутника *ABCD* при вершині *A* називається кут, утворений півпрямими *AB* і *AD*. На рисунку 187, *г* $\angle BAD$ – кут опуклого чотирикутника.

3.2. Паралелограм

Паралелограм – це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, тобто лежать на паралельних прямих. На рис. 188 чотирикутник *ABCD* – паралелограм, у якого $AB \parallel DC$ і $BC \parallel AD$. Можна довести таку *ознаку паралелограма*:

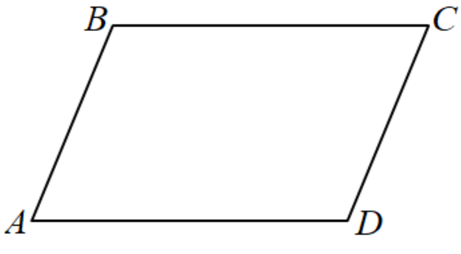


Рис. 188

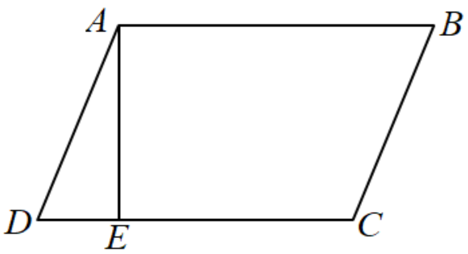


Рис. 189

***Теорема* 30.** Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться пополам, то цей чотирикутник – паралелограм.

Сформулюємо обернену теорему.

***Теорема* 31.** Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться пополам.

Наступна теорема розкриває ще одну властивість паралелограма.

***Теорема* 32.** У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.

Нехай $ABCD$ – паралелограм. З вершини A на пряму CD опущений перпендикуляр AE (рис. 189). Відрізок AE називається *висотою* паралелограма, відповідною сторонам AB і CD.

3.3. Прямокутник. Ромб. Квадрат

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі. На рис. 190, *а* зображений прямокутник $ABCD$ ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$).

Можна довести теорему про властивості прямокутника.

***Теорема* 33.** Діагоналі прямокутника рівні.

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рис. 190, *б* зображений ромб $ABCD$ ($AB = BC = CD = AD$).

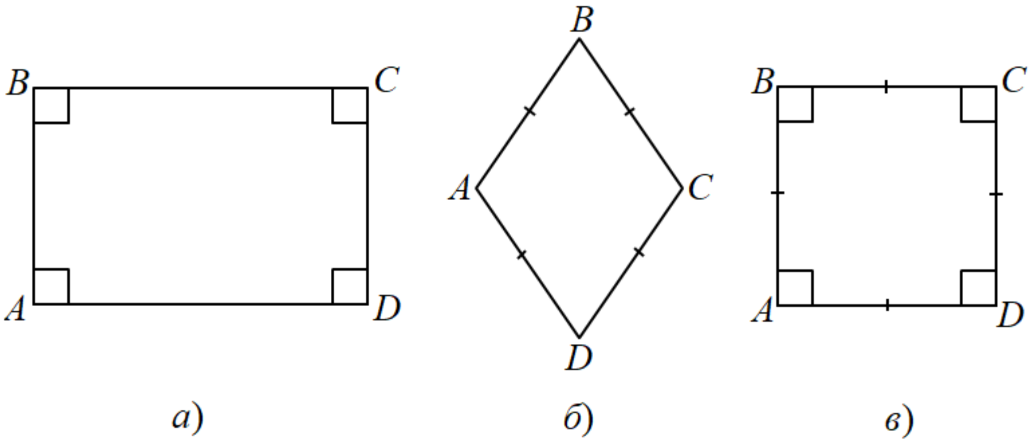


Рис. 190

Справедлива теорема про властивості ромба.

***Теорема* 34.** Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.

Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні. На рисунку 190, *в* зображений квадрат *ABCD*. Квадрат є і ромбом, тому що має властивості як прямокутника, так і ромба.

3.4. Трапеція

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні. Ці паралельні сторони називаються *основами* трапеції. Дві інші сторони називаються *бічними сторонами*.

На рис. 191, *а* зображена трапеція *ABCD*. Сторони *BC* і *AD* – основи трапеції, *AB* і *CD* – бічні сторони трапеції. Трапеція, в якій бічні сторони рівні, називається *рівнобічною*. В трапеції *KMD*C (рис. 191, *б*) *KM* = *DC*, а, значить, ця трапеція є рівнобічною.

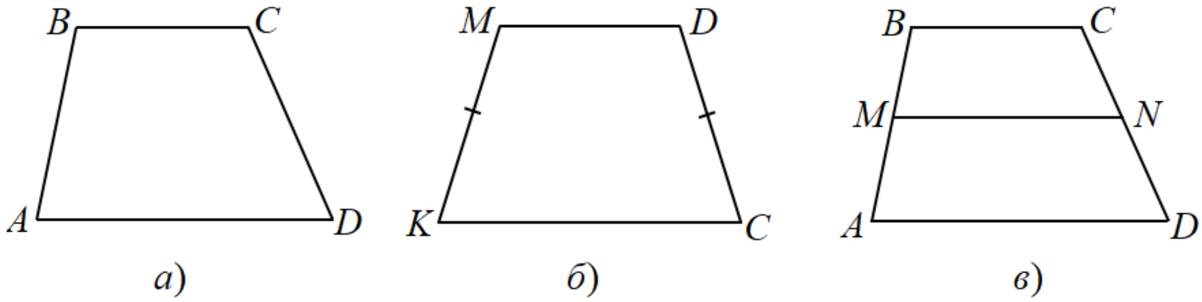


Рис. 191

Відрізок, який з'єднує середини бічних сторін, називається *середньою лінією трапеції*. На рис. 191, *в* відрізок *MN* – середня лінія трапеції *ABCD*.

Сформулюємо теорему про властивості середньої лінії трапеції.

***Теорема* 35.** Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

На рис. 192, зображена трапеція *ABCD*. З точок *A* і *B* опущені перпендикуляри *AE* і *BF* на пряму *CD*. Відрізки *AE* і *BF* дорівнюють відстані між паралельними прямими *AB* і *CD*. Ця відстань називається висотою трапеції.

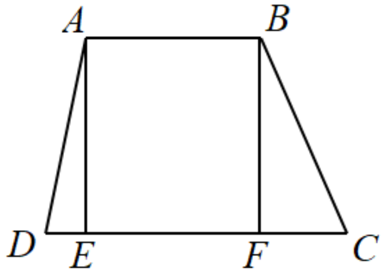


Рис. 192

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить його сторону на відрізки довжиною m і n. Визначити діагоналі ромба.

Розв'язання: позначимо через *E* проекцію *B* на сторону *AD* ромба *ABCD* (рис. 193). За умовою $AE = m$, $ED = n$. Значить, сторона ромба дорівнює $m + n$. Знайдемо висоту ромба *BE* і його діагоналі. З трикутника *ABE* маємо

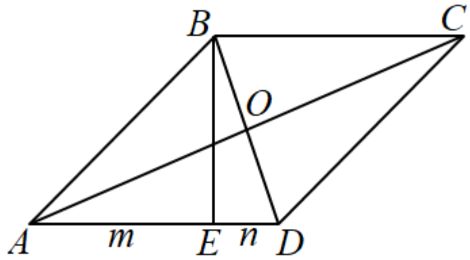


Рис. 193

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{(m+n)^2 - m^2} = \sqrt{n^2 + 2mn}$$

Далі з трикутників *BDE* і *AOD* отримуємо:

$$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{n^2 + 2mn + n^2} = \sqrt{2n(m+n)},$$

$$AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{(m+n)^2 - \left(\frac{1}{2}BD\right)^2} =$$

$$= \sqrt{m^2 + 2mn + n^2 - \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}n^2} = \sqrt{m^2 + \frac{3}{2}mn + \frac{1}{2}n^2}$$

Значить, $AC = 2AO = \sqrt{4m^2 + 6mn + 2n^2}$.

Відповідь: $\sqrt{2n(m+n)}$; $\sqrt{4m^2 + 6mn + 2n^2}$.

Задача 2. Коло висікає на всіх чотирьох сторонах чотирикутника рівні хорди. Доведіть, що в цей чотирикутник можна вписати коло.

Розв'язання: нехай *O* – центр шуканого кола, *R* – його радіус, *a* – довжина хорд, які відсікає коло на сторонах чотирикутника, тобто *EF* = *E'F'* = *E''F''* = *E'''F''* = *a* (рис. 194). Тоді відстань від точки *O* до сторін чотирикутника дорівнює $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, тобто точка *O* рівновіддалена від сторін чотирикутника і є центром вписаного кола.

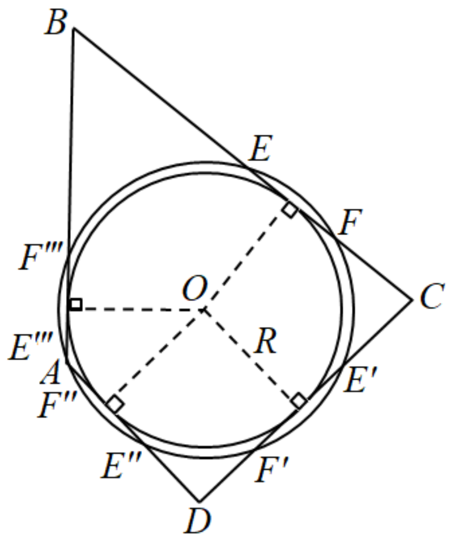


Рис. 194

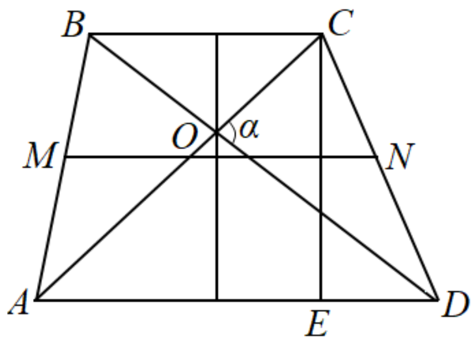


Рис. 195

Задача 3. Висота рівнобедреної трапеції дорівнює *h*, кут між її діагоналями, протилежний бічній стороні, дорівнює *a*. Знайти середню лінію трапеції.

Розв'язання: нехай *ABCD* – задана трапеція (рис. 195), *MN* – середня лінія, *O* – точка перетину діагоналей, *CE* = *h* – висота трапеції. Вочевидь, що *MN* = *AE*. Тому достатньо знайти *AE*. Знайдемо $\angle CAD$. Маємо:

$$\angle CAD = \angle BDA,\ \angle CAD + \angle BDA = \alpha.$$

Значить $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$. Тепер з трикутника ACE знаходимо

$$AE = h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь: $h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Задача 4. Навколо круга радіусом R описана рівнобедрена трапеція з гострим кутом α біля основи. Знайти периметр цієї трапеції.

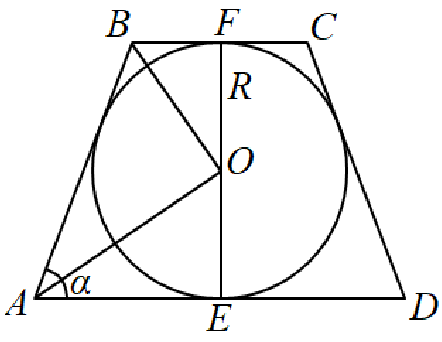


Рис. 196

Розв'язання: нехай *ABCD* – задана трапеція (рис. 196), *O* – центр вписаного в неї круга, *E* і *F* – точки дотику круга з основами трапеції. Так як за умовою в трапецію *ABCD* можна вписати круг, то суми її протилежних сторін дорівнюють *AD* + *BC* = *AB* + *CD*. Тому достатньо знайти основи *AD* і *BC*. З трикутника *OAE*, в якому $\angle OAE = \frac{\alpha}{2}$, $OE = R$, маємо

$$AE = OE \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогічно з трикутника *BOF* отримуємо $BF = R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Значить периметр трапеції

$$2(AD + BC) = 4(AE + BF) = 4\left(R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4R\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{8R}{\sin\alpha}.$$

Відповідь: $\frac{8R}{\sin\alpha}$.

Задача 5. Довести, що коли в чотирикутнику діагоналі лежать на бісектрисах його кутів, то такий чотирикутник є ромбом.

Розв'язання: нехай *ABCD* – чотирикутник, який задовольняє умову задачі (рис. 197), *O* – точка перетину його діагоналей. Для кутів чотирикутника введемо позначення:

$\angle BAD = 2x$,
$\angle ABC = 2y$,
$\angle BCD = 2u$,
$\angle CDA = 2v$,

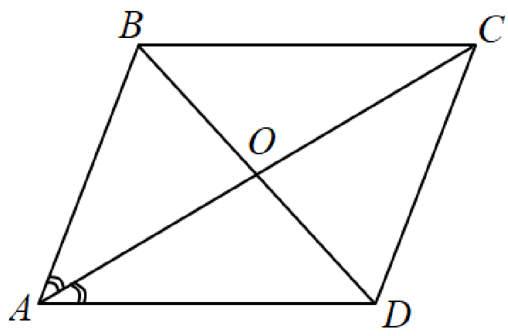


Рис. 197

Враховуючи, що кожний з цих кутів діагоналлю чотирикутника ділиться навпіл, і розглядаючи трикутники *ABD*, *ABC*, *ACD*, *BCD*, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y + v = \pi; \\ 2y + x + u = \pi; \\ x + u + 2v = \pi; \\ y + 2u + v = \pi. \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, отримуємо $x + y + u + v = \pi$. Віднімаючи рівняння з першого і другого рівнянь системи, отримуємо $x - u = 0$, $y - v = 0$. З цього можна зробити висновок, що $\angle BAC = \angle ACD$ і $\angle ABD = \angle BDC$. Це значить, що трикутники *ABC*, *ABD*, *ADC*, *CDB* – рівнобедрені, а *AB* = *AD* = *DC* = *CB*, що й потрібно було перевірити.

Вправи

Задача 1. Знайти периметр прямокутника, якщо діагональ прямокутника дорівнює d і ділить кут прямокутника у відношенні *m* : *n* (рис. 198).

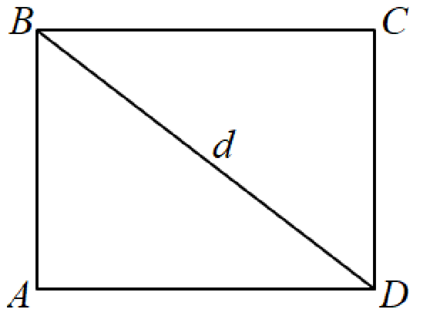


Рис. 198

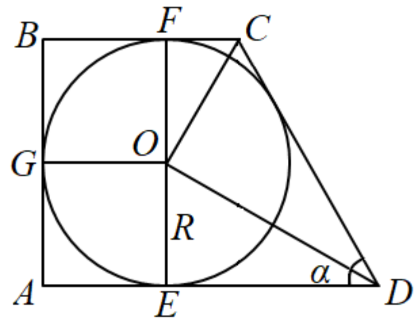


Рис. 199

Задача 2. Навколо круга описана прямокутна трапеція з гострим кутом α. Знайти висоту трапеції, якщо її периметр дорівнює p (рис. 199).

Задача 3. Знайти косинус гострого кута ромба, якщо пряма, проведена через його вершину, ділить гострий кут ромба у відношенні 1 : 3, а протилежну сторону – у відношенні 3 : 5 (рис. 200).

Задача 4. Знайти синус кута біля вершини рівнобедреного трикутника, знаючи, що периметр будь-якого вписаного в нього прямокутника, дві вершини якого лежать на основі, має постійну величину (рис. 201).

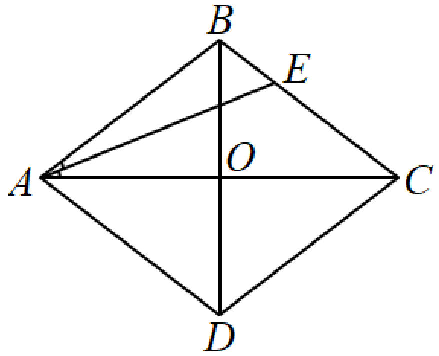


Рис. 200

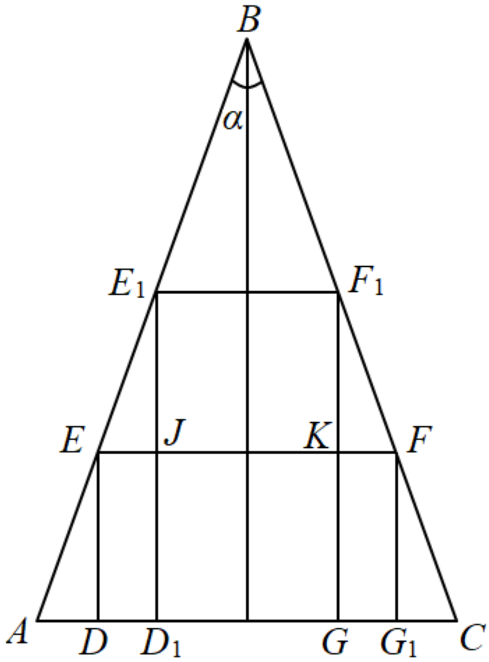


Рис. 201

Задача 5. Знайти відношення суми квадратів усіх медіан трикутника до суми квадратів усіх його сторін (рис. 202).

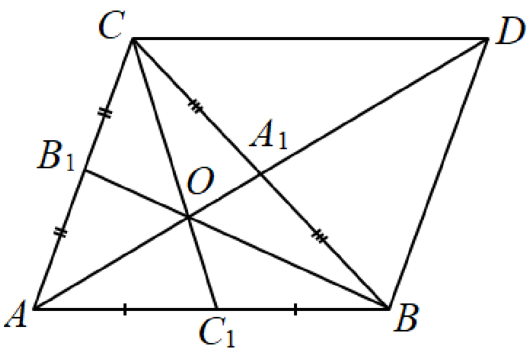


Рис. 202

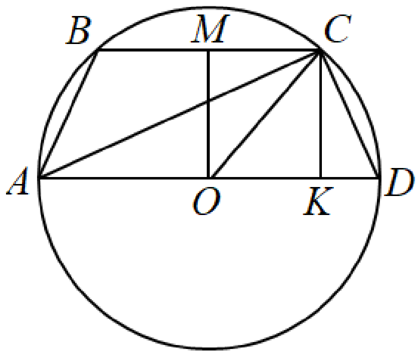


Рис. 203

Задача 6. Знайти діагональ і бічну сторону рівнобедреної трапеції з основами 20 і 12 см, якщо відомо, що центр описаного кола лежить на більшій основі трапеції (рис. 203).

Задача 7. Навколо кола з діаметром 15 см описана рівнобедрена трапеція з бічною стороною, яка дорівнює 17 см. Знайти основу трапеції (рис. 204).

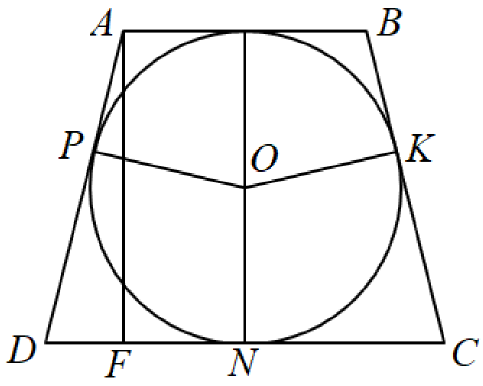


Рис. 204

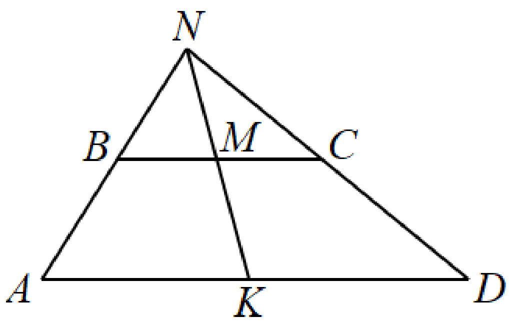


Рис. 205

Задача 8. В трапеції *ABCD* сума кутів біля основи *AD* дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Довести, що відрізок, який сполучає середини основ, дорівнює піврізниці основ (рис. 205).

Задача 9. Побудувати паралелограм за основою, висотою та діагоналлю (рис. 206).

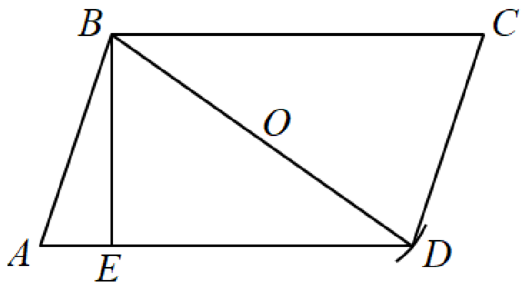


Рис. 206

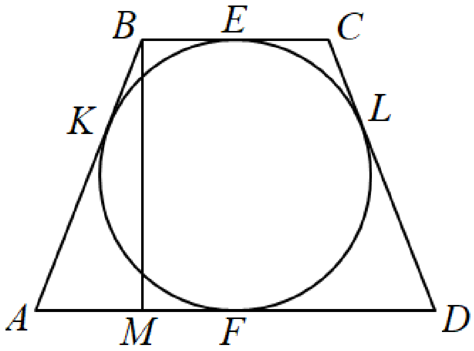


Рис. 207

Задача 10. Довести, що в описаній рівнобедреній трапеції діаметр кола є середнім пропорційним між її основами (рис. 207).

Задача 11. В паралелограмі *ABCD* точка *M* – середина *CB*, *N* – середина *CD*. Довести, що прямі *AM* і *AN* ділять діагональ *BD* на три рівні частини (рис. 208).

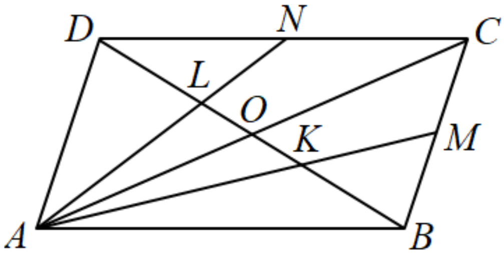


Рис. 208

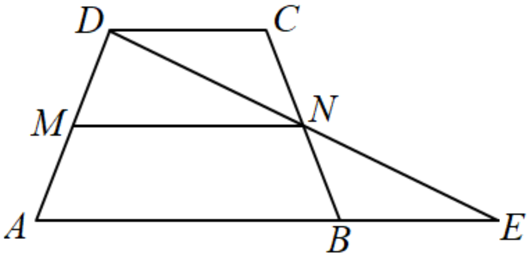


Рис. 209

Задача 12. Довести, що коли відрізок, який з'єднує середини двох протилежних сторін чотирикутника, дорівнює півсумі двох інших сторін, то цей чотирикутник – трапеція (рис. 209).

ТЕМА 4. БАГАТОКУТНИКИ

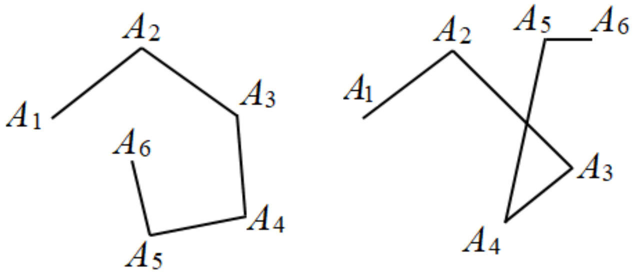
4.1. Ламана

Ламаною $A_1A_2A_3 \dots A_n$ називається фігура, яка складається з точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ і відрізків, які їх сполучають A_1A_2, A_2A_3, … , $A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються *вершинами*, а відрізки A_1A_2, A_2A_3, … , $A_{n-1}A_n$ – *ланками* ламаної. Ламана називається *простою*, якщо вона не має самоперетинів. На рис. 210, *а* показана проста ламана. Ламана на рис. 210, *б* має самоперетини.

Ламана називається *замкненою*, якщо її кінці співпадають. На рис. 211 зображені замкнені ламані.

Довжиною ламаної називається сума довжин її ланок.

***Теорема* 36.** Довжина ламаної не менша довжини відрізка, який з'єднує її кінці.



а) *б*)

Рис. 210

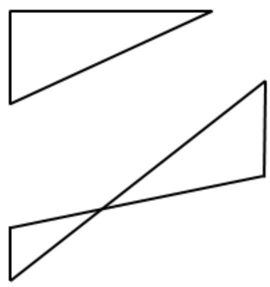


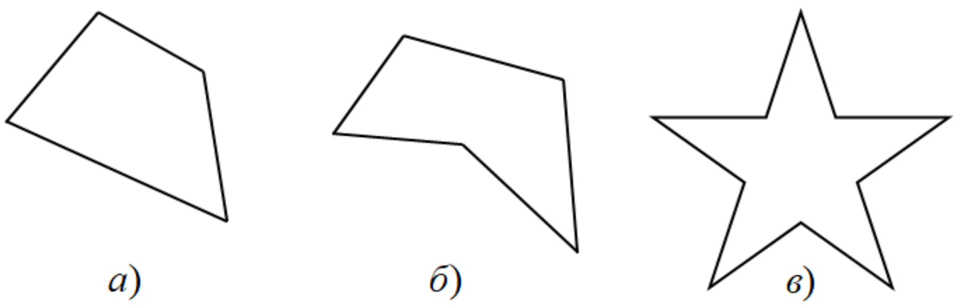
Рис. 211

4.2. Опуклі багатокутники

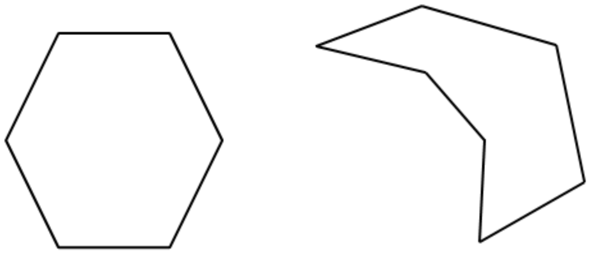
Проста замкнена ламана називається *багатокутником*, якщо її сусідні ланки не лежать на одній прямій.

На рис. 212 зображені різні багатокутники.

Вершини ламаної називаються *вершинами* багатокутника, а ланки – *сторонами* багатокутника. Відрізки, які сполучають несусідні вершини багатокутника, називаються *діагоналями*. Багатокутник з *n* вершинами, а, значить, і з *n* сторонами називається *n-кутником*.



а) *б*) *в*)

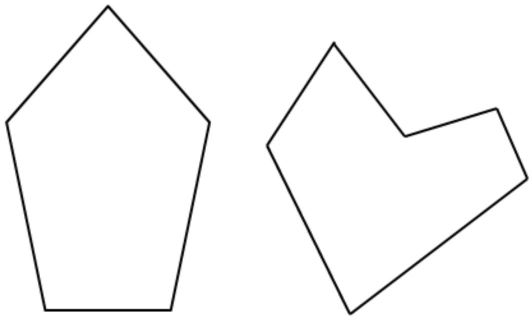


г) *д)*

Рис. 212

Плоским багатокутником або *багатокутною областю* називається кінцева частина площини, обмежена багатокутником. На рис. 213 зображені плоскі багатокутники або багатокутні області.

Багатокутник називається *опуклим*, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону. При цьому сама пряма вважається належною півплощині. На рис. 213, *а* зображений опуклий багатокутник, а на рис. 213, *б* – неопуклий. *Кутом* опуклого багатокутника біля даної вершини називається кут, утворений його сторонами, які сходяться в цій вершині.



а) *б)*

Рис. 213

***Теорема* 37.** Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$.

Зовнішнім кутом опуклого багатокутника біля даної вершини називається кут, суміжний з внутрішнім кутом багатокутника біля цієї вершини. На рис. 214 $\angle CDA$ – внутрішній кут опуклого багатокутника *ABCD*, а $\angle CDM$ – зовнішній.

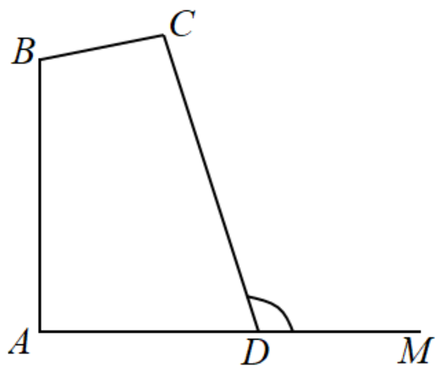


Рис. 214

4.3. Правильні багатокутники

Опуклий багатокутник називається правильним, якщо в нього всі сторони рівні й всі кути рівні. На рис. 215 зображені правильні багатокутники: трикутник, чотирикутник (квадрат), п’ятикутник і шестикутник.

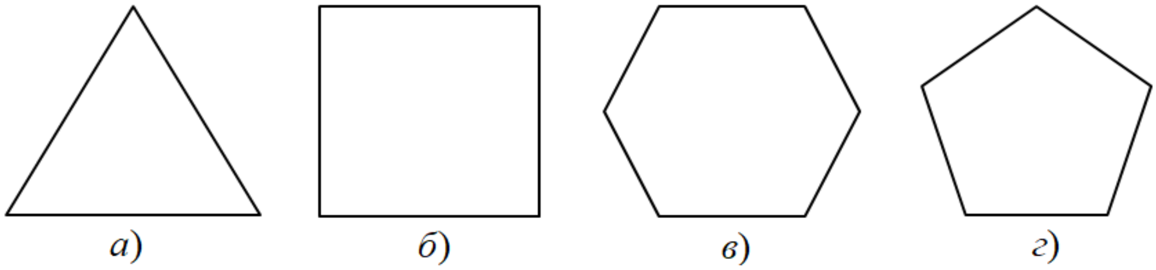


Рис. 215

Багатокутник називається *вписаним в коло*, якщо всі його вершини лежать на деякому колі. Багатокутник називається *описаним навколо кола*, якщо всі його сторони дотикаються якогось кола.

На рис. 216 багатокутник $ABCDE$ вписаний в коло, а багатокутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ описаний навколо кола.

***Теорема* 38.** Правильний опуклий багатокутник є вписаним в коло і описаним навколо кола.

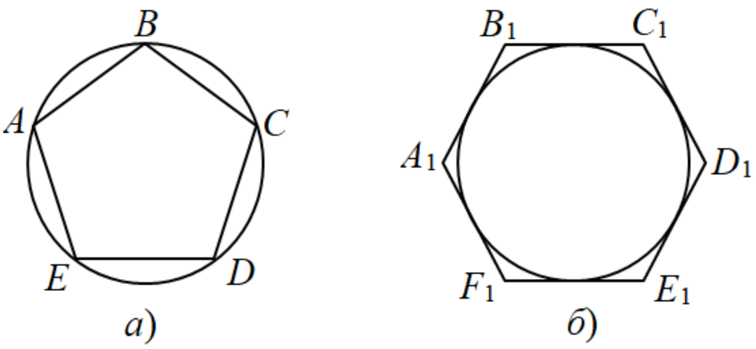


Рис. 216

Радіус R кола, описаного навколо правильного n-кутника зі стороною a, знаходиться за формулою:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}.$$

Радіус кола, вписаного в правильний n-кутник зі стороною a, знаходиться за формулою:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$

Для правильного рівностороннього трикутника (n = 3)

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Для правильного чотирикутника (квадрата) (n = 4)

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad r = \frac{a}{2}.$$

Для правильного шестикутника (n = 6)

$$R = a, \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

4.4. Довжина кола

Наглядно можна показати, що довжина кола дуже мало відрізняється від периметра вписаного в нього опуклого багатокутника з достатньо малими сторонами. Має місце така властивість кола.

***Теорема* 39.** Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто однакове для будь-яких двох кіл.

Відношення довжини кола до діаметра прийнято позначати грецькою буквою π (читається «пі»): $\frac{C}{2R} = \pi$, де C – довжина кола, R – його радіус. Число π ірраціональне, $\pi \approx 3{,}1416$.

Таким чином, довжина кола обчислюється за формулою:

$$C = 2\pi R.$$

На рис. 217 зображена дуга AB кола з центром O.

Довжина дуги кола, яка відповідає центральному куту в $n°$, знаходиться за формулою:

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n.$$

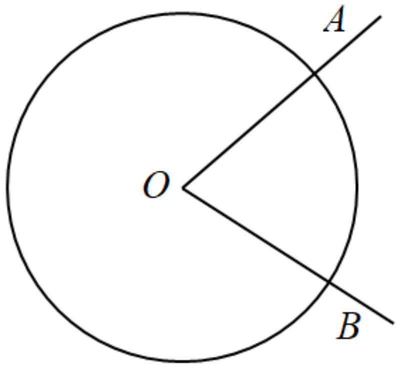


Рис. 217

Радіанною мірою кута називається відношення довжини відповідної дуги до радіуса кола. З формули довжини дуги кола випливає, що

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi R}{180} \cdot n,$$

тобто радіанна міра кута отримується з градусної множенням на $\frac{\pi}{180}$; зокрема, радіанна міра кута 180° дорівнює π, радіанна міра кута 90° дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Одиницею радіанної міри кутів є *радіан*. Кут в один радіан – це центральний кут, у якого довжина дуги дорівнює радіусу. Градусна міра кута в один радіан дорівнює $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

Приклади розв'язування задач.

Задача 1. В сектор радіусом R вписане коло радіусом r. Знайти периметр сектора.

Розв'язання: позначимо через O вершину сектора, а через O_1 центр вписаного в нього кола (рис. 218), $\angle AOO_1$ позначимо через α. Знайдемо α. З трикутника AOO_1 маємо

$$\sin\alpha = \frac{AO_1}{OO_1} = \frac{r}{R-r}.$$

Значить,

$$\alpha = \arcsin\frac{r}{R-r}.$$

Знайдемо тепер довжину дуги сектора і його периметр. Довжина дуги дорівнює $2R\arcsin\frac{r}{R-r}$, периметр сектора дорівнює $2R + 2R\arcsin\frac{r}{R-r}$.

Відповідь: $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$.

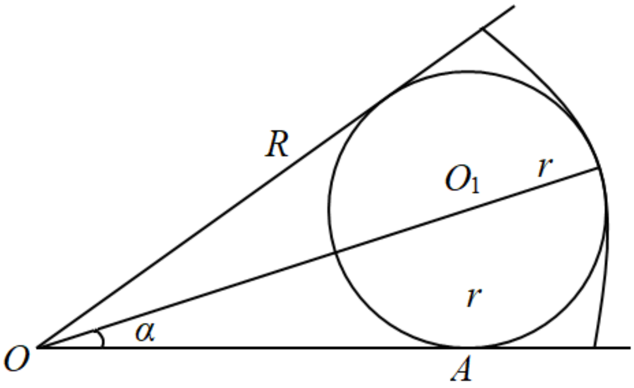


Рис. 218

Задача 2. Довести, що опуклий чотирикутник з різними кутами повинен мати хоча б один тупий кут.

Розв'язання: допустимо, що опуклий чотирикутник з нерівними кутами не має тупих кутів, тоді всі зовнішні кути його тупі й сума їх більша 360°, що суперечить теоремі про суму кутів опуклого багатокутника, а це доводить наше припущення.

Задача 3. Зовнішній кут правильного багатокутника дорівнює 180°. Знайти число сторін багатокутника.

Розв'язання: оскільки внутрішній кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$, то його зовнішній кут дорівнює $180° - \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{360°}{n}$. За умовою $\frac{360°}{n} = 18$, отже n = 20.

Задача 4. В круг радіусом R вписаний правильний n-кутник зі стороною a_n. Знайти довжину сторони a_{2n} правильного $2n$-кутника, вписаного в таке саме коло, тобто знайти формулу подвоєння.

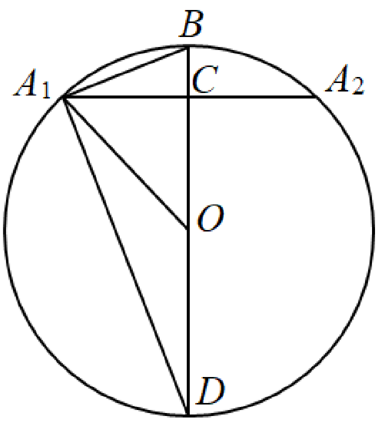


Рис. 219

Розв'язання: нехай A_1A_2 – сторона правильного n-кутника, вписаного в коло, центр якого O, а радіус R, B – середина дуги A_1A_2, тоді $A_1B = a_{2n}$ – сторона правильного $2n$-кутника, BD – діаметр кола (рис. 219). Позначимо C – точку перетину прямих A_1A_2 і BD, $\angle BA_1D = 90°$, тому $A_1B^2 = BD \cdot BC$ або

$$a_{2n}^2 = 2R\cdot\left(R - \left(R^2 - \frac{1}{4}a_n^2\right)\right).$$

Ця формула називається формулою подвоєння. Наприклад, враховуючи, що $a_4 = R\sqrt{2}$, отримаємо $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Задача 5. Довести, що в опуклому чотирикутнику кут між бісектрисами двох прилеглих кутів дорівнює півсумі двох інших кутів.

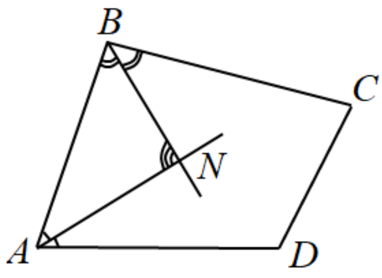


Рис. 220

Розв'язання: нехай бісектриси кутів A і B, прилеглих до сторони AB, перетинаються в точці N (рис. 220). Тоді, оскільки для будь-якого чотирикутника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то з будь-якого ΔANB знаходимо

$$\angle ANB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} =$$
$$= 180° - \frac{360° - (\angle C + \angle D)}{2} = \frac{\angle C + \angle D}{2},$$

що й потрібно було довести.

Вправи

Задача 1. Довести, що опуклий чотирикутник з різними кутами має хоч би один тупий кут.

Задача 2. Дано два кола з радіусами R_1 і R_2 і відстанню між центрами $d > R_1 + R_2$. Чому дорівнюють найбільші й найменші відстані між точками X і Y цих кіл (рис. 221)?

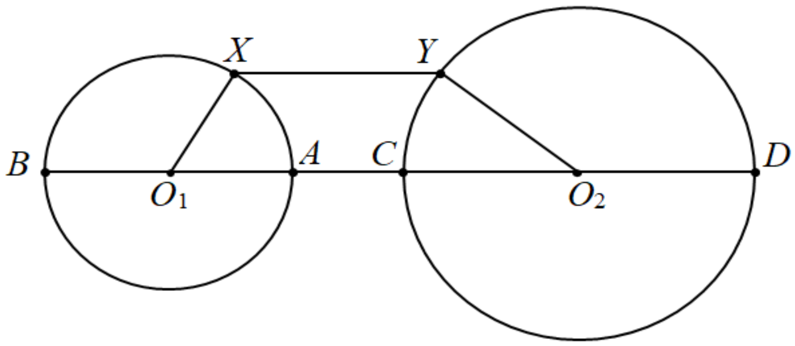


Рис. 221

Задача 3. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, взятих по одному біля кожної вершини?

Задача 4. Правильний п'ятикутник *ABCDE* зі стороною a вписаний в коло S. Прямі, які проходять через його вершини перпендикулярно до сторін, утворюють правильний п'ятикутник зі стороною b (рис. 222). Сторона правильного п'ятикутника, описаного навколо кола S, дорівнює c. Доведіть, що $a^2 + b^2 = c^2$ (рис. 223).

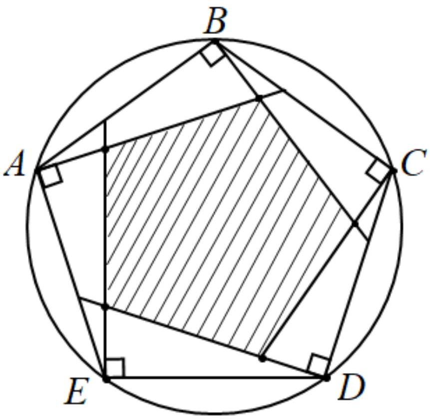


Рис. 222

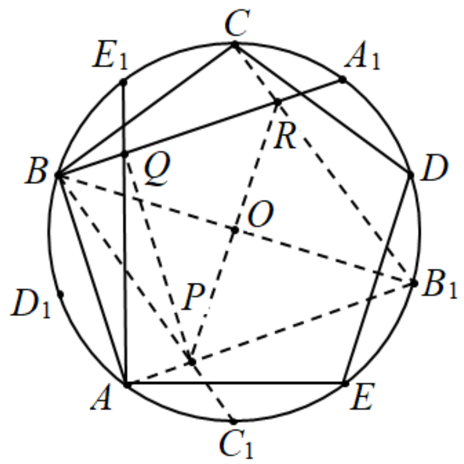


Рис. 223

Задача 5. Яке найбільше число гострих кутів може мати опуклий багатокутник.

ТЕМА 5. РОЗВ’ЯЗАННЯ ТРИКУТНИКІВ

5.1. Косинус, синус і тангенс

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи. Косинус кута *α* позначається так: $\cos\alpha$. На рис. 224

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

***Теорема* 40.** Косинус кута залежить тільки від градусної міри кута.

Синусом гострого кута α (позначається $\sin\alpha$) називається відношення протилежного катета *BC* до гіпотенузи *AB* (рис. 224):

$$\cos\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Тангенсом гострого кута α (позначається tg *α*) називається відношення протилежного катета *BC* до прилеглого *AC* (рис. 224):

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

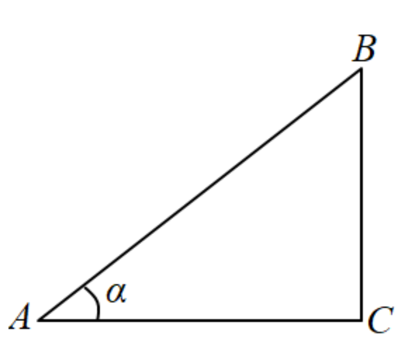


Рис. 224

Синус і тангенс кута, так як і косинус, залежать тільки від величини кута.

Для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$ складені спеціальні таблиці. Ці таблиці дозволяють за даним кутом *α* знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$ або за значенням $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$ знайти відповідний кут.

Для синуса, косинуса і тангенса кутів мають місце такі тотожності:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$
$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$
$$1 + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2\,\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значення цих тотожностей полягає в тому, що вони дозволяють, знаючи одну з величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ або $\mathrm{tg}\,\alpha$, знайти дві інші.

***Теорема* 41.** Для будь-якого гострого кута α справедливі рівності:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

Значення синуса, косинуса і тангенса деяких кутів наведені в таблиці

Функція	**Аргумент**		
	30°	**45°**	**60°**
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

***Теорема* 42.** При зростанні гострого кута $\sin\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$ зростають, а $\cos\alpha$ зменшується.

Значення синуса, косинуса і тангенса можна визначити не тільки для гострих кутів, але й для будь-якого кута від 0° до 180°.

***Теорема* 43.** Для будь-якого кута α, $0° < \alpha < 180°$, виконуються рівності:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha \text{ для } \alpha \neq 90°.$$

Співвідношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику

З визначень $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ отримуємо такі правила.

1. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку гіпотенузи та $\sin\alpha$.
2. Катет, прилеглий до кута α, дорівнює добутку гіпотенузи та $\cos\alpha$.
3. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку другого катета й $\mathrm{tg}\,\alpha$.

Ці правила дозволяють, знаючи одну з сторін прямокутного трикутника й гострий кут, знаходити дві інші сторони, а знаючи дві сторони, знаходити гострі кути (за домогою спеціальних таблиць).

4. Катетом прямокутного трикутника є середнє пропорційне між гіпотенузою та його проекцією на гіпотенузу.
5. Висотою прямокутного трикутника, опущеною з вершини прямого кута, є середнє пропорційне між проекціями катетів на гіпотенузу.

Назва *середнє пропорційне* пояснюється тим, що число $x = \sqrt{ab}$ є середнім членом пропорції $a : x = x : b$.

В прямокутному трикутнику ABC (рис. 225) $\angle C$ прямий, AD і BD – проекції катетів AC і BC на гіпотенузу. Згідно сказаному вище справедливі рівності:

$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$;

$BC = \sqrt{AB \cdot BD}$;

$CD = \sqrt{AD \cdot BD}$.

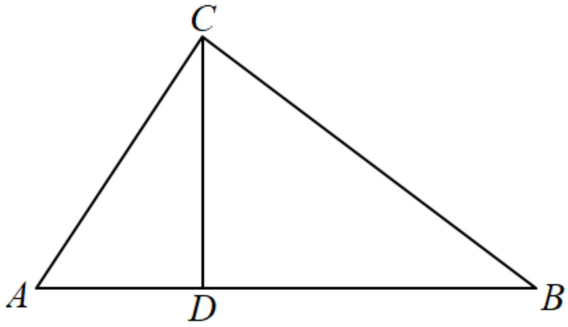


Рис. 225

5.2. Теорема косинусів. Теорема синусів

***Теорема* 44.** Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними (*теорема косинусів*).

В ΔABC (рис. 226) за теоремою косинусів

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha.$$

З теореми косинусів випливає декілька тверджень.

1. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «±» подвоєний добуток однієї з них на проекцію іншої. Знак «+» треба брати, коли протилежний кут тупий, а знак «-«, коли кут гострий.

Для випадку, зображеного на рис. 225, можна записати, що

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD.$$

2. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Для паралелограма, зображеного на рис. 227, можна записати рівність

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

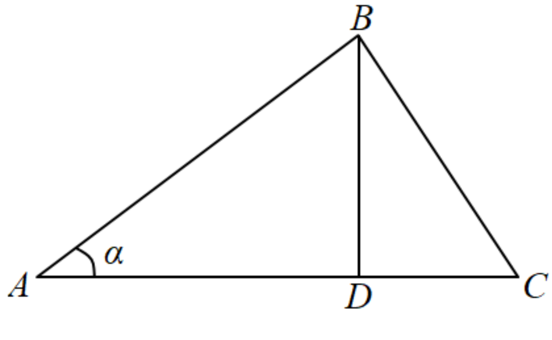


Рис. 226

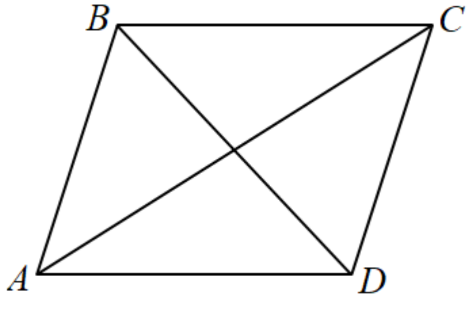


Рис. 227

***Теорема* 45.** Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів (*теорема синусів*).

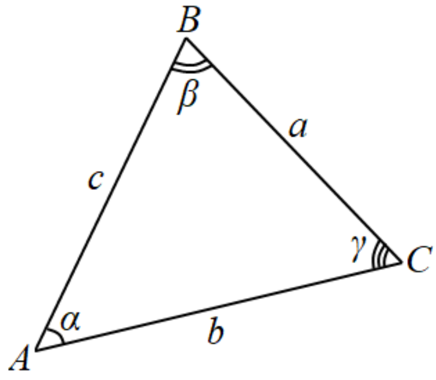


Рис. 228

В ΔABC на рис. 228 за теоремою синусів ми маємо

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

З теореми синусів випливає, що в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, проти більшої сторони лежить більший кут.

Якщо в трикутнику *ABC* (рис. 227) $a < b$, то $\alpha < \beta$;

якщо $\beta > \gamma$, то $b > c$.

Розв'язання трикутників

Розв'язання трикутників полягає в знахоженні невідомих сторін і кутів трикутника за деякими відомими його кутами і сторонами. Будемо позначати сторони трикутника через a, b, c, а протилежні їм кути відповідно через α, β, γ.

Перелічимо основні задачі на розв'язання трикутників.

Задача 1. Дана сторона a й два кути трикутника, наприклад β і γ. Знайти третій кут й інші дві сторони.

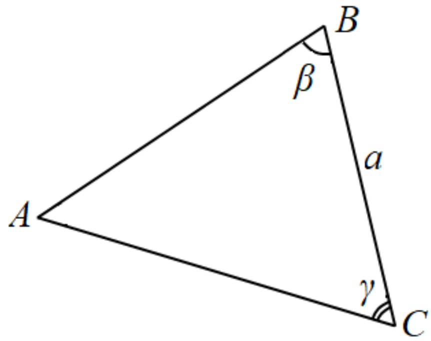


Рис. 229

На рис. 229 у трикутнику *ABC* дано: $CB = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Треба знайти b, c, α.

Розв'язання: знайдемо за теоремою 21, b і c – за теоремою 45. Задача має розв'язок, якщо $\beta + \gamma < 180°$. Одиничність розв'язку випливає з теореми 16.

Задача 2. Дано дві сторони, наприклад a і b, і кут γ між ними. Знайти інші два кути і третю сторону.

На рис. 230, *а* у трикутнику *ABC* дано: $BC = a$, $AC = b$ і кут $\angle C = \gamma$. Треба знайти c, α і β.

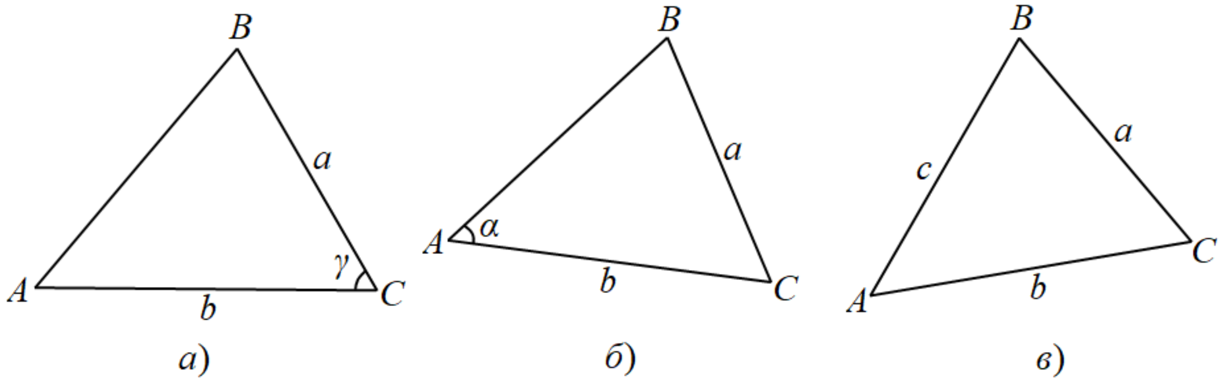


Рис. 230

Розв'язання: сторону c знайдемо за теоремою 44, α і β – за теоремою 44 або за теоремою 45. Задача завжди має розв'язок. Одиничність розв'язку випливає з теореми 15.

Задача 3. Дано дві сторони, наприклад, a і b, і кут, протилежний одній з них, наприклад, α. Знайти інші два кути і третю сторону.

На рис. 230, *б* у трикутнику ABC дано: $BC = a$, $AC = b$ і $\angle A = \alpha$. Треба знайти c, β, γ.

Розв'язання: кут β знайдемо за теоремою 45, γ – за теоремою 21, c – за теоремою 45. Задача може не мати розв'язків, мати один розв'язок, два розв'язки.

Задача 4. Дано три сторони трикутника. Знайти його кути.

На рис. 230, *в* у трикутнику ABC дано: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Треба знайти α, β і γ.

Розв'язання: спочатку знайдемо один з кутів α, β або γ за теоремою 44. Потім будемо чинити, як у задачі 2. Задача має розв'язок, якщо більша сторона менша суми двох інших. Одиничність розв'язку випливає з теореми 17.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. В рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α. В трикутник вписане коло радіусом r. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання: позначимо через BD висоту основи заданого трикутника ABC, а через O – центр вписаного в нього круга (рис. 231). За умовою $\angle BAD = \alpha$, $DO = r$, $\angle DAO = \frac{\alpha}{2}$. Очевидно, що $\angle ABC = \pi - 2\alpha$. З трикутника AOD маємо

$$AD = OD\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

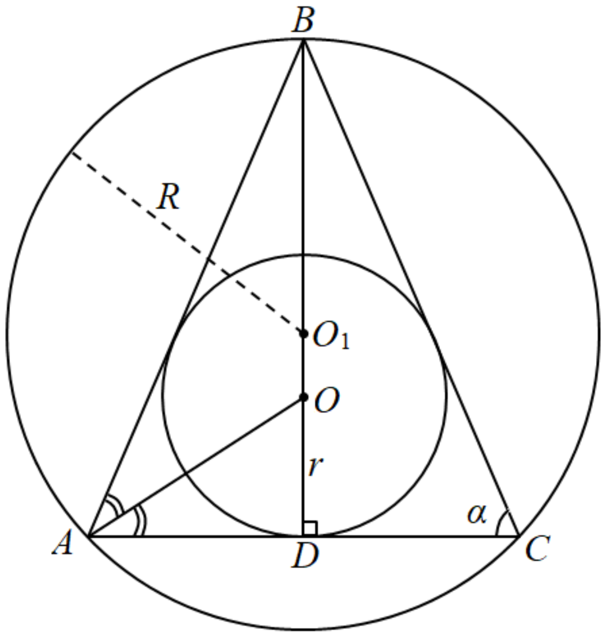


Рис. 231

Далі, за теоремою синусів маємо

$$2R = \frac{AC}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{2r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}.$$

Відповідь: $\frac{r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$.

Задача 2. Основи рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють a і b ($a > b$), кут при більшій основі дорівнює α. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Розв'язання: нехай $ABCD$ – задана трапеція (рис. 232), BE – висота. За умовою $\angle BAD = \alpha$. Коло, описане навколо трапеції, співпадає з колом, описаним навколо трикутника ABD. Тому шуканий радіус R можна знайти за теоремою синусів

$$R = \frac{BD}{2\sin\alpha}.$$

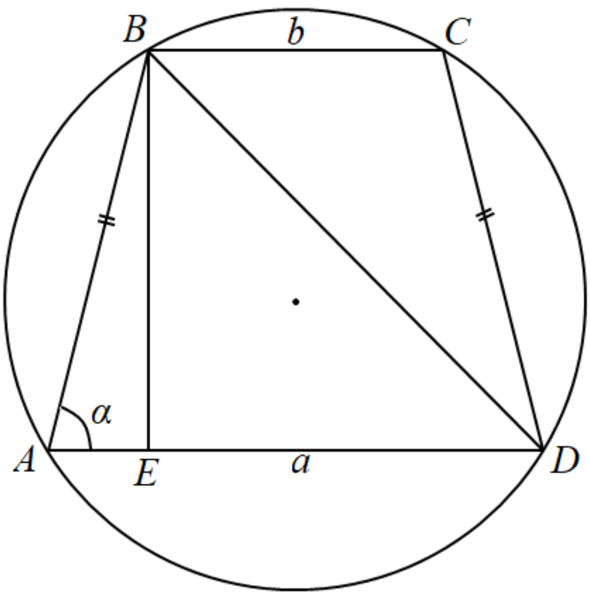


Рис. 232

Визначимо BD. З трикутника ABE маємо $BE = AE\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Так як $AE = \frac{a-b}{2}$, то $BE = \frac{a-b}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$. Тепер з прямокутного трикутника BDE знайдемо BD. Враховуючи, що $DE = \frac{a+b}{2}$, отримуємо

$$BD = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4}\mathrm{tg}^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + (a^2 + b^2)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 2ab(1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha) + 2ab\,\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha}.$$

Підставимо цей вираз для BD у вираз для R:

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\alpha}}{4\cos\alpha\sin\alpha}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$.

Задача 3. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює h і утворює з бічною стороною кут α $\left(\alpha \leq \frac{\pi}{6}\right)$. Знайти відстань між центрами вписаного в трикутник і описаного навколо нього кіл.

Розв'язання: позначимо через O і O_1 центри кіл, описаного й вписаного в заданий трикутник ABC (рис. 233), а через D – середину основи AC. За умовою $\angle CBD = \alpha$. Знайдемо радіуси r і R вписаного й описаного кіл. За теоремою синусів $2R = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$. Визначимо AC. З трикутника ABD маємо $AD = h\operatorname{tg}\alpha$.

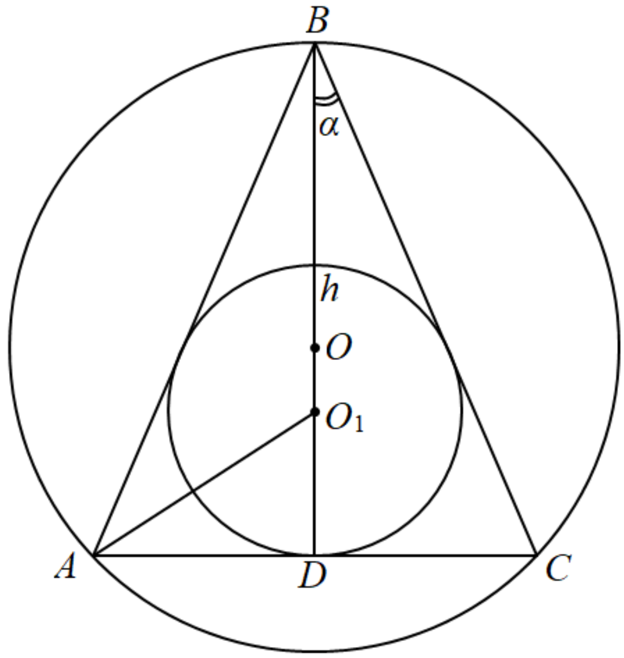


Рис. 233

Значить, $AC = 2h\operatorname{tg}\alpha$;

$$2R = \frac{2h\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2h\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha};$$

$$R = \frac{h}{2\cos^2\alpha}.$$

Враховуючи, що $\angle DAO_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, з трикутника ADO_1 маємо

$$DO_1 = r = AD\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Знайдемо шукану відстань OO_1. При $\alpha = \frac{\pi}{6}$ точки O і O_1 співпадають і $R = \frac{2}{3}h$, $r = \frac{1}{3}h$. При $\alpha < \frac{\pi}{6} R < \frac{1}{3}h$, а $r < \frac{1}{3}h$. Значить, при $\alpha < \frac{\pi}{6}$ точка O лежить вище точки O_1.

$$OO_1 = h - R - r = h - h\left[\frac{1}{2\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}\right] =$$

$$= h\left[1 - \frac{1}{2\cos^2\alpha}\left(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= h\frac{2\cos^2\alpha - 1 - \sin 2\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\alpha} = h\frac{\cos 2\alpha - \dfrac{\sin 2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}}{2\cos^2\alpha} =$$

$$= h\frac{\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin 2\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}h.$$

Відповідь: $\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}h.$

Задача 4. Знайти синус кута при вершині рівнобедреного трикутника, якщо відомо, що медіана, проведена до бічної сторони, утворює з основою кут, синус якого дорівнює $\frac{3}{5}$.

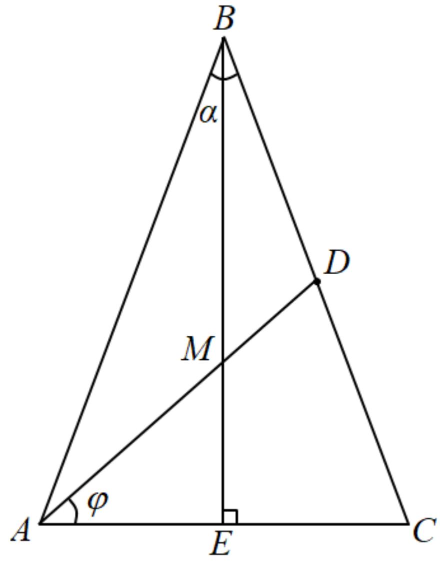


Рис. 234

Розв'язання: нехай *ABC* – заданий рівнобедрений трикутник (рис. 234), *AB* = *BC*, *AD* – медіана. Допустимо, $\angle CAD = \varphi$, $\angle ABC = \alpha$. Складемо рівняння, з якого знайдемо $\sin\alpha$. Обчислимо кути *BAD* і *ADB*. Так як

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \text{ то } \angle BAD = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi.$$

Далі отримуємо

$$\angle ADB = \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \varphi.$$

Застосуємо тепер до трикутника *ABD* теорему синусів. Отримаємо

$$\frac{AB}{BD} = 2 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \varphi\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)},$$

$$2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right),$$

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi,$$

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi = 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\varphi = \frac{4}{9},$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cdot\frac{4}{9} : \left(1 + \frac{16}{81}\right) = \frac{72}{97}.$$

Відповідь: $\frac{72}{97}$.

Задача 5. Знайти синус кута ромба, якщо з середини його сторони протилежну сторону видно під кутом, що дорівнює α.

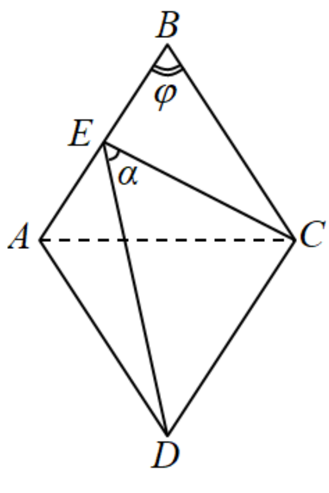


Рис. 235

Розв'язання: Нехай *a* – сторона ромба (рис. 235). Позначимо $\angle ABC$ через φ. Нехай *CE* = *x*, *DE* = *y*. За теоремою косинусів маємо

$$x^2 = BE^2 + BC^2 - 2BC\cdot BE\cos\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{4} + a^2 - 2a\frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{5}{4}a^2 - a^2\cos\varphi,$$
$$y^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD\cdot AE\cos(\pi - \varphi) =$$

$$= \frac{a^2}{4} + a^2 + 2a\frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{5}{4}a^2 + a^2\cos\varphi.$$

Трикутники ABC і CDE рівновеликі. Випишемо вираз для площ цих трикутників і прирівняємо їх:

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\varphi = \frac{1}{2}CE \cdot DE\sin\alpha,$$

або з урахуванням виразів для x і y:

$$a^2\sin\varphi = xy\sin\alpha = a^2\sqrt{\frac{25}{16} - \cos^2\varphi} \cdot \sin\alpha.$$

Звідси маємо

$$\frac{4\sin\varphi}{\sqrt{25 - 16\cos^2\varphi}} = \sin\alpha, \qquad \frac{16\sin^2\varphi}{9 + 16\sin^2\varphi} = \sin^2\alpha.$$

Останнє рівняння неважко перетворити:

$$16\sin^2\varphi = 9\sin^2\alpha + 16\sin^2\varphi\sin^2\alpha,$$
$$16\sin^2\varphi - 16\sin^2\varphi\sin^2\alpha = 9\sin^2\alpha,$$
$$16\sin^2\varphi\cos^2\alpha = 9\sin^2\alpha, \qquad 4\sin\varphi\cos\alpha = 3\sin\alpha.$$
$$\sin\varphi = \frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$**.**

Вправи

Задача 1. В трикутнику дані сторона a, протилежний кут α і висота h, проведена до даної сторони. Знайти суму двох інших сторін (рис. 236).

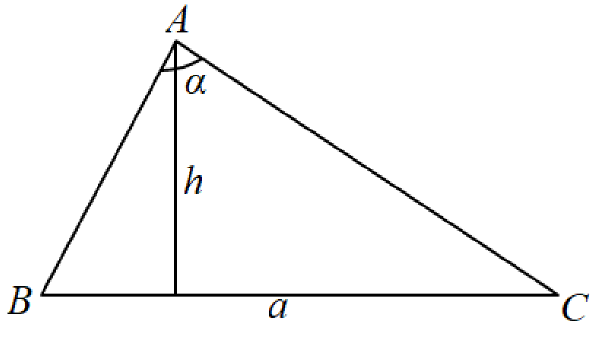


Рис. 236

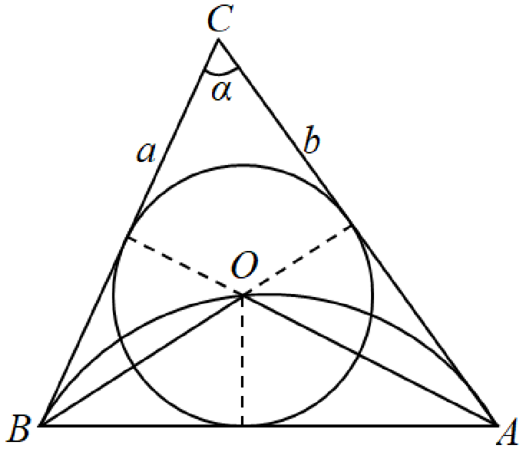


Рис. 237

Задача 2. Дано дві сторони трикутника a і b і кут α між ними. Знайти радіус кола, проведеного через кінці третьої сторони і центр вписаного в цей трикутник круга (рис. 237).

Задача 3. Більша основа вписаної в круг трапеції дорівнює діаметру круга, а кут при основі дорівнює а. В якому відношенні точка Е перетину діагоналей трапеції ділить її висоту (рис. 238)?

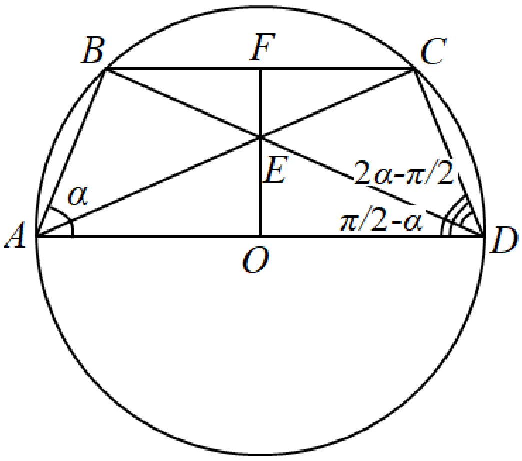


Рис. 238

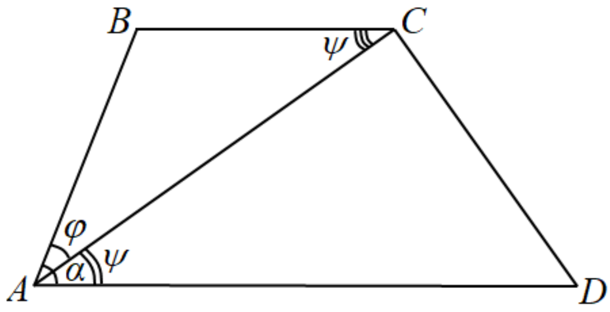


Рис. 239

Задача 4. Кут при вершині A трапеції $ABCD$ дорівнює α. Бічна сторона AB вдвічі більша меншої основи BC. Знайти кут BAC (рис. 239).

Задача 5. Сторони паралелограма відносяться, як $p : q$, а діагоналі – як $m : n$. Знайти кути паралелограма (рис. 240).

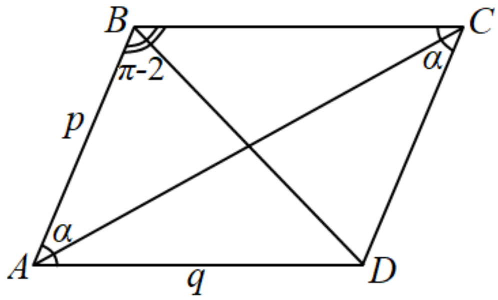


Рис. 240

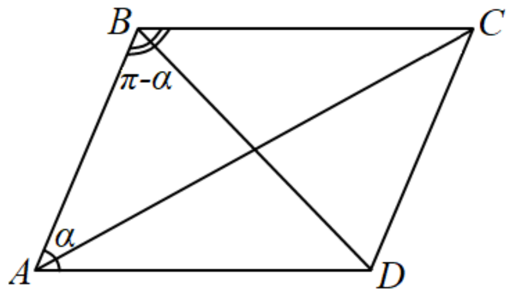


Рис. 241

Задача 6. Довести, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін (рис. 241).

ТЕМА 6. ПЛОЩІ ПЛОСКИХ ФІГУР

6.1. Поняття площі простих фігур

На площині вводиться поняття площі простих фігур.

Фігура називається *простою*, якщо її можна розбити на скінченну кількість плоских трикутників. Під трикутником ми розуміємо трикутну область, тобто скінченну частину площини, обмежену трикутником.

На рис. 242 зображений опуклий багатокутник *ABCDE*, який є простою фігурою, тому що його можна розбити на трикутники EAB, EBC, ECD.

Площа простої фігури – це додатна величина, числове значення якої має такі властивості.

1. Рівні фігури мають рівні площі.
2. Якщо фігура розбивається на частини, що є простими фігурами, то площа цієї фігури дорівнює сумі площ її частин.
3. Площа квадрата із стороною, що дорівнює одиниці вимірювання, дорівнює одиниці.

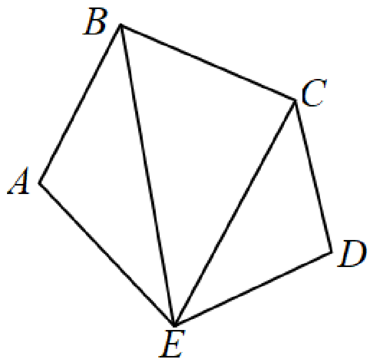


Рис. 242

Площі багатокутників

Площа прямокутника обчислюється за формулою:

$$S = ab,$$

де a і b – сторони прямокутника. На рис. 243 зображений прямокутник $ABCD$, в якому $AB = a$, $BC = b$. Його площа обчислюється за формулою: $S = AB \cdot BC$.

Квадрат – це прямокутник, у якого сторони рівні, а значить, *площа квадрата* зі стороною a дорівнює a^2, тобто

$$S = a^2,$$

де a – його сторона. Площу квадрата можна також обчислити за формулою:

$$S = \frac{d^2}{2}.$$

де d – діагональ квадрата.

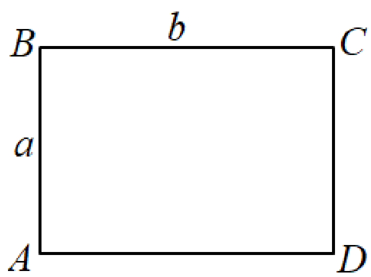


Рис. 243

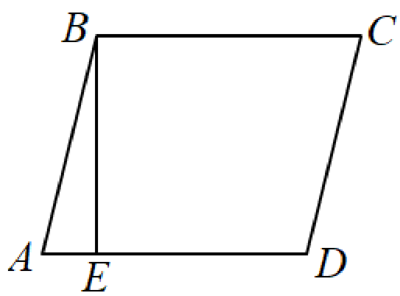


Рис. 244

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, що проведена до цієї сторони, й обчислюється за формулою:

$$S = ah,$$

де a – сторона, h – висота, проведена до цієї сторони. На рис. 244 зображений паралелограм $ABCD$, в якому BE – його висота. Площа паралелограма дорівнює добутку AD на BE:

$$S = AD \cdot BE.$$

Площу паралелограма можна обчислити а формулою:

$$S = ab \sin \alpha,$$

де a і b – сторони, α – кут паралелограма.

Ромб – це окремий випадок паралелограма, отже, його площу можна обчислити так само, як і площу паралелограма. Крім того, є й інші формули *площі ромба*:

$$S = a^2 \sin\alpha,$$

де a – сторона ромба, α – кут ромба;

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2,$$

де d_1 і d_2 – діагоналі ромба.

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони, і обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

На рис. 245, *а* зображений трикутник *ABC*, в якому *BD* – висота, і площа його обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

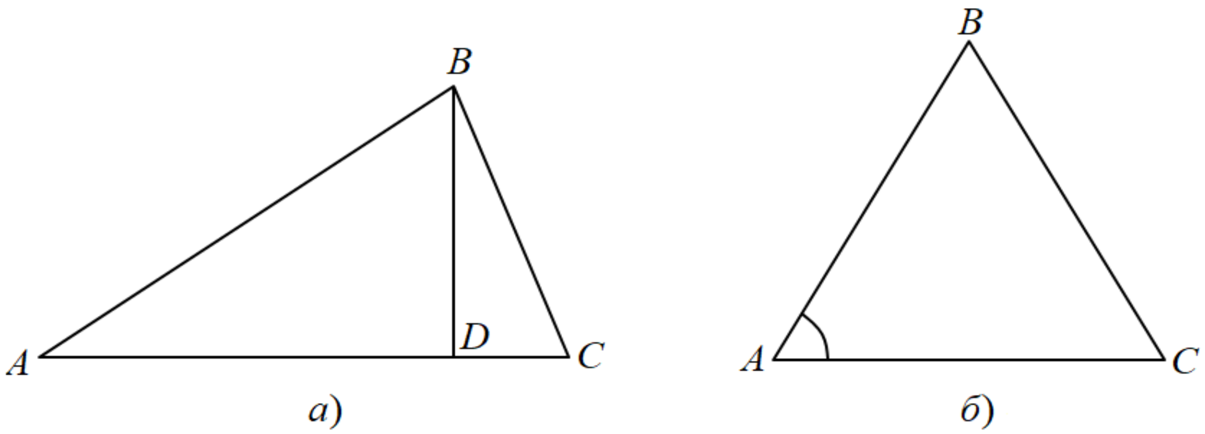


Рис. 245

Щоб обчислити площу трикутника є й інші формули:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

де a і b – сторони ΔABC, а γ – кут між цими сторонами. Цю формулу можна записати інакше:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\angle A \text{ (рис. 245, } б)$$

Наступна формула належить давньогрецькому вченому Герону:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)},$$

де a, b, c – сторони трикутника, p – його півпериметр, тобто

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

де a і b – основи трапеції, h – висота.

На рис. 246 зображена трапеція *ABCD*, в якій AB і CD – її основи, а AE – висота. Площа цієї трапеції обчислюються за формулою:

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot AE.$$

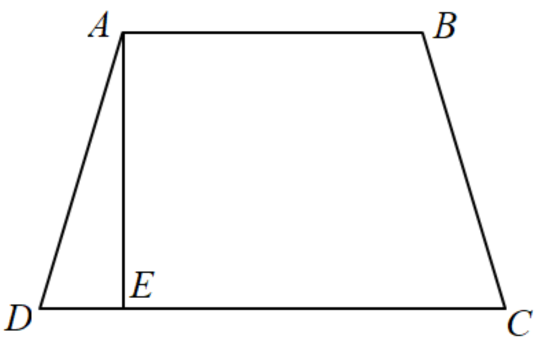


Рис. 246

6.2. Площі подібних фігур

***Теорема* 46.** Площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних розмірів.

Нехай дано два подібні трикутники *ABC* $A_1B_1C_1$ (рис. 247). Якщо коефіцієнт подібності $k > 1$, то лінійні розміри трикутника $A_1B_1C_1$ у k разів більші за відповідні розміри трикутника *ABC*. Зокрема, сторона і висота $\Delta A_1B_1C_1$ у k разів більші за відповідні сторони і висоти ΔABC, тобто $A_1B_1 = kAB,\ B_1C_1 = kBC,\ A_1C_1 = kAC,\ B_1D_1 = kBD.$

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 = \frac{1}{2}kAC \cdot kBD = \frac{1}{2}k^2AC \cdot BD = k^2S_{\Delta ABC}.$$

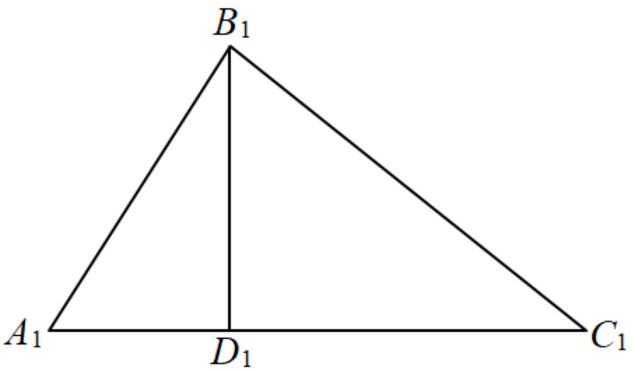


Рис. 247

Площа круга

Формули площі правильного багатокутника, описаного имнколо круга (рис. 248), і правильного багатокутника, вписаного в круг (рис. 249), дозволяють вивести формулу площі круга радіусом *R*.

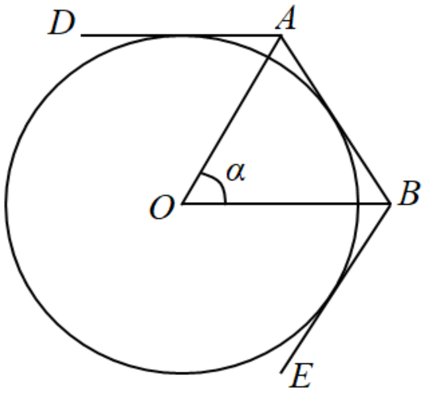


Рис. 248

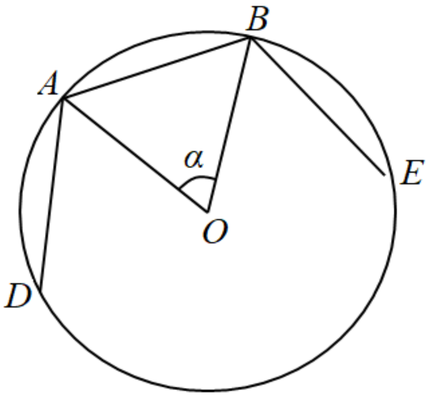


Рис. 249

Площа круга обчислюється за формулою:

$$S = \pi R^2,$$

де R – радіус круга.

Круговим сектором називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута (рис. 250).

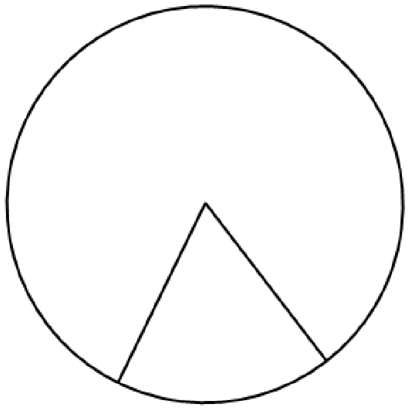


Рис. 250

Площа кругового сектора обчислюється за формулою:

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha,$$

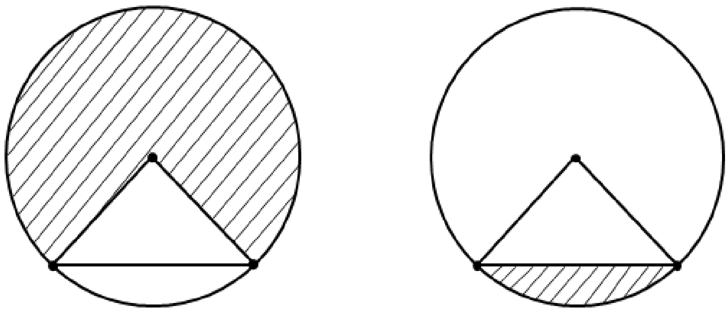
де R – радіус круга, α – градусна міра відповідного центрального кута.

Круговим сегментом називається спільна частина круга і півплощини, межа якої містить хорду цього круга (рис. 251).

Площа *кругового сегмента*, що не дорівнює півкругу, обчислюється за формулою:

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_\Delta,$$

де R – радіус круга, α – градусна міра центрального кута, що містить дугу цього кругового сегмента, а S_Δ – площа трикутника з вершинами в центрі круга і на кінцях радіусів, які обмежують даний сектор. Знак «+» треба брати, коли $\alpha > 180°$ (рис. 251, *а*), а знак «–», коли $\alpha < 180°$ (рис. 251, б).



а) *б*)

Рис. 251

Приклади розв'язування задач.

Задача 1. В прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Менша основа дорівнює a, а більша бічна сторона дорівнює b. Обчислити площу прямокутної трапеції.

Розв'язання: нехай $ABCD$ – дана трапеція (рис. 252), $BC = a$, $CD = b$, $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 60°$, E – проекція C на основу AD. З трикутника CDE маємо:

$$DE = \frac{1}{2}b, \qquad CE = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

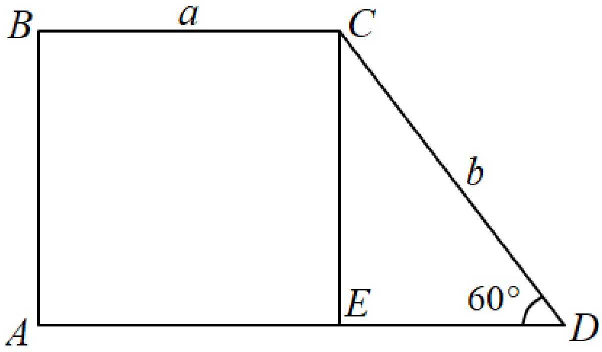


Рис. 252

Значить, основа

$$AD = AE + ED = a + \frac{b}{2},$$

а площа трапеції

$$\frac{BC + AD}{2}CE = \frac{a + \frac{2a+b}{2}}{2} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}.$$

Відповідь: $\frac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}$.

Задача 2. Дано рівнобічну трапецію. Її площа дорівнює S. Висота трапеції в два рази менша її бічної сторони. Визначити радіус вписаного круга.

Розв'язання: нехай $ABCD$ – задана трапеція (рис. 253), E і F проекції вершин B і C на нижню основу. Оскільки в дану трапецію можна вписати коло, сума бічних її сторін дорівнює сумі основ.

Тому її середня лінія дорівнює бічній стороні. Позначимо через H висоту трапеції. За умовою $AB = 2BE = 2H$. Площа трапеції

$$S = \frac{AD + BC}{2}BE = 2H \cdot H.$$

Звідси $H = \sqrt{\frac{S}{2}}$. Значить, радіус вписаного в трапецію круга $\frac{H}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$.

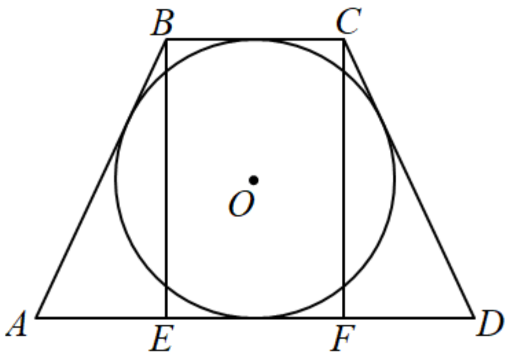


Рис. 253

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$.

Задача 3. Дано ромб. Сума довжин його діагоналей дорівнює m, а його площа дорівнює S. Знайти сторону ромба.

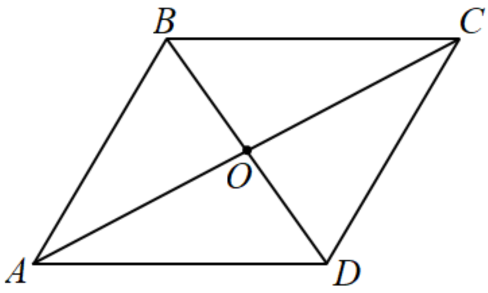


Рис. 254

Розв'язання: позначимо через O центр даного ромба $ABCD$ (рис. 254). Позначимо через x і y півдіагоналі AO і BO. Складемо рівняння, з яких знайдемо

$$\sqrt{x^2+y^2}=AB.$$

Маємо

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{m}{2}; \\ xy=\dfrac{S}{2}. \end{cases}$$

Піднесемо до квадрата перше рівняння і віднімемо від нього подвоєне друге:

$$(x+y)^2-2xy=x^2+y^2=\frac{m^2}{4}-S, \qquad \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{m^2}{4}-S}.$$

Відповідь: $\sqrt{\dfrac{m^2}{4}-S}$.

Задача 4. Знайти площу ромба, якщо його гострий кут дорівнює 30°, а площа вписаного круга дорівнює Q.

Розв'язання: позначимо через A, B, C, D, O вершини цього ромба і його центр, а через E – проекцію B на AD (рис. 255). Знайдемо радіус r круга, вписаного в ромб. Так як $\pi r^2=Q$, то $r=\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$. Оскільки $BE=2r$ і $AB=\dfrac{BE}{\sin 30°}$, то $AB=4\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$. Значить, площа ромба

$$AB\cdot AD\sin 30°=\left(4\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{8Q}{\pi}.$$

Відповідь: $\dfrac{8Q}{\pi}$.

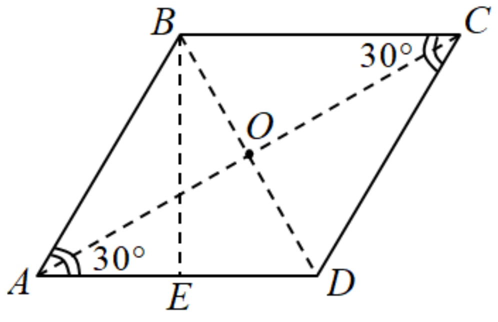


Рис. 255

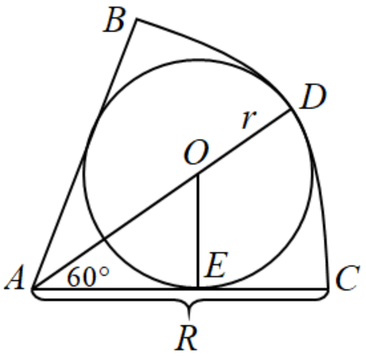


Рис. 256

Задача 5. В круговий сектор, дуга якого містить 60°, вписано круг. Знайти співвідношення площі цього круга до площі сектора.

Розв'язання: нехай *ABDC* – заданий сектор (рис. 256). *D* – середина його дуги, центр якої знаходиться в точці *A*, *O* – центр круга, вписаного в сектор. Позначимо через *R* і *r* радіус дуги сектора і вписаного круга. Виразимо *r* через *R*. Розглянемо трикутник *AOE*, де *OE* радіус, проведений в точку дотику *E*. Так як $\angle OAE = 30°$, то $\frac{OE}{AO} = \frac{r}{R-r} = \frac{1}{2}$, що дає $r = \frac{R}{3}$. Площі сектора і вписаного в нього круга відповідно дорівнюють $\frac{\pi R^2}{6}$ і $\frac{\pi R^2}{9}$. Значить, шукане співвідношення дорівнює $\pi\frac{R^2}{9} : \pi\frac{R^2}{6} = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Вправи

Задача 1. Обчислити площу ромба, якщо його периметр дорівнює 2*p*, а довжини діагоналей відносяться як *m* : *n* (рис. 257).

Задача 2. Дано правильний шестикутник, сторона якого дорівнює *a*. В нього вписане коло і навколо нього описане коло. Визначити площу кругового кільця, яке міститься між цими колами (рис. 258).

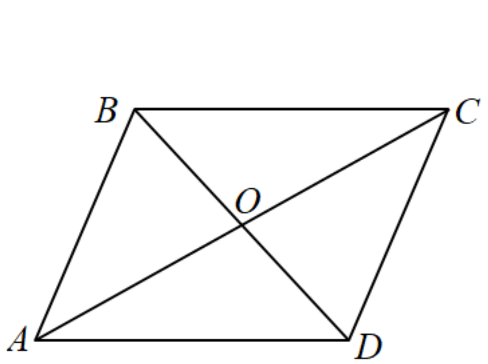


Рис. 257

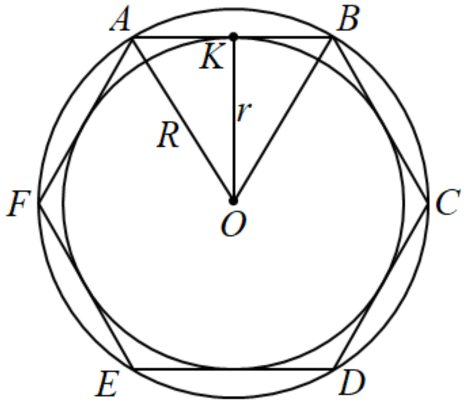


Рис. 258

Задача 3. Ромб, сторона якого дорівнює меншій діагоналі, рівновеликий кругу радіусом R. Визначити сторону ромба (рис. 259).

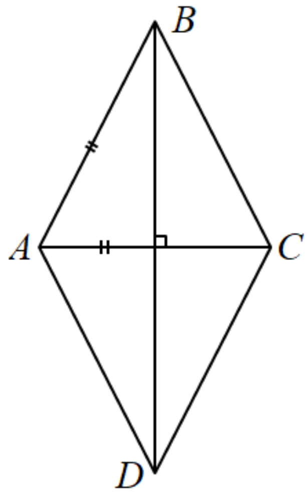


Рис. 259

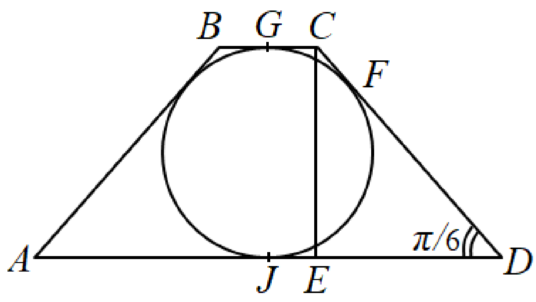


Рис. 260

Задача 4. Навколо круга описана рівнобічна трапеція. Її площа дорівнює S. Визначити бічну сторону цієї трапеції, якщо відомо, що гострий кут при основі трапеції дорівнює $\frac{\pi}{6}$ (рис. 260).

Задача 5. Правильний трикутник зі стороною a вписаний в коло. Обчислити площу квадрата, вписаного в це коло (рис. 261).

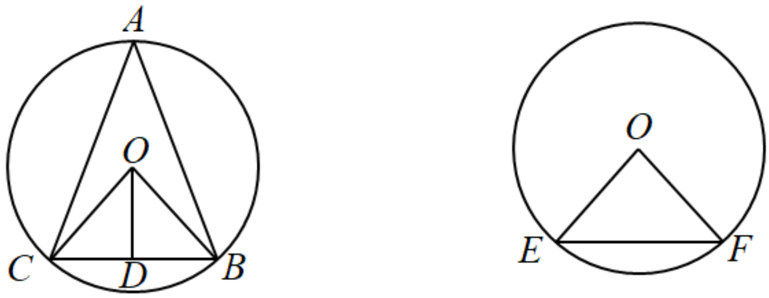


Рис. 261

Задача 6. В рівнобічну трапецію вписано круг. Знайти площу круга, якщо більша основа трапеції дорівнює a, а кут при меншій основі дорівнює 120° (рис. 262).

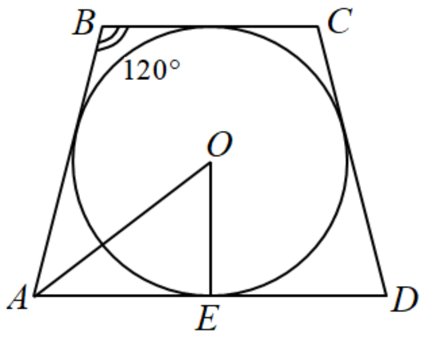


Рис. 262

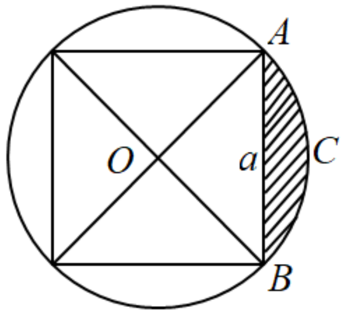


Рис. 263

Задача 7. Квадрат вписано в коло. Його сторона дорівнює a. Обчислити площу зрізаного нею сегмента (рис. 263).

Задача 8. Навколо правильного трикутника описано коло. Друге коло вписано в цей трикутник. Сторона трикутника дорівнює a. Знайти площу кільця, що утворилося (рис. 264).

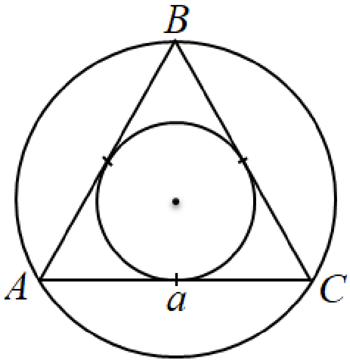


Рис. 264

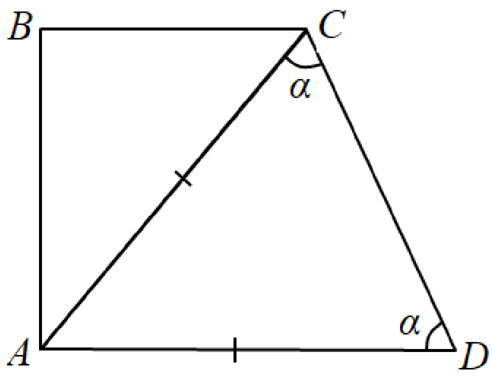


Рис. 265

Задача 9. Знайти висоту прямокутної трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює більшій основі. Площа трапеції дорівнює S, гострий кут дорівнює α (рис. 265).

Задача 10. Площа рівнобічної трапеції дорівнює S, кут між її діагоналями, протилежними бічній стороні, дорівнює α. Знайти висоту трапеції (рис. 266).

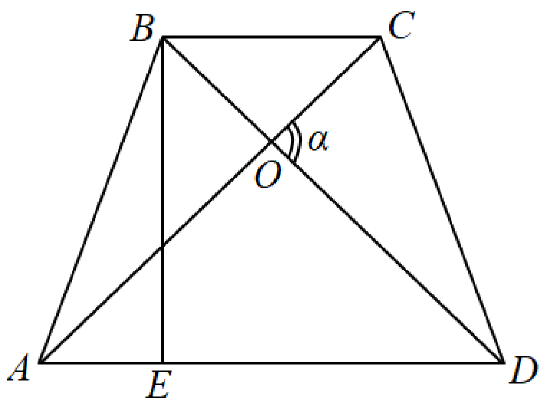


Рис. 266

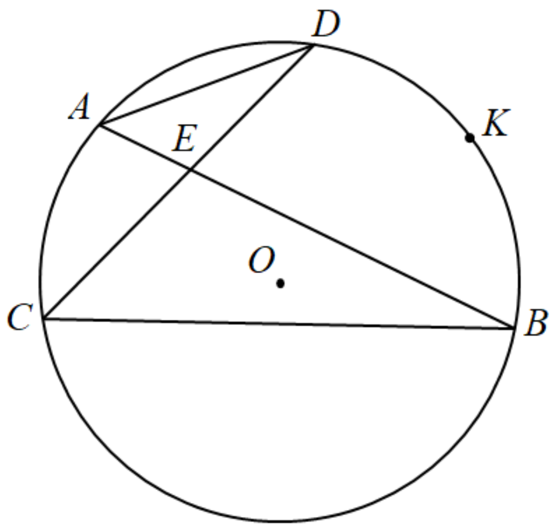


Рис. 267

Задача 11. Довести, що хорди кола, перетинаючись, діляться на відрізки, добутки яких рівні (рис. 267).

Задача 12. В гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AE і CD. Довести, що трикутник DBE подібний трикутнику ABC (рис. 268).

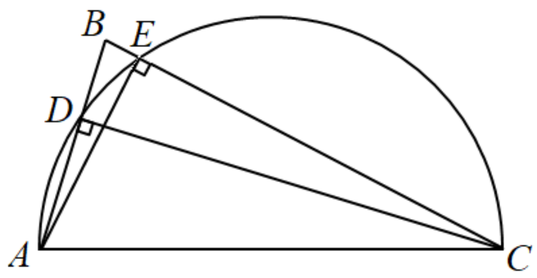


Рис. 268

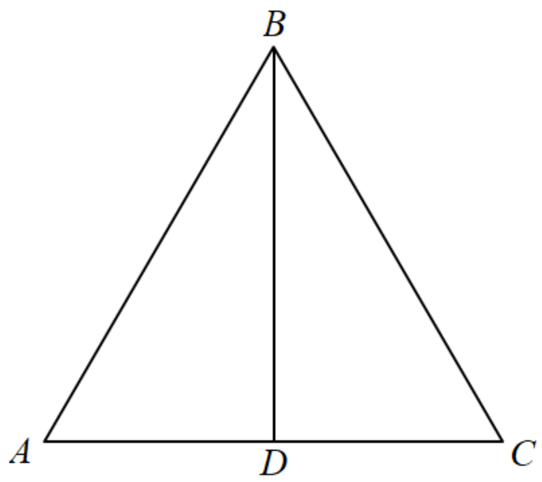


Рис. 269

Задача 13. Обчислити площу рівностороннього трикутника за різницею d між його стороною і висотою (рис. 269).

Задача 14. Показати, що з усіх прямокутників однакового периметра квадрат має найбільшу площу.

Задача 15. Який з трикутників, що мають рівні основи, рівні кути при вершині, має найбільшу площу (рис. 270)?

Задача 16. Знайдіть кути трикутника, якщо площа S трикутника виражається через довжини його сторін a і b за формулою $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

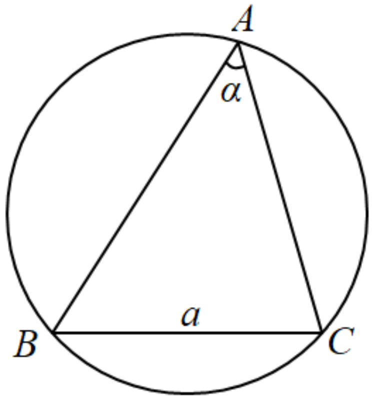


Рис. 270

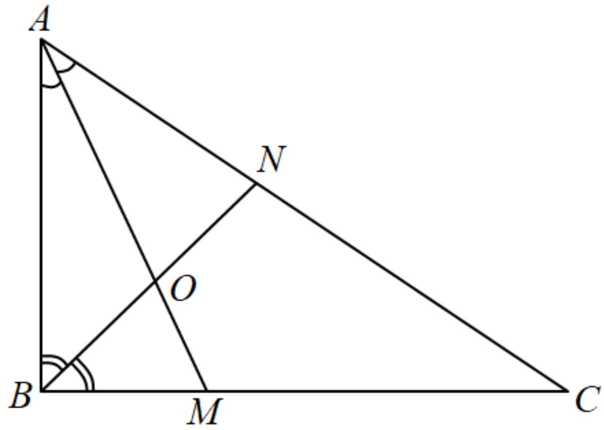


Рис. 271

Задача 17. Бісектриси *AM* і *BN* трикутника *ABC* перетинаються в точці *O*. Відомо, що $AO = \sqrt{3}MO,\ NO = \left(\sqrt{3} - 1\right)BO$.

Обчисліть кути трикутника *ABC* (рис. 271).

Задача 18. В трапеції *ABCD* кожна з основ *AD* і *BC* продовжена в обидві сторони. Бісектриси зовнішніх кутів *A* і *B* трапеції перетинаються в точці *K*, а зовнішніх кутів *C* і *D* – в точці *E*. Знайдіть периметр трапеції, якщо *KE* = 2*a* (рис. 272).

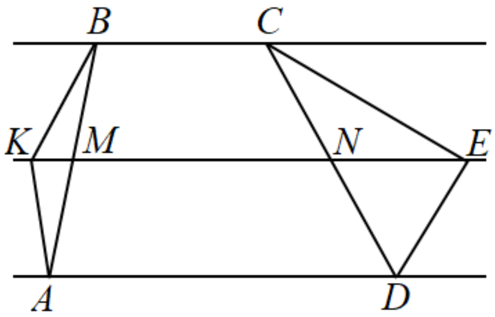


Рис. 272

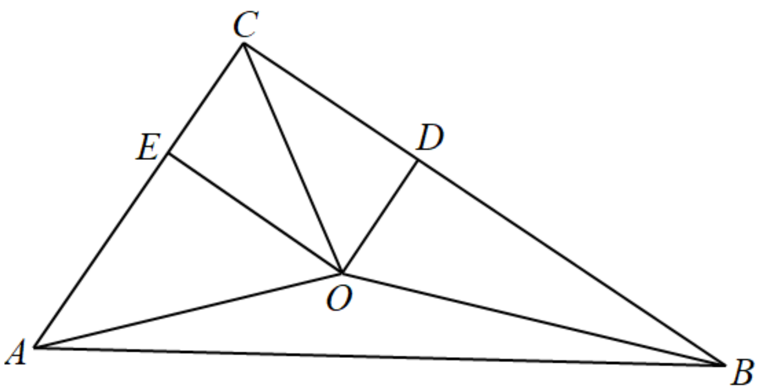


Рис. 273

Задача 19. Всередині прямокутного трикутника *ABC* ($\angle ACB = 90°$) взята точка *O* так, що трикутники *OAB*, *OBC*, *OAC* рівновеликі. Знайдіть *OC*, якщо відомо, що $OA^2 + OB^2 = a^2$ (рис. 273).

Задача 20. Доведіть, що площа прямокутної трапеції, в яку можна вписати коло, дорівнює добутку її основ (рис. 274).

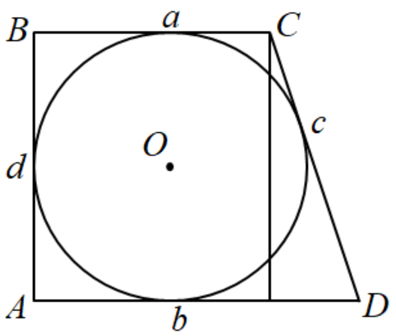


Рис. 274

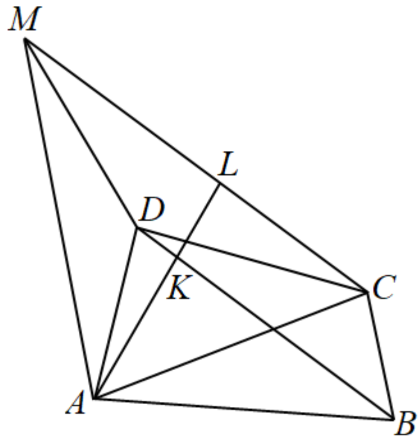


Рис. 275

Задача 21. Дано чотирикутник *ABCD*; *BD* – його діагональ. Через вершини *C* і *D* проведені прямо, паралельні відповідно *BD* і *BC*, *M* – точка їх перетину. Доведіть, що $S_{ACM} = S_{ABCD}$ (рис. 275).

Задача 22. *E* – середина сторони *AB* трапеції *ABCD* ($BC \parallel AD$). Доведіть, що площа трикутника *ECD* дорівнює половині площі трапеції *ABCD* (рис. 276).

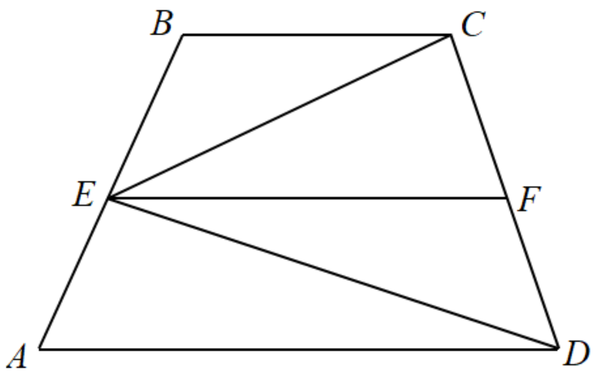


Рис. 276

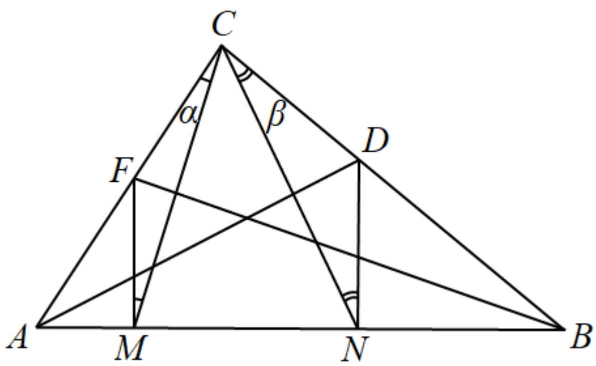


Рис. 277

Задача 23. В прямокутному трикутнику *ABC* ($\angle C = 90°$) проведено бісектриси *AD* і *BF*. Через основи бісектрис до гіпотенузи *AB* проведено перпендикуляри *DN* і *FM*. Доведіть, що $\angle MCN = 45°$ (рис. 277).

Задача 24. В трикутник вписано коло *O*. Точки дотику з двома сторонами сполучені відрізком. В новоутворений трикутник вписане коло O_1 Доведіть, що центр цього кола належить колу *O* (рис. 278).

Задача 25. Продовження бічних сторін *AD* і *BC* рівнобічної трапеції *ABCD* перетинаються в точці *S*. Доведіть, що кола, проведені відповідно через точки *A*, *C*, *S* і *B*, *D*, *S* перетинаються в центрі кола, описаного навколо даної трапеції (рис. 279).

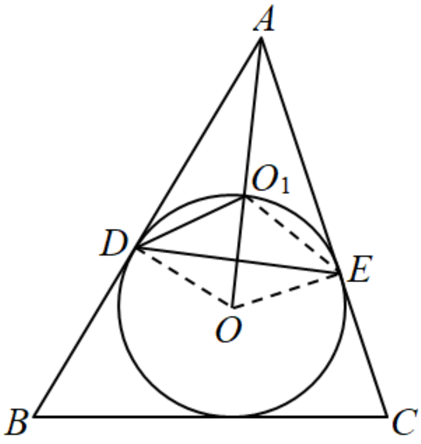


Рис. 278

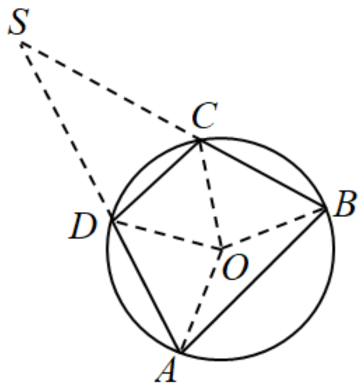


Рис. 279

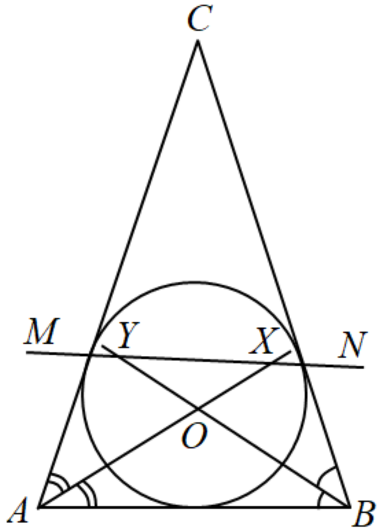


Рис. 280

Задача 26. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається сторони AC в точці M і сторони BC – в точці N. Бісектриси кутів A і B трикутника зустрічають MN відповідно в точках X і Y. Доведіть, що відрізки MX, NY і XY пропорційні сторонам трикутника ABC (рис. 280).

ТЕМА 7. ПРЯМІ Й ПЛОЩИНИ В ПРОСТОРІ

7.1. Аксіоми стереометрії та деякі висновки з них

Основні поняття стереометрії

Основними геометричними фігурами в просторі є точка, пряма й площина. Об’днання декількох геометричних фігур в просторі також геометрична фігура.

Площини позначаються малими грецькими буквами: α, β, γ,…

На рис. 281 зображені площина α, прямі a і b і точки A, B і C. Про точку A і пряму a говорять, що вони *лежать в площині* α або *належать* їй. Про точки B і C і пряму b, що вони *не лежать в площині* α або не *належать* їй.

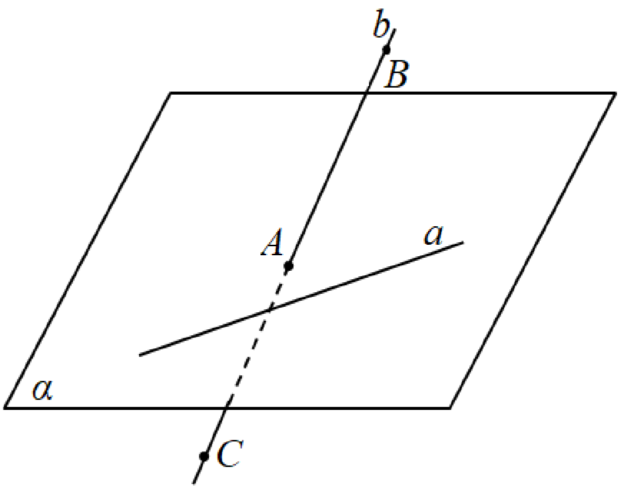


Рис. 281

Введення основної геометричної фігури – площини – заставляє розширити систему аксіом. Перелічимо аксіоми, які виражають основні властивості площин в просторі.

***Аксіома* 11.** Якою б не була площина, існують точки, які належать цій площині, й точки, що не належать їй.

На рис. 281 точка A належить площині α, а точки B і C не належать їй.

***Аксіома* 12.** Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

На рис. 282 дві різні площини α і β мають спільну точку A, а, значить, за аксіомою 12 існує пряма, яка належить кожній з цих площин. При цьому, якщо якась точка належить обом площинам, то вона належить прямій a. Площини α і β у такому випадку називаються перетинними по прямій a.

***Аксіома* 13.** Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і тільки одну.

На рис. 283 зображені дві різні прямі a і b, які мають спільну точку O, а, значить, за аксіомою 13 існує площина α, яка містить прямі a й b. При цьому за тією ж аксіомою 13 площина а єдина.

Ці три аксіоми доповнюють розглянуті аксіоми планіметрії. Всі вони разом є системою аксіом геометрії.

Користуючись цими аксіомами, можна довести декілька перших теорем стереометрії.

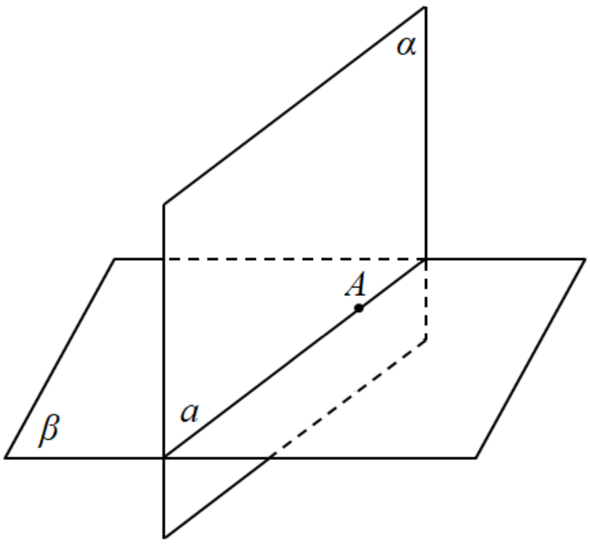


Рис. 282

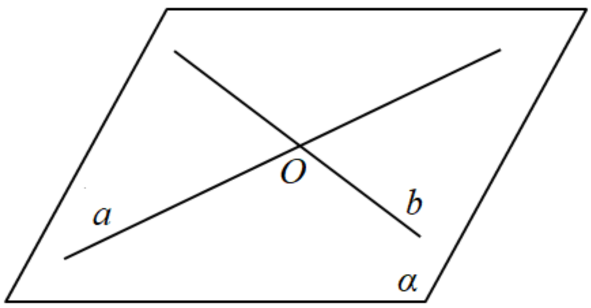


Рис. 283

***Теорема* 47.** Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину, і тільки одну.

***Теорема* 48.** Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.

***Теорема* 49.** Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і тільки одну.

Приклади розв'язування задач.

Задача 1. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AB і CD не перетинаються.

Розв'язання: доведення проведемо від протилежного. Допустимо, що прямі AB і CD перетинаються. В такому випадку за аксіомою 13 через прямі AC і CD можна провести площину α. Тоді $A \in \alpha,\ B \in \alpha,\ C \in \alpha,\ D \in \alpha$, що суперечить припущенню (точки A, B, C, D не лежать в одній площині).

Задача 2. Точки A, B і C лежать в кожній з двох різних площин. Доведіть, що ці точки лежать на одній прямій.

Розв'язання: нехай точки A, B і C лежать в кожній з двох різних площин α_1 і α_2. Згідно з аксіомою 12, якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій. Отже, точки A, B і C лежать на прямій перетину даних двох площин α_1 і α_2.

Задача 3. Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.

Розв'язання: нехай a – дана пряма і точки A і B належать цій прямій, $A \neq B$. Тоді згідно з теоремою 47 існує площина α, яка проходить через пряму a і точку A, й площина β, що проходить через пряму a й точку B. Очевидно $\alpha \neq \beta$.

Задача 4. Доведіть, що дві прямі, які перетинають дану ряму й проходять через дану точку поза прямою, лежать в одній лощині.

Розв'язання: нехай прямі a і b перетинають дану ряму c і проходять через точку $M \notin c$. Нехай $a \cap c = A,\ b \cap c = B$. скільки $a \neq b$, то $A \neq B$ через точки A, B і M можна провести лощину α (теорема 49). Тоді згідно з теоремою 48 $a \in \alpha$, $b \in \alpha$.

7.2. Паралельність прямих і площин

Перехресні прямі

В просторі можливий ще один випадок розташування прямих – *перехресні прямі*. Прямі, які не перетинаються і не лежать в одній площині, називаються перехресними.

Кутом між перехресними прямими називається кут між перетинними паралельними їм прямими. Цей кут не залежить від того, які взяті перетинні прямі.

Градусна міра кута між паралельними прямими вважається такою, що дорівнює нулю.

Спільним перпендикуляром двох перехресних прямих називається відрізок з кінцями на цих прямих, які є перпендикуляром до кожної з них. Можна довести, що дві перехресні прямі мають спільний перпендикуляр, і до того ж тільки один. Він є спільним перпендикуляром паралельних

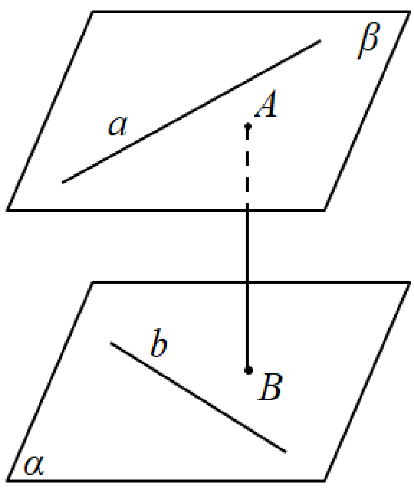


Рис. 284

площин, які проходять через ці прямі.

Відстанню між перехресними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює відстані між паралельними площинами, які проходять через ці прямі.

Таким чином, щоб знайти нідстані між перехресними прямими a і b (рис. 284) треба провести через кожу з цих прямих паралельні площини α і β Відстань між цими площинами і буде відстанню між перехресними прямими a і b. На рис. 284 цією відстанню є, наприклад, відстань AB.

Паралельність прямої та площини

Пряма і площина називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються, тобто не мають спільних точок. Якщо пряма a паралельна площині α, то пишуть: $a \parallel \alpha$.

На рис. 285 зображена пряма a, паралельна площині α.

***Теорема* 50.** Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна будь-якій прямій в цій площині, то вона паралельна і самій площині (ознака *паралельності прямої та площини*).

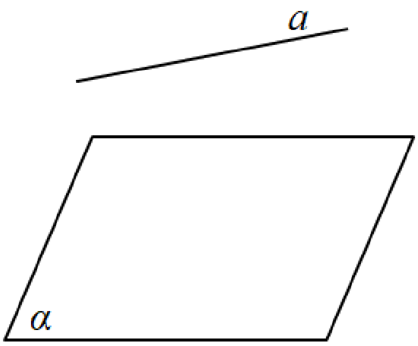


Рис. 285

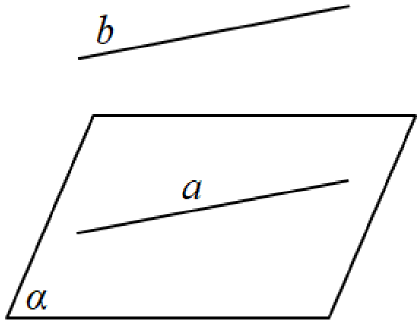


Рис. 286

Ця теорема дозволяє в конкретній ситуації довести, що пряма й площина паралельні. На рис. 286 зображена пряма b, паралельна прямій a, яка лежить в площині α, тобто за теоремою 50 пряма b паралельна площині α, тобто $b \parallel \alpha$.

Паралельні площини

Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

***Теорема* 51.** Дві площини паралельні, якщо одна з них паралельна двом перетинним прямим, які лежать в другій площині (*ознака паралельності двох площин*).

На рис. 287 площина α паралельна перетинним прямим a і b, які лежать в площині β; тоді за теоремою 51 ці площини паралельні.

***Теорема* 52.** Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній і до того ж тільки одну.

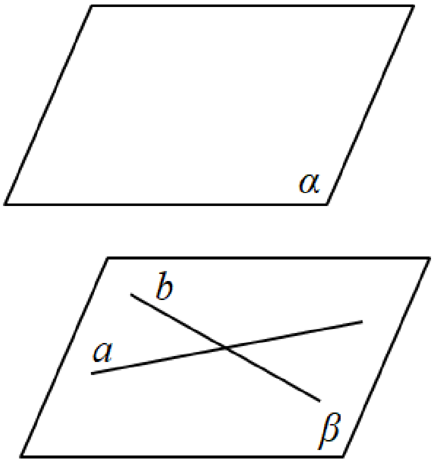


Рис. 287

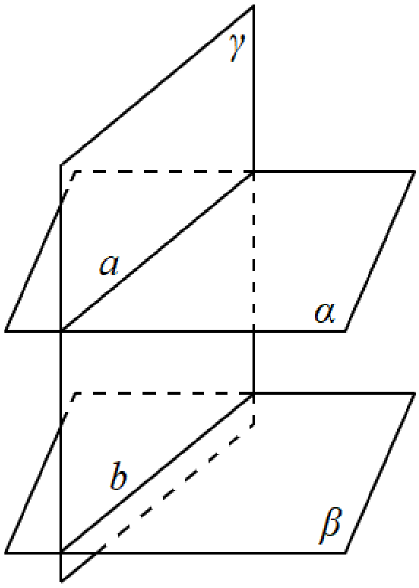


Рис. 288

***Теорема* 53.** Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.

На рис. 288 зображені дві паралельні площини α і β, а площина γ їх перетинає по прямих a і b. Тоді за теоремою 53 можна стверджувати, що прямі a і b паралельні.

***Теорема* 54.** Відрізки паралельних прямих, які розміщуються між двома паралельними площинами, тотожні.

За теоремою 54 відрізки AB і CD, зображені на рис. 289, тотожні, так як $\alpha \parallel \beta$ і $a \parallel b$.

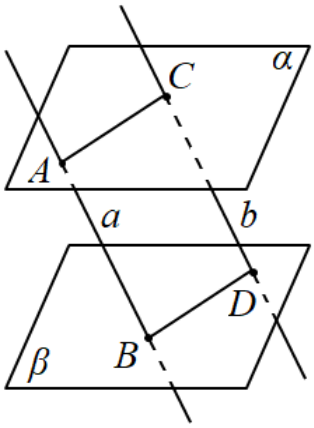


Рис. 289

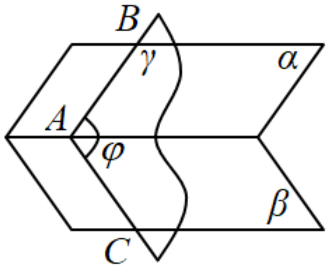


Рис. 290

Нехай дані площини перетинаються. Проведемо площину, перпендикулярну прямій їх перетину. Вона перетинає дані площини по двох прямих. Кут між цими прямими називається *кутом між даними площинами* (рис. 290). Визначуваний таким чином кут між площинами не залежить від вибору січної площини.

Градусна міра кута між паралельними площинами дорівнює нулю.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Дано перехресні прямі a і b, пряма c перетинає кожну з цих прямих. Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна c і відмінна від цієї прямої, перехрещується хоча б з однією з прямих a і b.

Розв'язання: нехай $c_1 \parallel c$ Пряма c_1 не може бути паралельною ні одній з даних прямих, так як інакше c була б паралельною цій прямій. Якщо допустити, що c_1 перетинає a і b, то виявиться, що a і b лежать в площині, яка проходить через c і c_1. А це протиречить умові: a і b – перехресні прямі.

Задача 2. Пряма c паралельна площині α, прямі a і b, які перетинають c в різних точках, перетинають α відповідно в точках A і B ($A \neq B$). Доведіть, що для того, щоб прямі a і b були перетинними або паралельними, необхідно і достатньо, щоб прямі c і AB були паралельними.

Розв'язання: *необхідність*. Якщо прямі a й b перетинаються або паралельні, то площина, яка проходить через ці прямі, перетинає площину α по прямій AB, причому $(AB) \parallel c$. *Достатність*. Нехай $(AB) \parallel c$, тоді (AB) і c лежать в одній площині. В цій площині лежать прямі a і b.

Задача 3. Доведіть, що пряма, паралельна кожній з перетинних площин, паралельна їхній лінії перетину.

Розв'язання: з умови випливає, що в площині α існує пряма b, паралельна даній прямій a, і в площині β є пряма c, паралельна a. Тоді $b \parallel c$ і $m \parallel b$ $(m - \alpha \cap \beta)$. Отже, $m \parallel a$.

Задача 4. Через точку однієї з двох паралельних площин проведена пряма, паралельна іншій площині. Доведіть, що ця пряма лежить в першій площині.

Розв'язання: нехай $A \in a$, $A \in \alpha$, $\alpha \parallel \beta$. Через пряму a і точку $B \in \beta$ проведемо площину γ. Отримаємо $\gamma \cap \alpha = a_1$, $\gamma \cap \beta = b$, причому $b \parallel a_1$. Але $b \parallel a$ за властивостями прямої, паралельної площині, тому $\alpha = a_1$ і $a \subset \alpha$.

Задача 5. Доведіть, що для даних двох перехресних прямих, паралельні площини, кожна з яких містить одну пряму, виявляються єдиними.

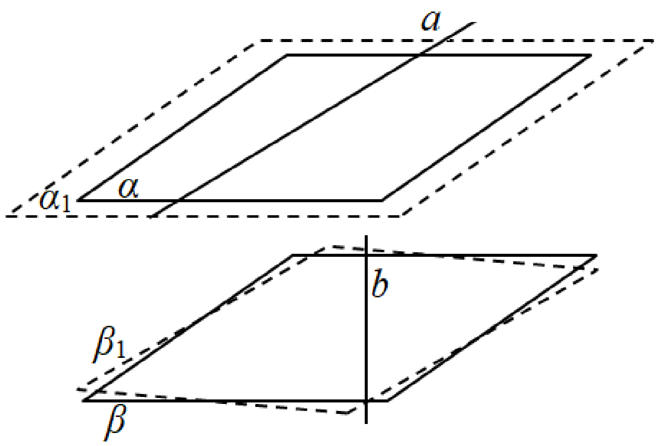


Рис. 291

Розв'язання: допустимо, що через дані прямі проходять відповідно ще дві паралельні площини α_1 і β_1 (рис. 291). Маємо $\alpha \parallel \beta$, $\alpha_1 \parallel \beta_1$, причому $\alpha \cap a_1 = a$, $\beta \cap \beta_1 = b$. Площина β_1 , яка перетинає β, перетинає й α (інакше через пряму b будуть проведені дві різні площини, паралельні площині α). Нехай $\beta_1 \cap \alpha = \mathrm{c}$, тоді $c \parallel b$. Аналогічно $c \parallel a$. Отримуємо $b \parallel a$, а це протиречить умові задачі. Отже, площина β_1, не може бути відмінною від β.

7.3. Перпендикулярність прямих і площин

Перпендикулярність прямої та площини

Пряма, яка перетинає площину, називається *перпендикулярною* цій площині, якщо вона перпендикулярна будь-якій прямій її площині, що проходить через точку перетину даної прямої та площини.

На рис. 292 зображена пряма a, перпендикулярна площині α.

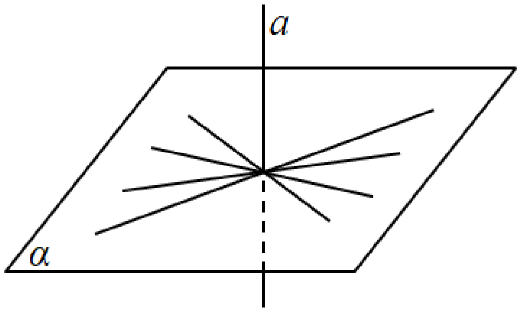


Рис. 292

***Теорема* 55.** Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна двом прямим в цій площині, які проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна площині.

Цю теорему називають *ознакою перпендикулярності прямої та площини* або *теоремою про два перпендикуляри*.

На рис. 293 зображена пряма a, перпендикулярна прямим c і d, які проходять через точку перетину площини α й прямої a і лежать в площині α. За теоремою 55 можна стверджувати, що $a \perp \alpha$.

В наступних двох теоремах йдеться про взаємозв'язок паралельності та перпендикулярності прямих і площин.

***Теорема* 56.** Якщо площина перпендикулярна одній з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й іншій.

***Теорема* 57.** Дві прямі, перпендикулярні одній і тій самій площині, паралельні.

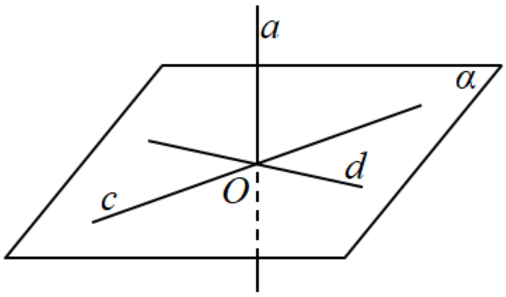


Рис. 293

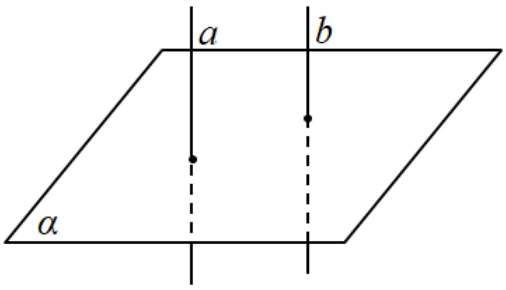


Рис. 294

На рис. 294 зображені такі прямі a й b і площина α, про які йдеться в теоремах 56 і 57.

Кутом між прямою та площиною називається кут між цією прямою та її проекцією на площину.

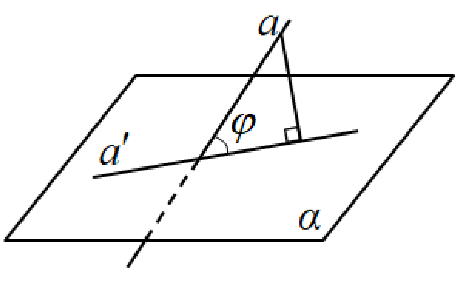


Рис. 295

На рис. 295 зображені площина α й пряма a, яка її перетинає. Пряма a' – *проекція прямої a на площину α*. Тоді кут φ – *кут між прямою a і* *площиною α*. Кут між паралельними прямими й площиною вважається рівним нулю, а кут між перпендикулярними прямою й площиною – рівним 90°. Так як пряма a, її проекція a' на площині α та перпендикуляр до площини α в точці її перетину з прямою a лежать в одній площині, то кут між прямою та площиною доповнює до 90° кут між цією прямою й перпендикуляром до площини.

Перпендикуляр і похила до площини

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, який поєднує дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній площині. Кінець цього відрізка, який лежить в площині, називається *основою перпендикуляра. Відстанню від точки до площини* називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який поєднує дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до цієї площини. Кінець відрізка, який лежить в площині, називається *основою похилої*. Відрізок, який поєднує основу перпендикуляра й похилої, проведених з однієї й тієї ж точки, називається *проекцією похилої*.

На рис. 296 з точки A проведено до площини α перпендикуляр AB і похила AC. Точка B – основа перпендикуляра, точка C – основа похилої, BC – проекція похилої AC на площину α.

Так як відстані від точки прямої до паралельної їй площини однакові, то *відстанню від прямої до паралельної їй площини* називається відстань від будь-якої її точки до цієї площини.

***Теорема* 58.** Пряма, проведена на площину через основу похилої перпендикулярна її проекції, перпендикулярна й самій похилій. І обернено: якщо пряма на площині перпендикулярна похилій, то вона перпендикулярна й до проекції похилої (*теорема про три перпендикуляри*).

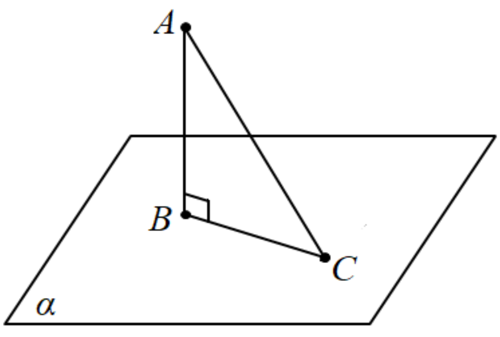


Рис. 296

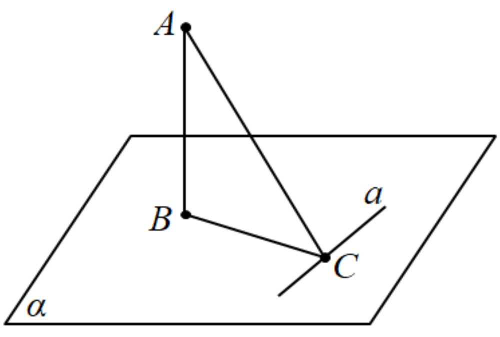


Рис. 297

На рис. 297 до площини α проведені перпендикуляр AB і похила AC. Пряма a, що лежить в площині α, перпендикулярна BC – проекції похилої AC на площину α. За теоремою 58 пряма a перпендикулярна похилій AC. Якщо було відомо, що пряма a перпендикулярна похилій AC, то за теоремою 58 вона була б перпендикулярною й її проекції – BC.

Перпендикулярність площин

Дві перетинні площини називаються *перпендикулярними*, якщо будь-яка площина, перпендикулярна прямій перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.

На рис. 298 зображені дві площини α і β, які перетинаються по прямій a. Площина γ перпендикулярна прямій a і перетинає α й β. При цьому площина γ перетинає площину α по прямій c, а площина β – по прямій d, причому $c \perp d$, тобто за визначенням $\alpha \perp \beta$.

***Теорема* 59.** Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну іншій площині, то ці площини перпендикулярні (*ознака перпендикулярності площин*).

На рис. 299 площина β проходить через пряму $a \perp \alpha$, тобто за теоремою 59 площини β і α перпендикулярні.

***Теорема* 60.** Якщо пряма, яка лежить в одній з двох перпендикулярних площин, перпендикулярна їхній лінії перетину, то вона перпендикулярна й іншій площині.

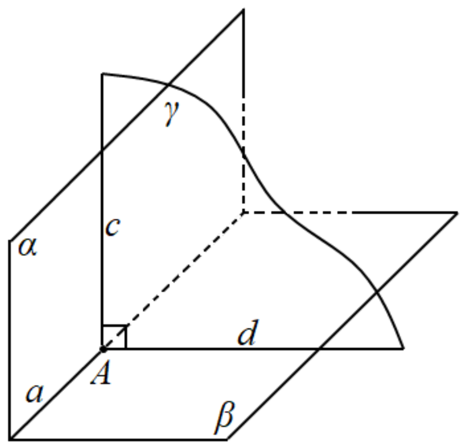


Рис. 298

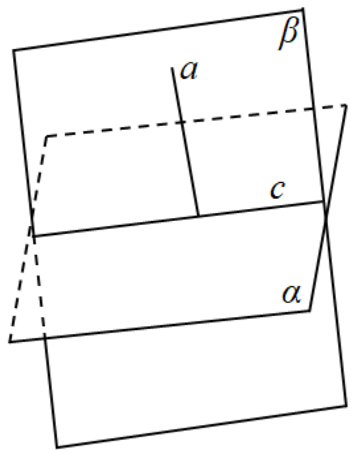


Рис. 299

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Пряма a, перпендикулярна площині α, перетинає цю площину в точці A. Доведіть, що пряма b, проведена через точку A перпендикулярно прямій a, лежить в площині α.

Розв'язання: через прямі a і b проведемо площину β; нехай $\alpha \cap \beta = b_1$, тоді $a \perp b_1$. Так як в площині β через точку A проходить єдиний перпендикуляр до прямої a, то $b = b_1$ і $b \subset \alpha$.

Задача 2. Доведіть, що через дану точку не можна провести дві різні площини, перпендикулярні даній прямій.

Розв'язання: нехай $A \notin a$ (рис. 300). Допустимо, що $a \perp \alpha_1$ й $a \perp \alpha_2$. Через пряму a і точку A проведемо площину β. Отримаємо те, що через точку A до прямої a проведені в площині β дна різних перпендикуляри $b_1 = \beta \cap \alpha_1$ і $b_2 = \beta \cap \alpha_2$. А це неможливо.

Задача 3. Через вершину прямого кута прямокутного трикутника проведена площина α, паралельна гіпотенузі. Проекції катетів на цю площину дорівнюють 8 см і $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть проекцію гіпотенузи, якщо відомо, що відстань між гіпотенузою й площиною дорівнює 4 см.

Розв'язання: нехай ΔA_1BC_1 (рис. 301) – проекція ΔABC на площину α, $A_1B = 4\sqrt{3}$ см, $BC_1 = 8$ см, $AA_1 = CC_1 = 4$ см. З прямокутного ΔAA_1B:

$AB = \sqrt{AA_1^2 + A_1B^2} = 8$ см. Аналогічно з ΔCC_1B: $CB = 4\sqrt{5}$ см. З прямокутного ΔABC: $AC = A_1C_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 12$ см.

Відповідь: 12 см.

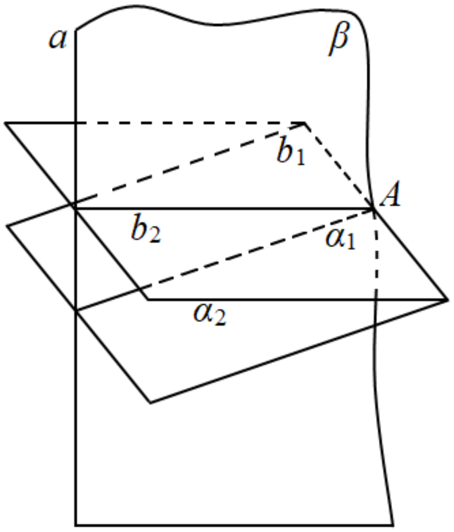


Рис. 300

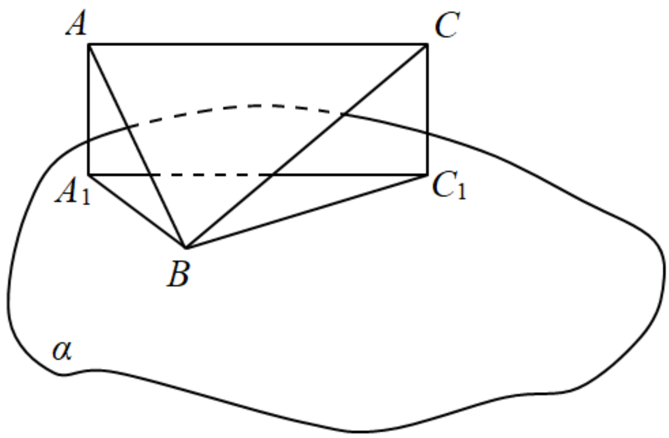


Рис. 301

Задача 4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Визначити відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу і складає кут в 30° з площиною трикутника.

Розв'язання: з вершини C трикутника ABC на гіпотенузу AB опустимо перпендикуляр CD і на площину P перпендикуляр CO (рис. 302). За теоремою про три перпендикуляри OD як проекція похилої CD на площину P перпендикулярна AB. Тоді $\angle CDO = 30°$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного площиною трикутника ABC і площиною P.

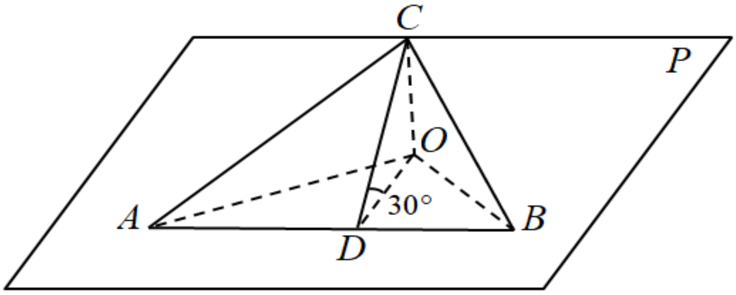


Рис. 302

З ΔABC знаходимо $CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

CO як катет, який лежить проти кута 30° в ΔDCO, дорівнює $\frac{1}{2}CD$.

Відповідь: $CO = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задача 5. Даний відрізок має кінці на двох взаємно перпендикулярних площинах і складає з однією з них кут 45°, а з іншою – кут в 30°; довжина цього відрізка дорівнює a. Визначити частину лінії перетину площин, яка розміщується між перпендикулярами, опущеними на неї з кінців даного відрізка.

Розв'язання: за умовою задачі $Q \perp P$, $AB = a$, $\angle ABC = 30°$, а $\angle BAD = 45°$ ($AC \perp Q$ і $BD \perp P$). Визначити CD (рис. 303).

З ΔABC $(\angle B = 30°)$, $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

З ΔABD $(\angle A = 45°)$,

$$AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді з прямокутного трикутника ACD знаходимо

$$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}a$.

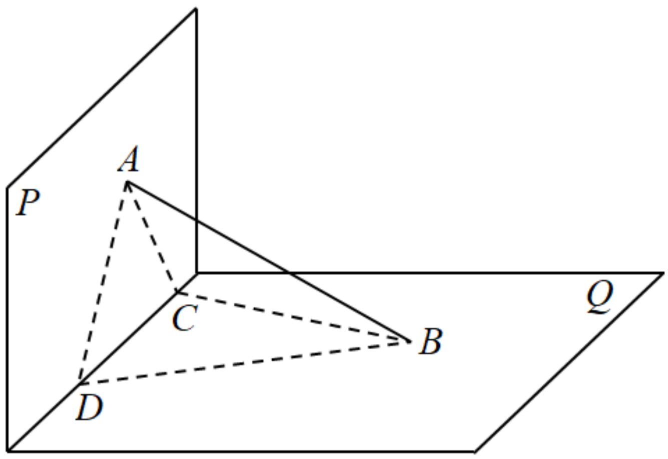


Рис. 303

ТЕМА 8. ТІЛА В ПРОСТОРІ

8.1 Багатогранники

Тіло і його поверхня

Вивчаючи багатокутники, говорять про плоский багатокутник, розуміючи під ним сам багатокутник і його внутрішню область.

Те ж саме відбувається в стереометрії. За анологією з поняттям плоского багатокутника вводиться поняття тіла і його поверхні.

Точка геометричної фігури називається *внутрішньою,* якщо існує куля з центром в цій точці, яка цілком належить цій фігурі. Фігура називається *областю*, якщо всі її точки внутрішні та якщо будь-які дві точки можна сполучити ламаною, яка цілком належить фігурі.

Точка простору називається *межовою* точкою даної фігури, якщо будь-яка куля з центром в цій точці містить як точки, які належать фігурі, так і точки, які не належать їй. Межові точки утворюють *межу* області.

Тілом називається скінченна область разом з її межею. Межею тіла називається *поверхня тіла*. Тіло називається *простим*, якщо його можна розбити на скінченне число трикутних пірамід.

Тілом обертання в найпростішому випадку називається таке тіло, яке площинами, перпендикулярними деякій прямій (осі обертання), перетинається по кругах з центрами на цій прямій. Циліндр, конус, куля є прикладами тіл обертання.

Багатогранні кути. Багатогранники

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома нівплощинами зі спільною обмежуючою їх прямою. Півплощини називаються *гранями*, а обмежуюча їх пряма – *ребром* двогранного кута.

На рис. 304 зображений двогранний кут з ребром a й гранями α та β.

Площина, перпендикулярна ребру двогранного кута, перетинає його грані по двох півпрямих. Кут, утворений цими півпрямими, називається *лінійним кутом* двогранного кута. За міру двогранного кута приймається міра відповідного йому лінійного кута. Якщо через точку A ребра a двогранного кута провести площину γ перпендикулярну цьому ребру, то вона перетне площини α і β по півпрямих c і d (рис. 304); $\angle(cd)$ – лінійний кут даного двогранного кута. Градусна міра цього лінійного кута є градусною мірою двогранного кута. Міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

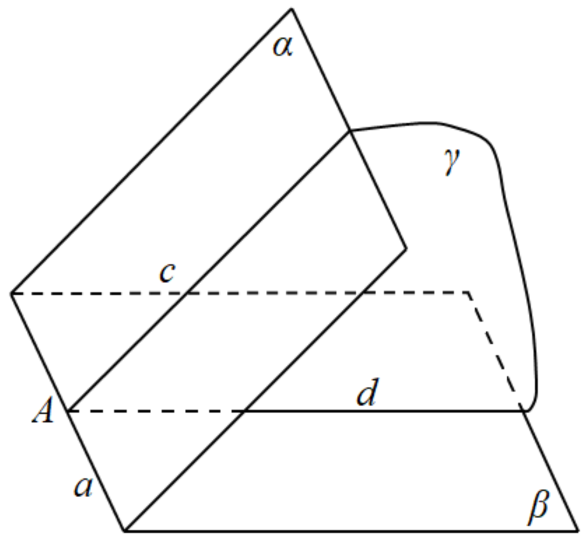


Рис. 304

Тригранним кутом (abc) називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів (ab), (bc) і (ac) (рис. 305). Ці кути називаються *гранями тригранного кута*, а їх сторони – *ребрами*. Спільна вершина плоских кутів називається вершиною тригранного кута. Двогранні кути, утворені гранями та їх продовженнями, називаються двогранними кутами тригранного кута.

Аналогічно визначається поняття *багатогранного кута* $(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$ як фігури, складеної з плоских кутів (a_1, a_2), (a_2, a_3), … , $(a_n a_1)$ (рис. 306). Для багатогранного кута визначаються поняття граней, ребер і двогранних кутів так само, як і для тригранного кута.

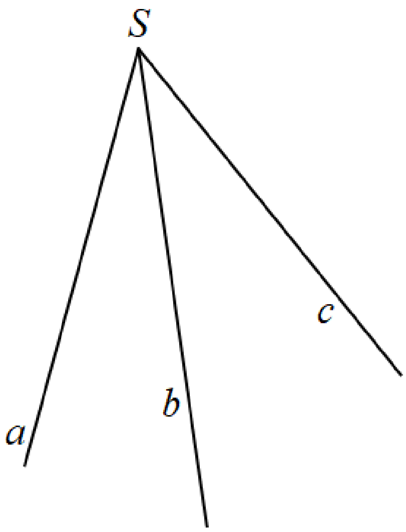


Рис. 305

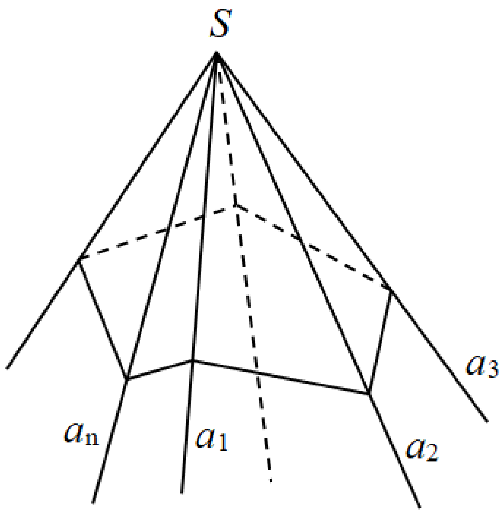


Рис. 306

Багатогранником називають тіло, поверхня якого складається із скінченного числа плоских багатокутників.

Багатогранник називається *опуклим*, якщо він розташований по одну сторону площини кожного багатокутника на його поверхні. Спільна частина такої площини й поверхні опуклого багатогранника називається *гранню*. Грані опуклого багатогранника – опуклі багатокутники. Сторони граней називаються *ребрами* багатогранника, а вершини – *вершинами* багатогранника.

Призма. Паралелепіпед. Куб

Призмою називається багатогранник, який складається з двох плоских багатокутників, суміщених паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучують відповідні точки цих багатокутників. Багатокутники називаються *основами* призми, а відрізки, які сполучують відповідні вершини, – *бічними ребрами* призми (рис. 307).

Так як паралельне перенесення – це рух, то основи призми рівні. Так як при паралельному перенесенні площина переходить в паралельну площину (або в себе), то основи в призмі лежать в паралельних площинах. Так як при паралельному перенесенні точки зміщуються на паралельних (або співпадаючих) прямих на одну й ту ж відстань, то в призми бічні ребра паралельні й рівні.

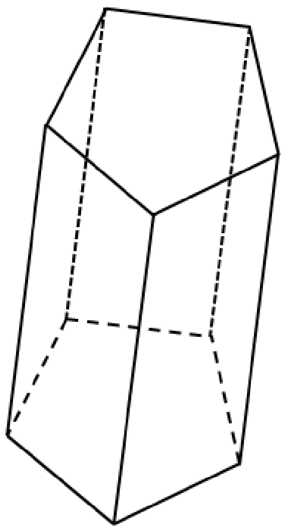


Рис. 307

На рисунку 308, а зображена чотирикутна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскі багатокутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ суміщуються з відповідними багатокутниками паралельним перенесенням і є в свою чергу основами призми, а відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – бічними ребрами призми. Основи призми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні (паралельне перенесення – це рух і переносить фігуру в таку ж фігуру). Бічні ребра AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 паралельні й рівні.

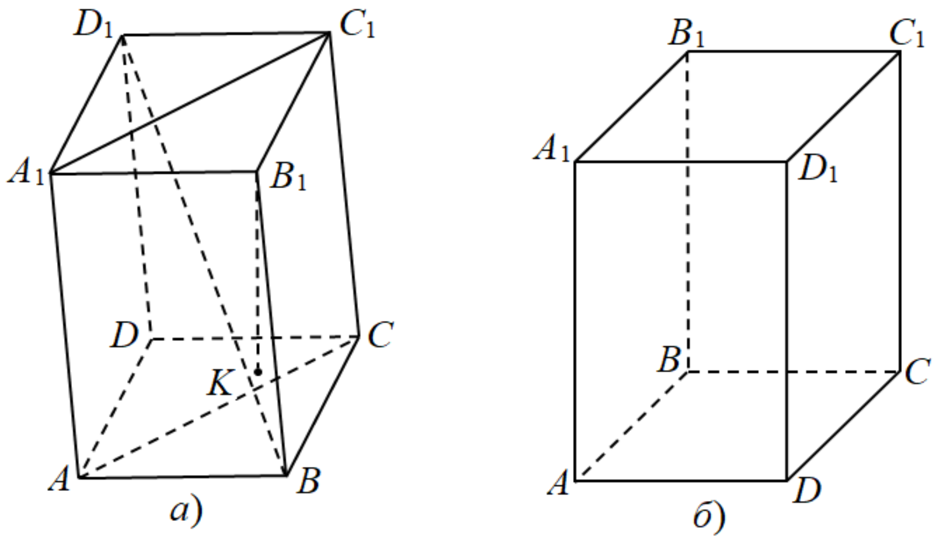


Рис. 308

Поверхня призми складається з основ і бічної поверхні. *Бічна поверхня* складається з паралелограмів. У кожного з цих паралелограмів дві сторони є відповідними сторонами основ, а дві інші – сусідніми бічними ребрами призми.

На рис. 308, а бічна поверхня призми складається з паралелограмів ABB_1A_1, BCC_1B_1, ADD_1A_1, DCC_1D_1. *Повна поверхня* складається з основ $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ і вказаних вище паралелограмів.

Висотою призми називається відстань між площинами її основ. Відрізок, який сполучує дві вершини, що не належать одній грані, називається *діагоналлю* призми. *Діагональним перерізом* призми називається переріз її площиною, яка проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані.

На рис. 308, а зображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, B_1K – її висота, D_1B – одна з її діагоналей. Переріз ACC_1A_1 є одним з діагональних перерізів цієї призми.

Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні основам. В протилежному випадку призма називається *похилою*. Пряма призма називається *правильною*, якщо її основами є правильні багатокутники.

На рис. 308, а зображена похила призма, а на рис. 308, б – пряма, в ній ребро AA_1 перпендикулярне основі призми.

Якщо основа призми паралелограми, то вона називається *паралелепіпедом*. У паралелепіпеда всі грані – паралелограми. На рис. 308, а зображений похилий паралелепіпед, а на рис. 308, б – прямий.

Грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин, називаються *протилежними*. На рис. 308, а грані ABB_1A_1 і CDD_1C_1 протилежні.

Можна довести деякі *властивості паралелепіпеда*.

***Теорема* 61.** У паралелепіпеда протилежні грані паралельні й рівні.

***Теорема* 62.** Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться пополам.

Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його *центром симетрії*.

Прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник, називається *прямокутним* паралелепіпедом. У прямокутного паралелепіпеда всі грані – прямокутники.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні, називається *кубом*.

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називаються його *лінійними розмірами* або *вимірами*. У прямокутного паралелепіпеда три лінійні розміри.

Для прямокутного паралелепіпеда вірна така теорема:

***Теорема* 63.** В прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його лінійних розмірів.

Піраміда

Пірамідою називається багатогранник, який складається з плоского багатокутника – *основи* піраміди, точки, яка не лежить в площині основи, – *вершині* піраміди і всіх відрізків, які сполучують вершину з точками основи (рис. 309). Відрізки, які сполучують вершину піраміди з вершинами основи, називаються *бічними ребрами*. На рис. 309, а зображена піраміда $SABCD$. Чотирикутник $ABCD$ – основа піраміди, точка S – вершина піраміди, відрізки SA, SB, SC і SD – ребра піраміди.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи, на рис. 309, а SO – висота піраміди.

Піраміда називається n-кутною, якщо її основа n-кутник. Трикутна піраміда називається також *тетраедром*.

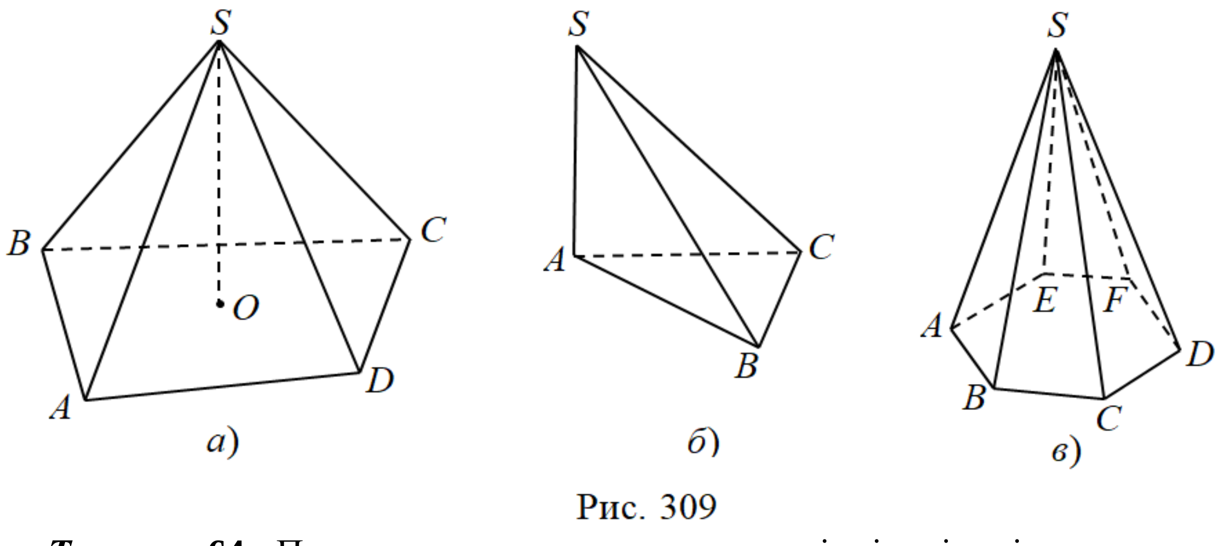


Рис. 309

***Теорема* 64.** Площина, що паралельна основі піраміди і перетинає її, відсікає подібну піраміду.

Піраміда називається *правильною,* якщо її основа – правильний багатокутник, а основа висоти співпадає з центром цього багатокутника. У правильної піраміди бічні ребра рівні; отже, бічні грані – однакові рівнобедрені трикутники. Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається *апофемою*.

За теоремою 64 площина α, що паралельна площині β основи піраміди і перетинає піраміду, відсікає від неї подібну піраміду. Інша частина піраміди являє собою багатогранник, який називається *зрізаною пірамідою*. Грані зрізаної піраміди, що лежать в паралельних площинах α й β, називаються *основами* зрізаної піраміди, інші грані називаються *бічними гранями*. Основи зрізаної піраміди є подібні (більш того, гомотетичні) багатокутники, бічні грані – трапеції. На рис. 310 зображена зрізана піраміда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

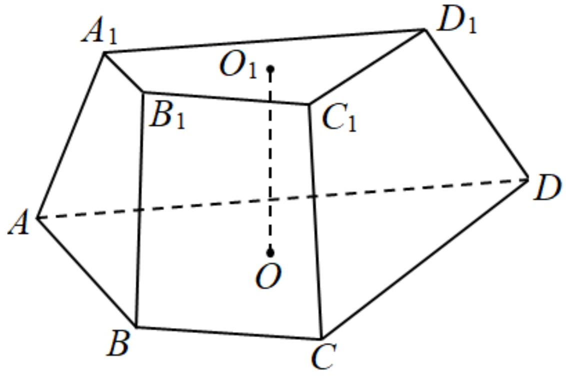


Рис. 310

Зрізана піраміда, що отримується з правильної піраміди, також називається *правильною*. Бічні грані правильної зрізаної піраміди – однакові рівнобічні трапеції, їхні висоти називаються *апофемами*.

Правильні багатогранники

Опуклий багатогранник називається *правильним*, якщо його грані являються правильними багатокутниками з одним і тим же числом сторін, і в кожній вершині багатогранника сходиться одне й те ж число ребер.

Існує п’ять видів правильних опуклих багатогранників: *правильний тетраедр*, *куб*, *октаедр*, *додекаедр*, *ікосаедр*. Про правильний тетраедр і куб сказано вище. В кожній вершині правильного тетраедра й куба сходиться три ребра.

Грані октаедра – правильні трикутники. В кожній його вершині сходяться чотири ребра.

Грані додекаедра – правильні п’ятикутники. В кожній вершині сходиться по три ребра.

Грані ікосаедра – правильні трикутники, але на відміну від тетраедра й октаедра, в кожній вершині сходиться по п’ять ребер.

Приклади розв’язування задач

Задача 1. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює 60°, на одному з ребер відкладений від вершини відрізок, який дорівнює 3, і з кінця його опущений перпендикуляр на протилежну грань. Знайти довжину цього перпендикуляра.

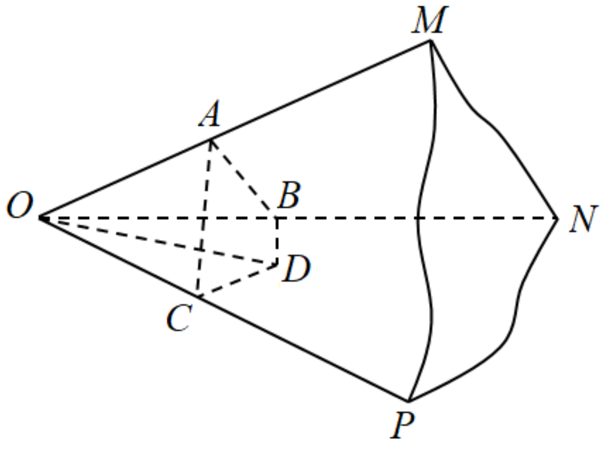


Рис. 311

Розв’язання: даний тригранний кут $OMNP$, плоскі кути якого MON, NOP, POM дорівнюють 60°, і відрізок $AO = 3$, $AD \perp$ площині NOP. Знайти довжину AD

(рис. 311). З основи перпендикуляра *AD* опустимо на промені *OP* і *ON* перпендикуляри $CD \perp OP$ і $DB \perp ON$, і точку *D* з'єднаємо з точкою *O*. Проведемо відрізки *AC* і *AB*, які за теоремою про три перпендикуляри будуть відповідно перпендикулярними *OP* і *ON*.

З прямокутного трикутника *ACO* ($\angle A = 30°$, так як за умовою $\angle AOC = 60°$) знаходимо

$$OC = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2}.$$

В ΔOCD ($\angle C = 90°$, $\angle COD = 30°$) $OD = 2CD$ і за теоремою Піфагора маємо

$$DO^2 - CD^2 = OC^2$$

або

$$3CD^2 = \frac{9}{4}, \qquad CD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad a\ OD = \sqrt{3}.$$

З ΔADO за теоремою Піфагора отримуємо

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}.$$

Відповідь: $AD = \sqrt{6}$.

Задача 2. В тригранному куті два плоских кута по 45°, двогранний кут між ними прямий. Знайти третій плоский кут.

Розв'язання: в тригранному куті *OMNP* $\angle MON = \angle NOP = 45°$, а $\angle MNOP = 90°$. Знайти кут $MOP = \alpha$ (рис. 312).

З довільної точки *C* ребра *ON* будуємо лінійний кут *ACB* двогранного кута *MNOP*, тоді за умовою задачі $\angle ACB = 90°$. Так як кути $AOC = BOC = 45°$, то $AC = OC = CB$, і прямокутні трикутники *ACO*, *ACB* і *BCO* рівні між собою, тоді $AB = AO = BO$, і шуканий $\angle AOB = 60°$.

Відповідь: 60°.

Задача 3. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює $\frac{1}{2}\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)$, де $d_1,\ d_2,\ d_3$ – діагоналі граней, які мають спільну точку.

Розв'язання: позначимо розміри паралелепіпеда через *a*, *b*, *c*, тоді $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $d_1^2 = a^2 + b^2$, $d_2^2 = a^2 + c^2$, $d_3^2 = b^2 + c^2$. Додавши почленно три останні рівності й розділивши обидві частини на 2, отримаємо

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) \text{ або}$$

$$d^2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2).$$

Відповідь: $d^2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$.

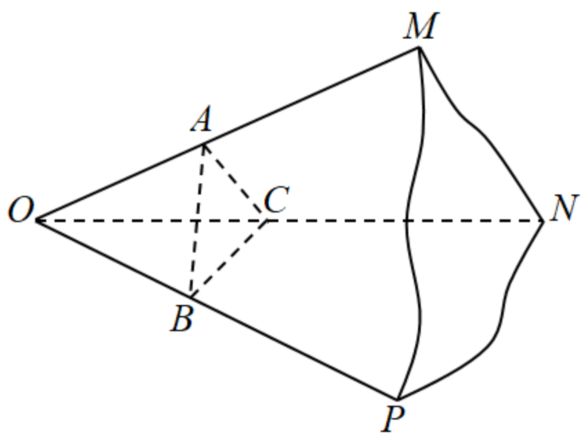


Рис. 312

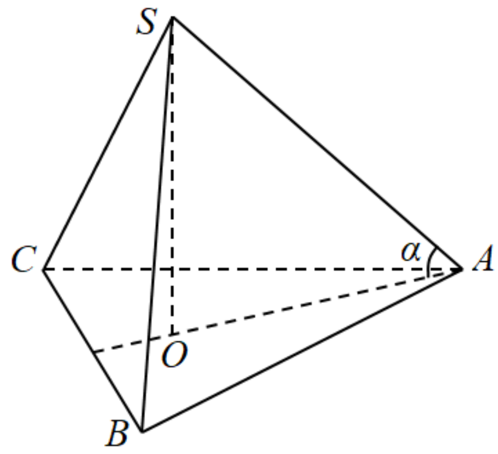


Рис. 313

Задача 4. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи правильної трикутної піраміди, в якої бічні грані – це правильні трикутники.

Розв'язання: нехай a – довжина ребра даної піраміди (рис. 313). Тоді $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. З трикутника OAS знайдемо косинус шуканого кута $\alpha = \angle OAS$. Маємо

$$\cos\alpha = \frac{AO}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Значить, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь: шуканий кут $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вправи

Задача 1. В правильній n-кутній піраміді висота вдвічі менша сторони основи. Визначити двогранний кут α при ребрі основи (рис. 314).

Задача 2. В правильній трикутній піраміді бічне ребро l, а висота h. Визначити двогранний кут при основі піраміди (рис. 315).

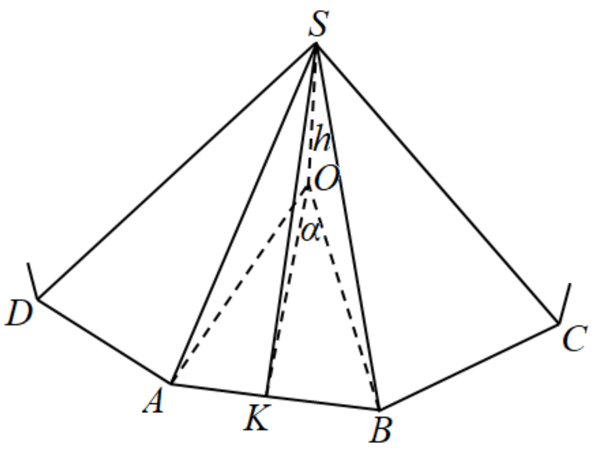


Рис. 314

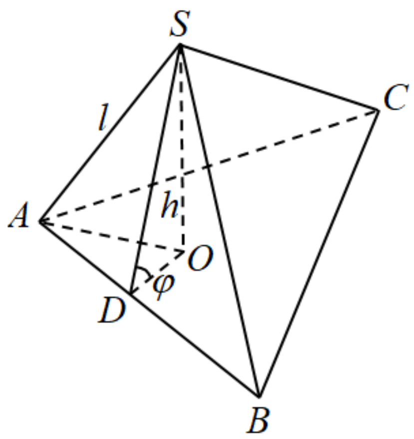


Рис. 315

Задача 3. Знайти плоский кут при вершині бічної грані правильної чотирикутної піраміди, якщо кут між бічним ребром і площиною основи піраміди дорівнює α (рис. 316).

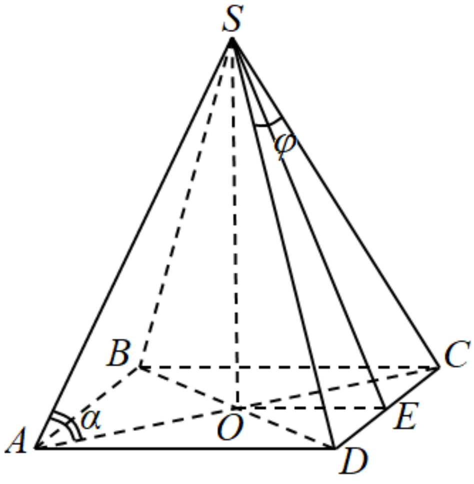


Рис. 316

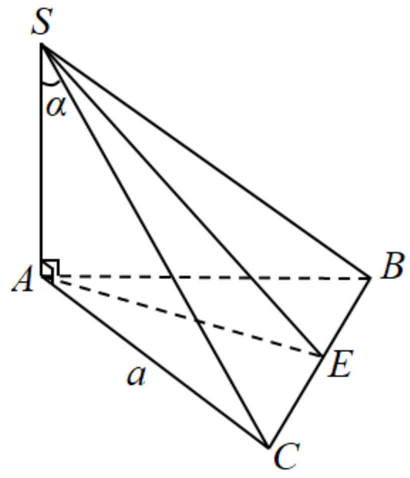


Рис. 317

Задача 4. Основою піраміди служить правильний трикутник. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи. Сума двох нерівних між собою плоских кутів при вершині дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Знайти ці кути (рис. 317).

8.2 Тіла обертання

Циліндр

Циліндром (точніше круговим циліндром) називається тіло, яке складається з двох кругів, зміщених паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучують відповідні точки цих кругів. Круги називаються *основами* циліндра, а відрізки, які сполучують відповідні точки кіл кругів, – *твірними* циліндра. На рис 318 зображений циліндр. Круги з центрами O і O_1 являються його основами, AA_1, BB_1, CC_1 – його твірні.

Можна довести, що основи циліндра однакові й лежать в паралельних площинах, що в циліндра твірні паралельні й рівні. Поверхня циліндра складається з основ і *бічної поверхні*. Бічна поверхня складається з твірних.

Циліндр називається *прямим*, якщо його твірні перпендикулярні площинам основ. На рис. 318, *б* зображений похилий циліндр, а на рис. 318, *а* – прямий.

Далі ми будемо розглядати тільки прямий циліндр, називаючи його для зручності просто циліндром. Його можна розглядати як тіло, отримане при обертанні прямокутника навколо однієї з сторін як осі.

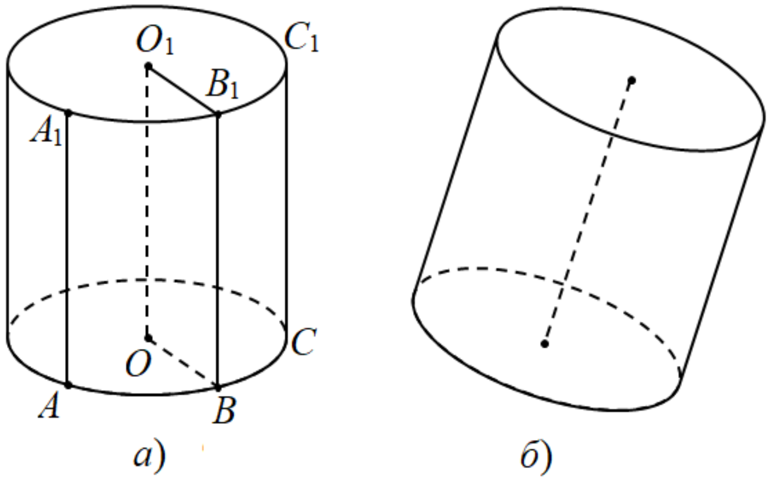


Рис. 318

Радіусом циліндра називається радіус його основи. *Висотою* циліндра називається відстань між площинами основ. *Віссю* циліндра називається пряма, яка проходить через центри основ. Вона паралельна твірним. Переріз циліндра площиною, яка проходить через вісь циліндра, називається *осьовим перерізом*. Площина, яка проходить через твірну прямого циліндра й перпендикулярна осьовому перерізу, проведеному через цю твірну, називається *дотичною площиною циліндра*.

На рис. 319 переріз ABB_1A_1 проходить через вісь циліндра OO_1 тобто є осьовим перерізом.

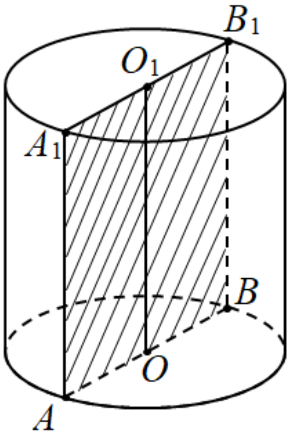


Рис. 319

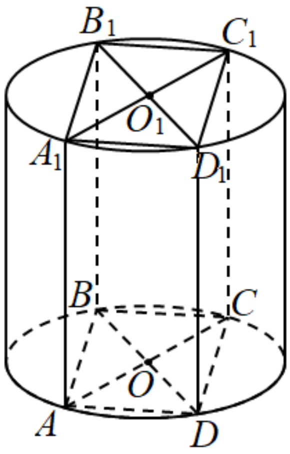


Рис. 320

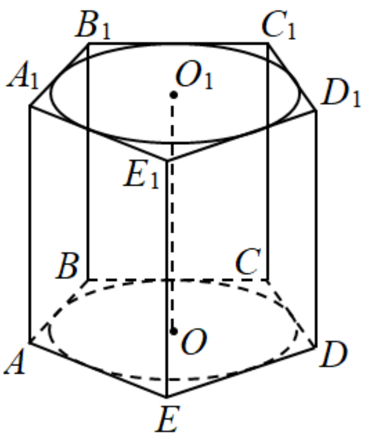


Рис. 321

Площина, перпендикулярна осі циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи.

Призмою, *вписаною* в циліндр, називається такая призма, снови якої – однакові багатокутники, вписані в основи циліндра. І бічні ребра являються твірними циліндра. Призма називається *описаною* навколо циліндра, якщо її основи – однакові багатокутники, описані навколо основ циліндра. Площини її граней дотикаться бічної поверхні циліндра.

На рис. 320 зображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вписана в циліндр. На рис. 321 призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ описана навколо циліндра.

Конус

Конусом (точніше, круговим конусом) називається тіло, яке складається з круга – *основи* конуса, точки, яка не лежить в площині цього круга, – *вершини* конуса й усіх відрізків, які сполучують вершину конуса з точками основи. Відрізки, які сполучують вершину конуса з точками кола основи, називаються твірними конуса. Поверхня конуса складається з основи й *бічної поверхні*. На рис. 322, *а* зображений круговий конус. S – вершина конуса, круг з центром в точці O – основа конуса, SA, SB і SC – твірні конуса.

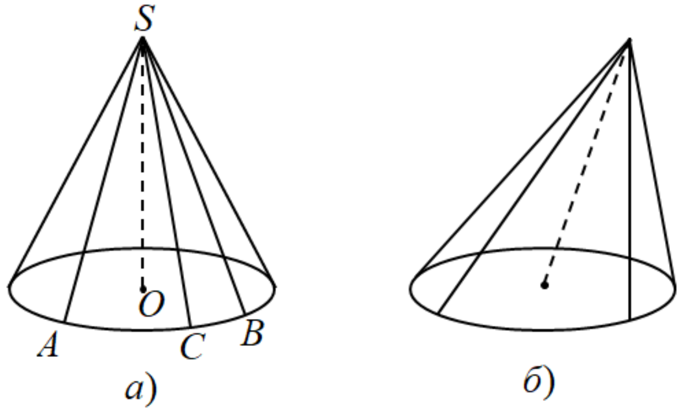


Рис. 322

Конус називається *прямим*, якщо пряма, яка сполучує вершину конуса з центром основи, перпендикулярна площині основи. На рис. 322, *б* зображений похилий конус, а на рис. 322, *а* – прямий. Далі ми будемо розглядати тільки прямий конус, називаючи його для зручності просто конусом. Прямий круговий конус можна розглядати як тіло, яке отримали при обертанні прямокутного трикутника навколо його катета як осі.

Висотою конуса називається перпендикуляр, опущений з його вершини на площину основи. У прямого конуса основа висоти співпадає з центром основи. *Віссю* прямого конуса називається пряма, яка містить його висоту.

Переріз конуса площиною, яка проходить через його вісь, називається *осьовим перерізом*. Площина, яка проходить через твірну конуса й перпендикулярна осьовому перерізу, проведеному через цю твірну, називається *дотичною площиною* конуса.

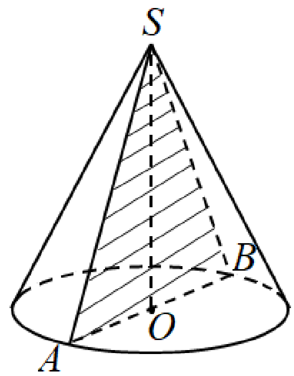


Рис. 323

На рис. 323 зображено переріз конуса, який проходить через його вісь, – осьовий переріз конуса.

Площина, перпендикулярна осі конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню – по колу з центром на осі конуса.

Плрщина, перпендикулярна осі конуса, відсікає від нього менший конус. Частина, яка залишилась називається *зрізаним конусом* (рис. 324).

Пірамідою, *вписаною* в конус, називається така піраміда, основа якої є багатокутник, вписаний в коло основи конуса, а вершиною є вершина конуса. Бічні ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса. Піраміда називається *описаною* навколо конуса, якщо її основою є багатокутник, описаний навколо основи конуса, а вершина співпадає з вершиною конуса. Площини бічних граней описаної піраміди є дотичними площинами конуса.

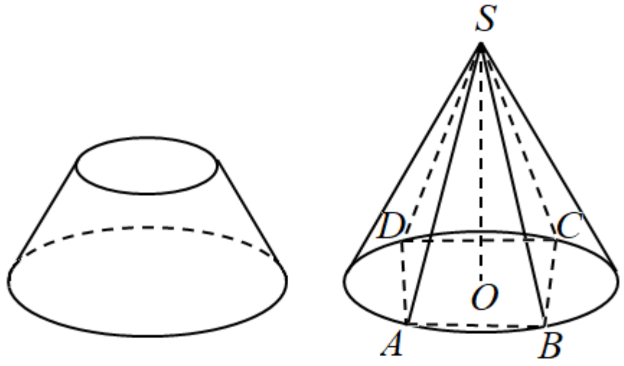


Рис. 324 Рис. 325

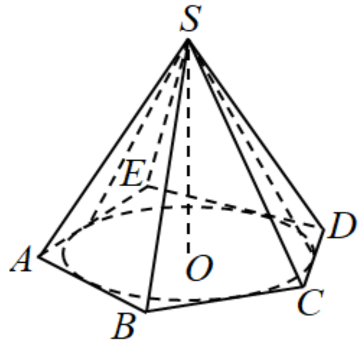


Рис. 326

На рис. 325 зображена піраміда, вписана в конус, а на рис. 326 зображений конус, вписаний в піраміду, тобто піраміда, описана навколо конуса.

Куля

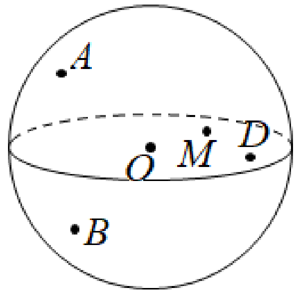


Рис. 327

Кулею називається тіло, яке складається з усіх точок простору, які знаходяться на відстані, не більшій даної, від даної точки. Ця точка називається *центром* кулі, а дана відстань – *радіусом* кулі. На рис. 327 зображена куля з центром в точці O і радіусом R. Відмітимо, що точки A, B, M, D і O належать даній кулі. Межа кулі називається кулевою поверхнею або сферою. На рис. 327 точки A, B і D належать сфері, а, наприклад, точка M їй не належить. Таким чином, точками сфери є всі точки кулі, які віддалені від центра на відстань, яка дорівнює радіусу. Будь-який відрізок, який сполучає центр кулі з точкою кулевої поверхні, також називається радіусом. Відрізок, який сполучає дві точки кулевої поверхні і проходить через центр кулі, називається *діаметром*, кінці будь-якого діаметра називаються *діаметрально протилежними точками* кулі.

Куля так само, як циліндр і конус, є тілом обертання. Вона отримується при обертанні півкруга навколо його діаметра як осі.

***Теорема* 65.** Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центр цього круга є основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

Якщо куля з центром O і радіусом R перетинається площиною α, то в перерізі за теоремою 65 отримується круг радіусом r з центром K. Радіус перерізу кулі площиною можна обчислити за формулою:

$$r = \sqrt{R^2 - OK^2}.$$

З формули видно, що площини, рівновіддалені від центра, перетинають кулю по рівних кругах. Радіус перерізу тим більший, чим ближче січна площина до центра кулі, тобто чим менша відстань OK. Найбільший радіус має переріз площиною, яка проходить через центр кулі. Радіус цього круга дорівнює радіусу кулі.

Площина, яка проходить через центр кулі, називається *діаметральною площиною*. Переріз кулі діаметральною площиною називається *більшим кругом*, а переріз сфери – *більшим колом*. На рис. 328 площина α є діаметральною площиною, круг радіусом R є більшим кругом кулі, а відповідне коло – більшим колом.

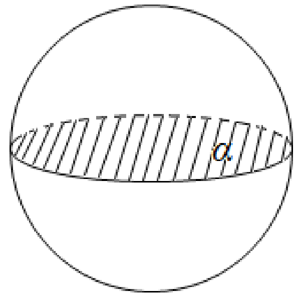


Рис. 328

***Теорема* 66.** Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є його центром симетрії.

Площина, яка проходить через точку A кулевої поверхні й перпендикулярна радіусу, проведеному в точку A, називається *дотичною площиною*. Точка A називається *точкою дотику* (рис. 329).

***Теорема* 67.** Дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку – точку дотику.

Пряма, яка проходить через точку A кулевої поверхні перпендикулярно до радіуса, проведеному в цю точку, називається *дотичною* (рис. 329).

***Теорема* 68.** Через будь-яку точку кулевої поверхні проходить нескінченно багато дотичних, причому всі вони лежать в дотичній площині кулі.

Кульовий сегментом називається частина кулі, яка відсікається від нього площиною. *Кульовим шаром* називається частина кулі, яка розміщується між двома паралельними площинами, які перетинають кулю (рис. 330).

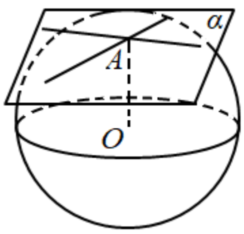


Рис. 329

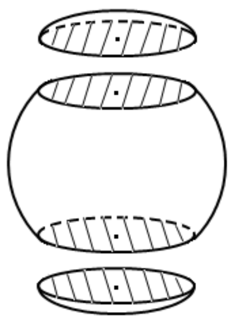


Рис. 330


Рис. 331

Кульовий сектор отримується з кульового сегмента і конуса таким чином. Якщо кульовий сегмент менший півкулі, то кульовий сегмент доповнюється конусом, вершина якого в центрі кулі, а основою є основа сегмента, якщо ж сегмент більший півкулі, то вказаний конус з нього видаляється (рис. 331).

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Висота циліндра 6 дм, радіус основи 5 дм. Кінці даного відрізка лежать на колі обох основ; довжина його дорівнює 10 дм. Знайти його найкоротшу відстань від вісі.

Розв'язання: в циліндрі, який розглядається AM = 6 дм, AO = 5 дм і відрізок MN = 10 дм (рис. 332). Знайти відстань CD між відрізком MN і віссю циліндра OO_1.

З прямокутного трикутника MAN знаходимо:

$$AN = \sqrt{MN^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ дм}.$$

В прямокутному трикутнику ABO $\left(BO \perp AN;\ AB = \frac{AN}{2}\right)$

$$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ дм}.$$

В такому випадку $CD = BO$ = 3 дм.

Відповідь: 3 дм.

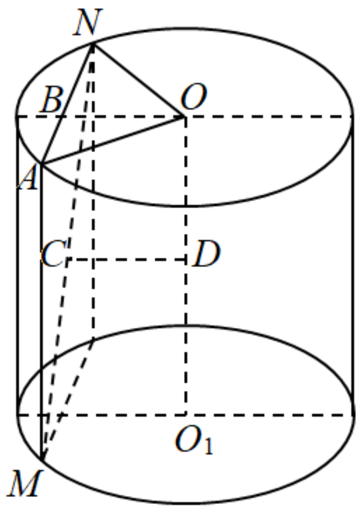


Рис. 332

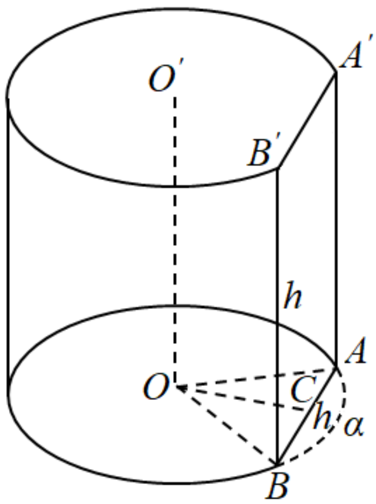


Рис. 333

Задача 2. Переріз циліндра площиною, паралельною його висоті h, являє собою квадрат, який відсікає від кола основи дугу α. Визначити відстань цього перерізу до осі циліндра.

Розв'язання: нехай O – центр основи циліндра (рис. 333), AB – хорда, по якій площина відсікає круг основи, C – середина AB. За умовою $\angle AOB = \alpha$. Значить $\angle BOC = \frac{\alpha}{2}$. Шукана відстань дорівнює довжині відрізка OC. Оскільки $AB = h$, $BC = \frac{h}{2}$, то з трикутника BOC отримуємо $OC = \frac{h\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2}$.

Відповідь: $\frac{h}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Вправи

Задача 1. Дано конус з вписаною в нього трикутною пірамідою. Бічні ребра піраміди попарно взаємно перпендикулярні. Знайти кут між твірною конуса і його висотою (рис. 334).

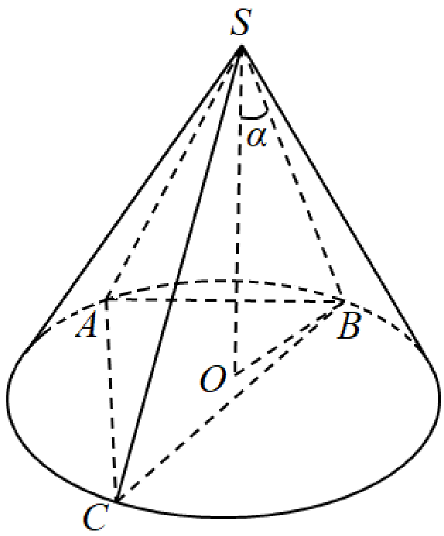


Рис. 334

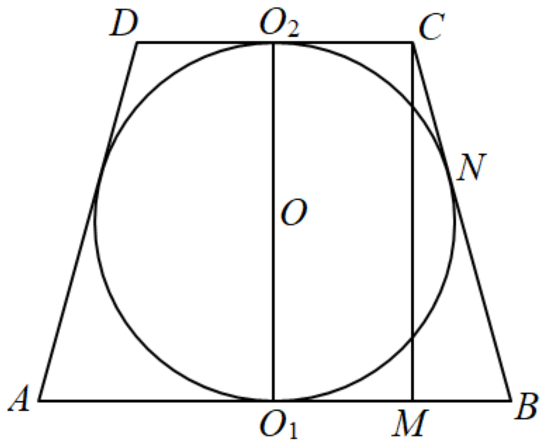


Рис. 335

Задача 2. Довести, що коли в осьовий переріз зрізаного конуса можна вписати коло, то його висота є середнім пропорційним між діаметрами основ (рис. 335).

Задача 3. Сторони трикутника дорівнюють 15, 14 і 13 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, дотичної до сторін трикутника, якщо радіус кулі дорівнює 5 см (рис. 336).

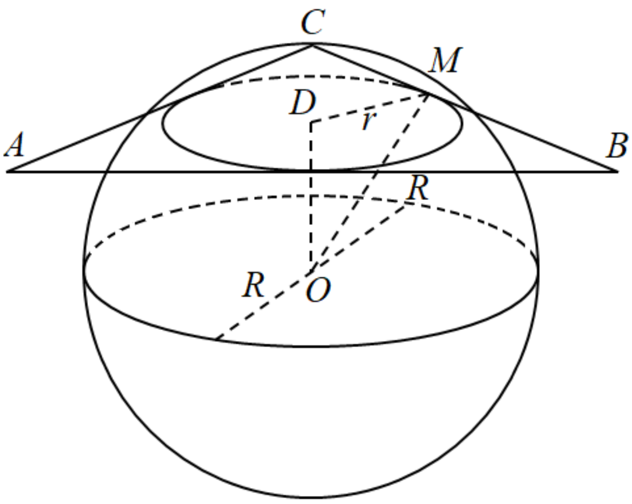


Рис. 336

8.3 Зображення просторових фігур на площині

Паралельна проекція

Для зображення просторових фігур на площині звичайно користуються *паралельним проектуванням*. Цей спосіб зображення фігури полягає в наступному. Беремо довільну пряму l, що перетинає площину, на яку проектується дана фігура, і проводимо через довільну точку A фігури пряму, паралельну l. Точка перетину A_1 цієї прямої з площиною креслення буде зображенням точки A.

Такий спосіб зображення просторової фігури на площині відповідає зоровому сприйняттю фігури при розгляді її здалеку.

Паралельною проекцією деякого об’єкта в природі є, наприклад, його тінь, яка падає на плоску поверхню землі при сонячному освітленні (промені сонця можна вважати паралельними).

З описаної побудови зображення фігури витікають деякі властивості цього зображення (зображувані відрізки і прямі не паралельні напрямку проектування).

1. Проекція прямої є пряма.

2. Проекція відрізка є відрізок.

На рис. 337 відрізок AC проектується на площину α. Всі прямі, які проектують точки відрізка AC, лежать в одній площині, яка перетинає площину креслення по прямій A_1C_1. Довільна точка B відтрізка AC зображається точкою B_1 відрізка A_1C_1. Відрізок A_1C_1 є проекцією відрізка AC на площину α. Ще раз відмітимо, що це твердження справедливе, якщо відрізок, який проектується, не паралельний напрямку проектування.

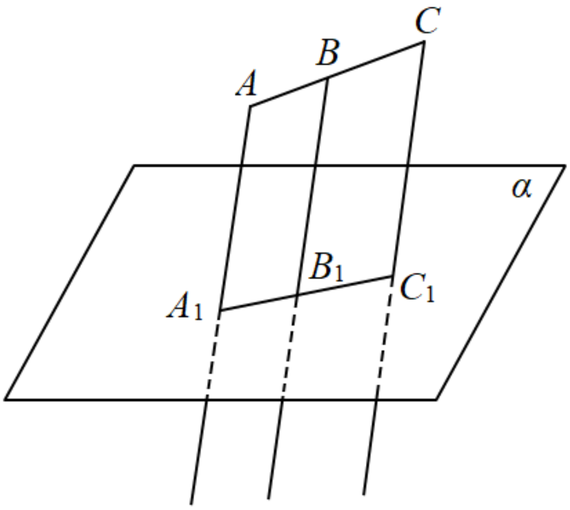


Рис. 337

3. Паралельні відрізки фігури зображуються на площині креслення паралельними відрізками або відрізками, які лежать на одній прямій.

4. Відношення відрізків одній прямій або паралельних прямих зберігається при паралельному проектуванні.

Наприклад, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$ (рис. 336).

Ортогональне проектування

Нехай дана площина α, на якій треба зобразити фігуру. При цьому напрямок проектування задано прямою l, яка перпендикулярна α (рис. 338). Таке проектування називається *ортогональним* (прямокутним) *проектуванням* на площину.

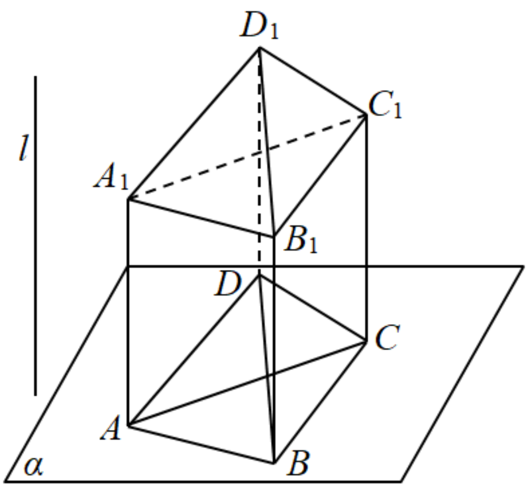


Рис. 338

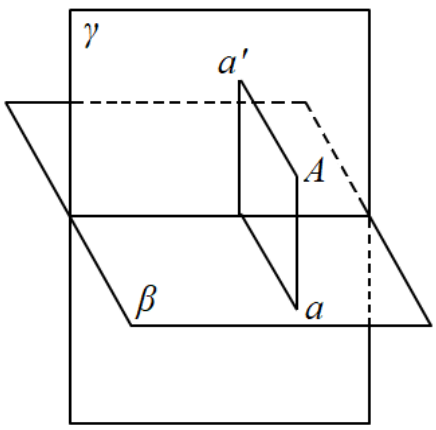


Рис. 339

Ортогональна проекція широко застосовується в технічному кресленні. За основу виконання технічних креслень береться спосіб ортогонального проектування фігури на дві площини: горизонтальну β і вертикальну γ (рис. 339). Проекції точки A на ці площини позначають a і a'.

***Теорема* 69.** Площа ортогональної проекції багатокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною багатокутника і площиною проекції.

На рис. 340 дано ортогональну проекцію ΔABC на площину α. Проекцією трикутника ABC є трикутник ABC_1.

За сформульованою теоремою $S_{\Delta ABC_1} = S_{\Delta ABC}\cos\varphi$, де φ – кут між площиною трикутника ABC і площиною проекції α, на рис. 340 це $\angle CDC_1$.

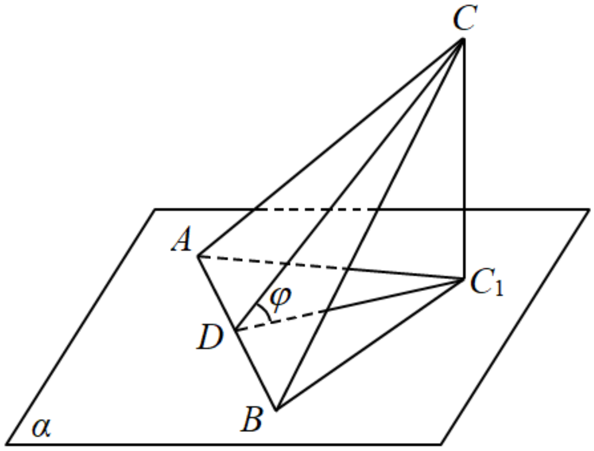


Рис. 340

Геометричне місце точок в просторі

Геометричним місцем точок в просторі називається фігура, яка складається з усіх точок простору, які наділені певними властивостями.

Перелічимо декілька геометричних місць точок в просторі.

Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної площини Q на відстань m, є дві площини, паралельні площині Q і розміщені по обидві сторони від неї на відстані m.

Геометричне місце вершин пірамід, які мають даний об'єм V і побудовані на даній основі S, є площини, паралельні основі й розміщені від неї на відстані, яка дорівнює спільній висоті вказаних пірамід $h = \frac{3V}{S}$.

Геометричне місце центрів сфер з даним радіусом, що дотикаються двох площин, які перетинаються, є прямі, паралельні лінії перетину даних площин.

Геометричне місце точок, відношення відстаней яких від двох даних точок A і B дорівнює a:b, є сфера з діаметром, що сполучає точки M і N, які ділять відрізок AB в даному відношенні внутрішнім і зовнішнім чином.

Геометричне місце прямих, які проходять через дану точку A і дотикаються до даної сферичної поверхні, є конічна кругова поверхня з вершиною в точці A.

Геометричне місце перпендикулярів, опущених з даної точки A на площини, які проходять через дану пряму l, є круг, діаметр якого дорівнює відстані від точки A до прямої l.

Геометричне місце прямих, які проходять через дану точку A й перетинають дану площину під заданим кутом α, є конічна поверхня з вершиною в точці A й кутом в осьовому перерізі $\beta = 90° - \alpha$.

Геометричне місце точок, симетричних даній точці N відносно всіх точок площини Q й однаково віддалених від неї, є коло, яке лежить в площині P, паралельній площині Q.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Знайти геометричне місце точок, які знаходяться на даній площині Q, з яких даний відрізок AB видно під прямим кутом.

Розв'язання: допустимо, що N – довільна точка шуканого геометричного місця. Сполучимо точку N з кінцями A й B даного відрізка (рис. 341). Оскільки за умовою задачі ΔABN прямокутний, то $NO = \frac{1}{2}AB$ (як медіана, опущена з вершини прямого кута на гіпотенузу). Отже, точка O рівновіддалена від усіх точок шуканого геометричного місця точок.

Таким чином, усі шукані точки рівновіддалені від деякої точки O_1, яка є проекцією точки O на площину Q.

Отже, шукане геометричне місце точок є коло, яке розміщується на площині Q та має радіус

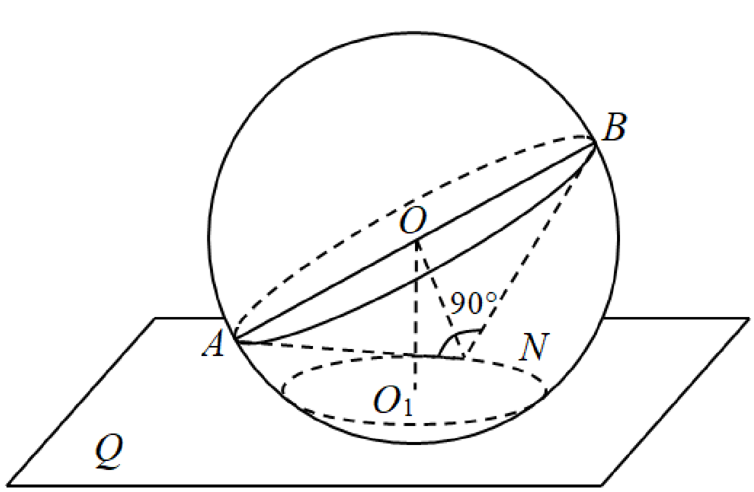


Рис. 341

$$R = O_1N = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - OO_1^2}.$$

Відповідь: коло з радіусом $\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - OO_1^2}$.

Задача 2. Довести, що геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін даного в просторі кута ASB, є площина, яка проходить через бісектрису даного кута і перпендикулярна площині, в якій він знаходиться.

Доведення: нехай FS бісектриса даного кута ASB, а Q – площина, яка перпендикулярна площині $\angle ASB$ і проходить через його бісектрису (рис. 342).

Візьмемо в площині Q довільну точку P і проведемо $PN \perp$ площині ASB. Перпендикуляр PN лежить в площині Q. Проведемо $NK \perp SA$, $NL \perp SB$ і сполучимо точку P з точками K і L, тоді (за двома рівними катетами)

$$\Delta PKN = \Delta PLN.$$

Отже, $PL = PK$. Оскільки точка P взята на площині Q довільно, то твердження доведено для всіх точок площини Q.

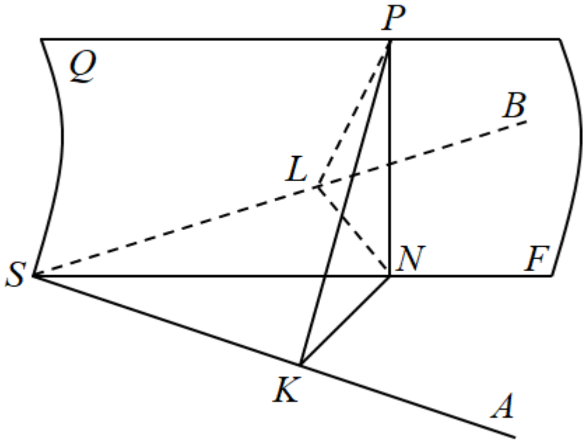


Рис. 342

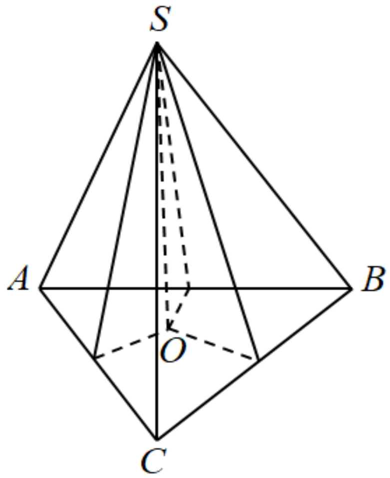


Рис. 343

Вправи

Задача 3. Знайти геометричне місце таких точок простору, щоб кожна з них була на однаковій відстані від всіх трьох ребер тригранного кута (рис. 343).

Задача 4. Побудуйте сферу, яка дотикається до даної площини й проходить через дані три точки, що не належать одній прямій.

Задача 5. Дано дві перпендикулярні перехресні прямі. Побудуйте правильний тетраедр так, щоб дві його вершини алежали одній прямій, а дві інші – другій прямій.

8.4 Об'єми тіл

Поняття об'єму простих тіл

Для простих тіл *об'єм* – це додатна величина, чисельне значення якої наділене такими властивостями.

1. Рівні тіла мають рівні об'єми.

2. Якщо тіло розбите на частини, які є простими тілами, то об'єм цього тіла дорівнює сумі об'ємів його частин.

3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Якщо куб, про який іде мова у визначенні, має ребро 1 см, то об'єм вимірюється в кубічних сантиметрах; якщо ребро куба дорівнює 1 м, то об'єм вимірюється в кубічних метрах; якщо ребро куба дорівнює 1 км, то об'єм вимірюється в кубічних кілометрах і т.д.

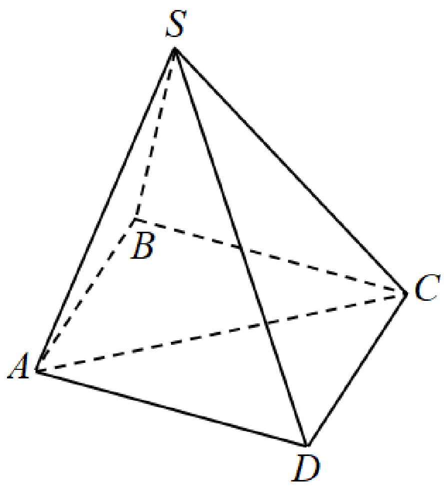


Рис. 344

На рис. 344 зображене просте тіло – чотирикутна піраміда *SABCD*. Об'єм цієї піраміди за властивістю 2 дорівнює сумі об'ємів пірамід *SABC* і *SADC*.

Об'єм паралелепіпеда, призми й піраміди

Об'єм прямокутного паралелепіпеда обчислюється за формулою:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

де a, b, c – ребра прямокутного паралелепіпеда. Виходячи з цієї формули, можна отримати формулу для об'єму куба. *Об'єм куба* обчислюють за формулою:

$$V = a^3,$$

де a – ребро куба.

Інколи кажуть, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку його лінійних розмірів або добутку площі його основи на висоту. Останнє твердження правильне для будь-якого паралелепіпеда.

На рис. 345 зображений похилий паралелепіпед, його об'єм дорівнює

$$S_{ABCD} = A_1K,$$

де S_{ABCD} – площа основи, а A_1K – висота похилого паралелепіпеда.

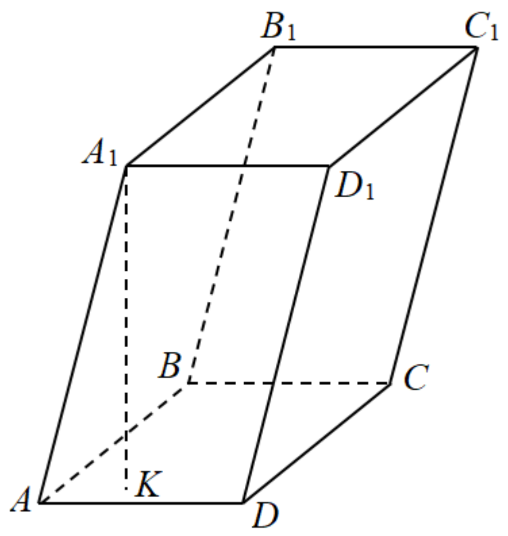


Рис. 345

Можна вивести правило знаходження об'єму будь-якої призми (в тому числі похилої).

Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту:

$$V = S \cdot H,$$

У випадку прямої призми (рис. 346) її висота співпадає з бічним ребром і об'єм прямої призми дорівнює добутку площі основи на бічне ребро.

Об'єм будь-якої *піраміди* обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

де S – площа основи, H – висота піраміди.

На рис. 347 зображений правильний тетраедр $SABC$ з ребром a. Його об'єм дорівнює

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

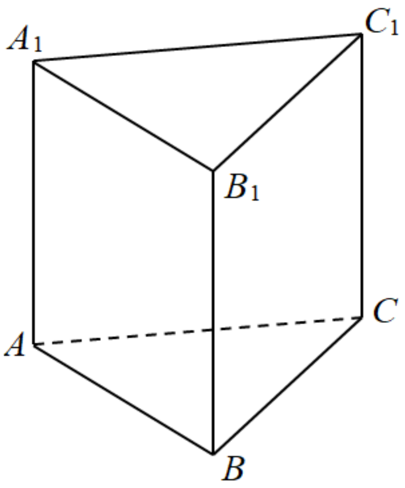


Рис. 346

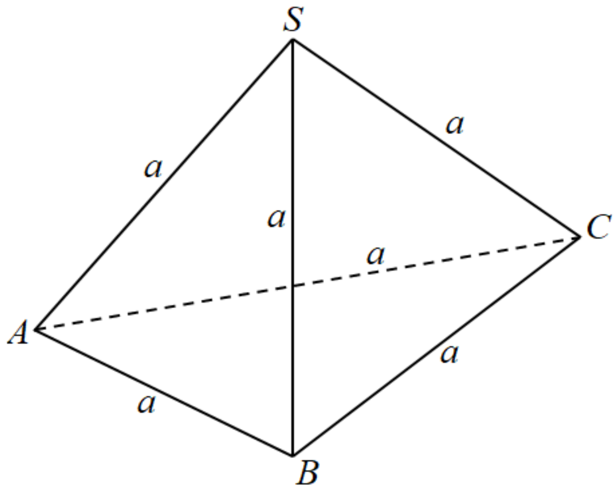


Рис. 347

Об'єм циліндра та конуса

Об'єм будь-якого тіла визначається таким чином. Дане тіло має об'єм V, якщо існують прості тіла, які містять його, та прості тіла, які містяться в ньому, з об'ємами, що як завгодно мало відрізняються від V.

Застосовуючи це означення до обчислювання об'ємів циліндра та конуса, можна довести теореми.

***Теорема* 70.** Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту, тобто $V = SH$.

Якщо радіус основи циліндра R, а висота H, то формула його об'єму така:

$$V = \pi R^2 H.$$

***Теорема* 71.** Об'єм конуса дорівнює одній третій добутку площі основи на висоту, тобто $V = \frac{1}{3} SH$.

Якщо радіус основи конуса R, а висота H, то об'єм його обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Об'єм зрізаного конуса можна знайти за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2),$$

де R і r – радіуси основ, H – висота зрізаного конуса.

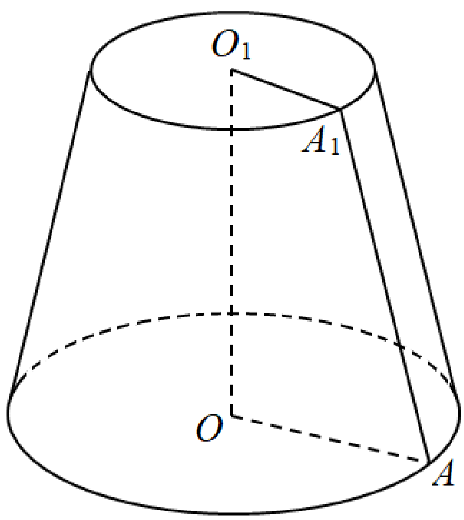


Рис. 348

Об'єм зрізаного конуса, зображеного на рис. 348, обчислюється за формулою:

$$V = \frac{1}{3}\pi OO_1(OA^2 + OA \cdot O_1A_1 + O_1A_1^2).$$

Об'єм кулі та її частин

Формула об'єму кулі радіусом *R* така:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Об'єм кульового сегмента, нисота якого *H*, а радіус *R*, обчислюється за формулою:

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right).$$

Формула *об'єму кульового сектора*:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

де *R* – радіус кулі, *H* – висота відповідного кульового сегмента.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди, довжина якої дорівнює m, нахилене до площини основи під кутом α. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання: нехай *SABCD* – дана піраміда. За умовою $\angle OAS$ між ребром *AS* даної піраміди *SABCD* (рис. 349) і його проекцією AO дорівнює α. З трикутника *AOS*, в якому $AS = m$, маємо $OS = m\sin\alpha$, півдіагональ основи $AO = m\cos\alpha$. Значить, сторона основи піраміди дорівнює $m\sqrt{2}\cos\alpha$, площа основи дорівнює $2m^2\cos^2\alpha$, а об'єм піраміди дорівнює

$$\frac{2m^2\cos^2\alpha}{3} \cdot OS = \frac{2m^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2m^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3}$.

Задача 2. В основі прямого паралелепіпеда лежить паралелограм зі сторонами 1 і 4 см і гострим кутом 60°. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 5 см. Визначити його об'єм.

Розв'язання: нехай *ABCDA'B'C'D'* – даний паралелепіпед (рис. 350), *AD* = 4 см, *CD* = 1 см, $\angle BAD = 60°$, *A'C* = 5 см. Оскільки площа основи $AB \cdot AD\sin 60° = 2\sqrt{3}$ см^2, то для того, щоб обчислити об'єм, залишається знайти висоту паралелепіпеда *AA'*. Попередньо знайдемо діагональ основи *AC*. Враховуючи, що $\angle ADC = 120°$ і застосовуючи до трикутника *ACD* теорему косинусів, маємо:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD\cos 120°} = \sqrt{16 + 1 + 2 \cdot 4\frac{1}{2}} = \sqrt{21} \text{ см}.$$

Тепер з трикутника *AA'C* знаходимо

$$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 21} = 2 \text{ см}.$$

Значить, шуканий об'єм дорівнює $4\sqrt{3}$ см^3.

Відповідь: $4\sqrt{3}$ см^3.

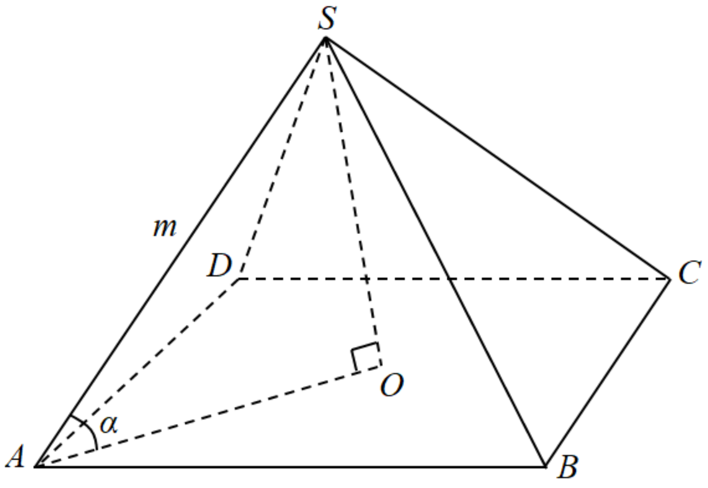


Рис. 349

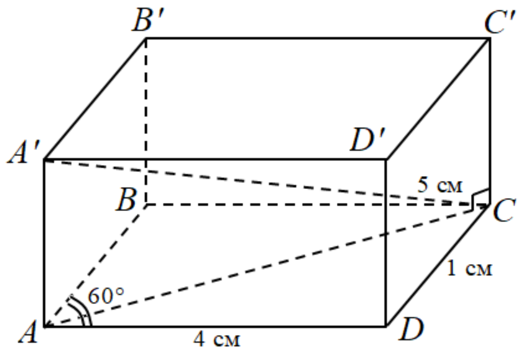


Рис. 350

Задача 3. Визначити об’єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°, а площа діагонального перерізу дорівнює S.

Розв’язання: знайдемо діагональ BD основи заданої піраміди $ABCDS$ (рис. 351). За умовою діагональний переріз BDS є прямокутним рівнобедреним трикутником. Значить, в ньому його висота дорівнює половині основи BD. Тому його площа S задовольняє рівняння $S = \left(\frac{BD}{2}\right)^2$. Звідси знаходимо, що $BD = 2\sqrt{S},\ SO = \sqrt{S}$. Значить, об’єм піраміди

$$\frac{1}{3}AB^2 \cdot OS = \frac{1}{3}\left(\frac{BD}{\sqrt{2}}\right)^2 OS = \frac{2}{3}S\sqrt{S}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}S\sqrt{S}$.

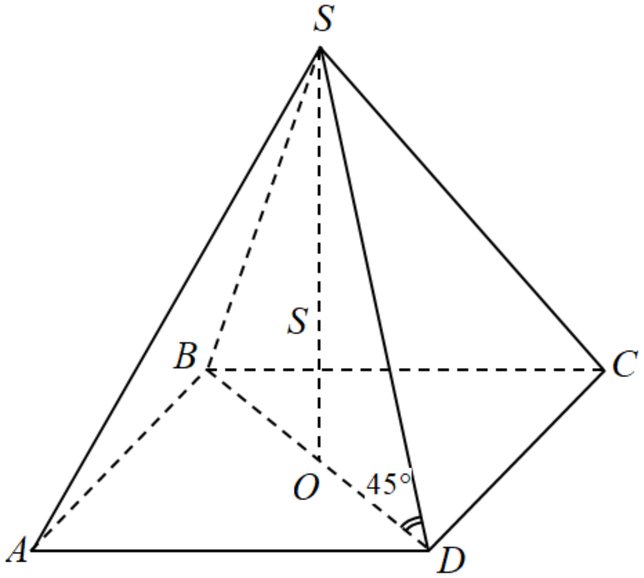


Рис. 351

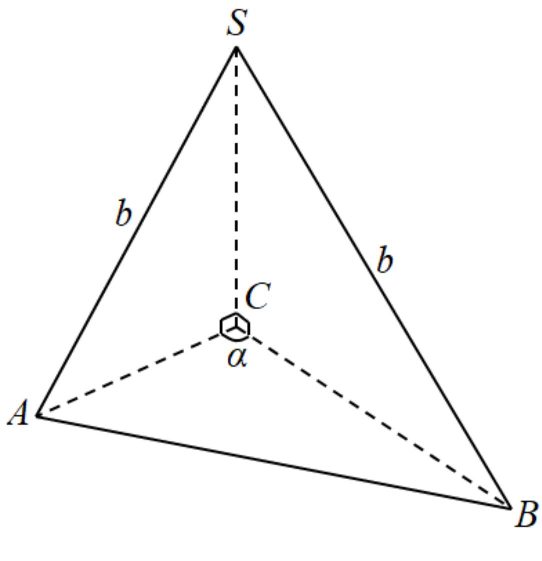


Рис. 352

Вправи

Задача 1. В трикутній піраміді дві бічні грані – равнобедрені прямокутні трикутники, гіпотенузи яких дорівнюють b. Лінійний кут між ними дорівнює α. Визначити об'єм піраміди (рис. 352).

Задача 2. Визначити об'єм правильної шестикутної призми, в якій найбільша діагональ дорівнює d, а бічні грані – квадрати (рис. 353).

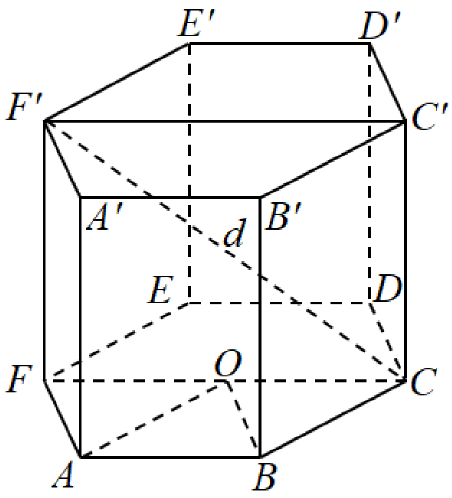


Рис. 353

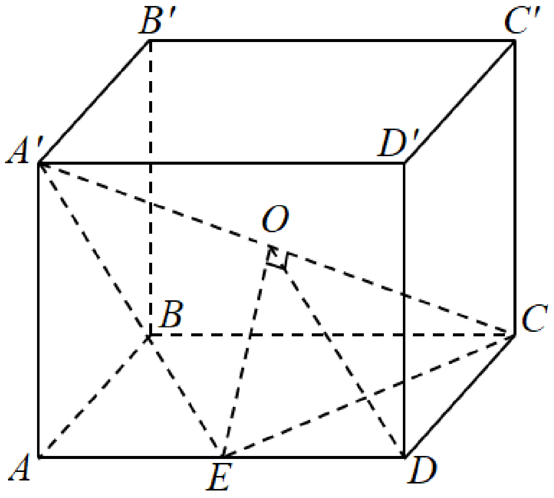


Рис. 354

Задача 3. Знайти об'єм куба, якщо відстань від його діагоналі до ребра, яке її не перетинає, дорівнює d (рис. 354).

Задача 4. Найбільша діагональ правильної шестикутної піраміди дорівнює d і утворює з бічним ребром призми кут 30°. Змайти об'єм призми (рис. 355).

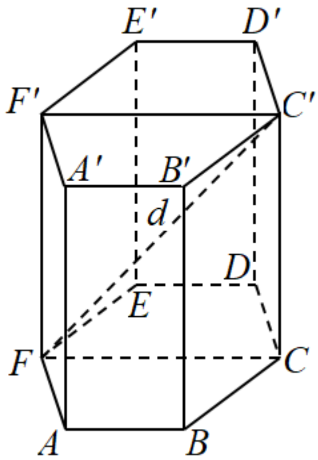


Рис. 355

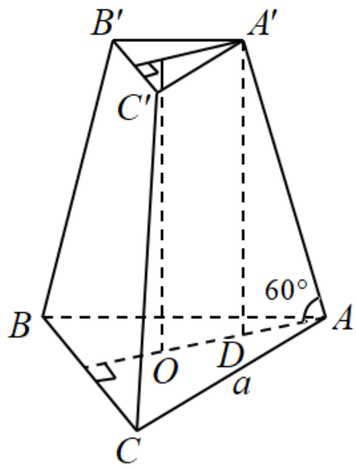


Рис. 356

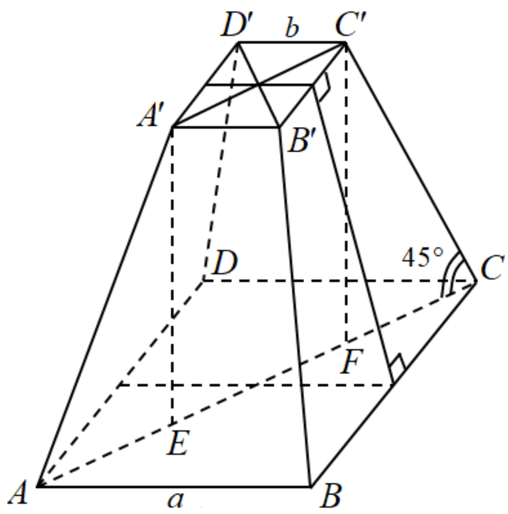


Рис. 357

Задача 5. Бічні ребра правильної зрізаної трикутної піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Сторони нижньої і верхньої основ відповідно дорівнюють a і b ($a > b$). Знайти об'єм зрізаної піраміди (рис. 356).

Задача 6. Основами правильної зрізаної піраміди служат), квадрати зі сторонами a і b ($a > b$). Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Визначити об'єм зрізаної піраміди.

ТЕМА 9. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ

9.1. Координати на площині та в просторі

Введення координат на площині та в просторі

Проведемо на площині через точку O дві взаємно перпендикулярні прямі x і y – осі координат. Вісь x (вона звичайно горизонтальна) називається віссю абсцис, а вісь y – віссю ординат. Точка перетину цих осей O називається початком координат. Цією точкою кожна з осей розбивається на дві півосі. Домовимося одну з них називати додатною, відмічаючи її стрілкою, а іншу – від'ємною. На рис. 358, *а* зображені осі x і y, точка О – початок координат.

Кожній точці A площини ми складемо пару чисел – координати точки – абсцису (x) і ординату (y) за таким правилом.

Через точку A проведемо пряму, паралельну осі ординат (рис. 358, *б*). Вона перетне вісь абсцис x в деякій точці A_x. *Абсцисою* точки A ми будемо називати число x, абсолютна величина якого дорівнює відстані від O до A_x. Це число додатне, якщо A_x належить додатній півосі; від'ємне, якщо A_x належить від'ємній півосі. Якщо точка лежить на осі ординат y, то допускаємо $x = 0$.

Ордината (y) точки A визначається аналогічно. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі абсцис (рис 358, *б*). Вона перетне вісь ординат y в деякій точці A_y. Ординатою точки A ми будемо називати число y, абсолютна величина якого дорівнює відстані від точки A_y до O. Це число додатне, якщо A_y належить додатній півосі; від'ємне, якщо A_y належить від'ємній півосі. Якщо точка A лежить на осі абсцис, то допускаємо $y = 0$.

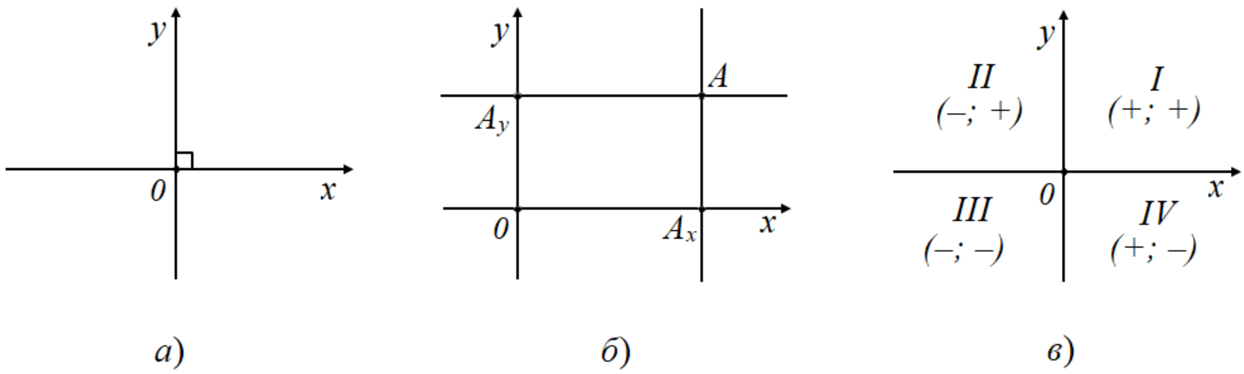


Рис. 358

Координати точки записуються в дужках поряд з буквеним позначенням точки, наприклад $A(x; y)$ (на першому місці абсциса, на другому – ордината).

Осі координат розбивають площину на чотири частини – чверті І, ІІ, ІІІ, IV (рис. 358, *в*). В межах однієї чверті знаки обох координат зберігаються. В першій чверті вони додатні, в другій – абсциса від'ємна, а ордината додатна, в третій – абсциса і ордината від'ємні, в четвертій – абсциса додатна, а ордината від'ємна (рис. 358, *в*).

Точки осі x мають ординати, які дорівнюють нулю ($y = 0$), а точки осі y – дорівнюють нулю абсциси ($x = 0$). Абсциса і ордината початку координат дорівнюють нулю.

Площина, на якій введені описаним вище способом координати x і y, будемо називати площиною xy. Довільну точку A цієї площини з координатами x і y позначають $A(x; y)$.

Введені на площині координати x і y називаються *декартовими*, по імені французького математика Р. Декарта.

Аналогічно вводяться *декортові координати в просторі*. Візьмемо три попарно перпендикулярні прямі x, y і z, які перетинаються в одній точці O (рис. 359, *а*). Проведемо через кожну пару цих прямих площину. Площина, яка проходить через прямі x і y, називається площиною xy. Дві інші площини називаються відповідно xz і yz. Прямі x, y, z називаються *координатними осями* або осями координат, точка їх перетину O – *початком координат*, а площини xy, xz, yz – *координатними площинами*. Точка O розбиває кожну з осей координат на дві півпрямі. Одна з них є додатною, а друга від'ємною.

Якщо через точку A проведемо площину, паралельну площині yz (рис. 359, *б*), то вона перетинає вісь x в деякій точці A_x. Координатою x точки A буде число, яке дорівнює за абсолютною величиною довжині відрізка OA_x. Воно додатне, якщо точка A_x лежить на додатній півосі, і від'ємне, якщо точка лежить на від'ємній півосі. Якщо точка A_x співпадає з точкою O, то $x = 0$. Аналогічно визначаються координати y і z. Точку A з координатами x, y, z звичайно записують так: $A(x; y; z)$.

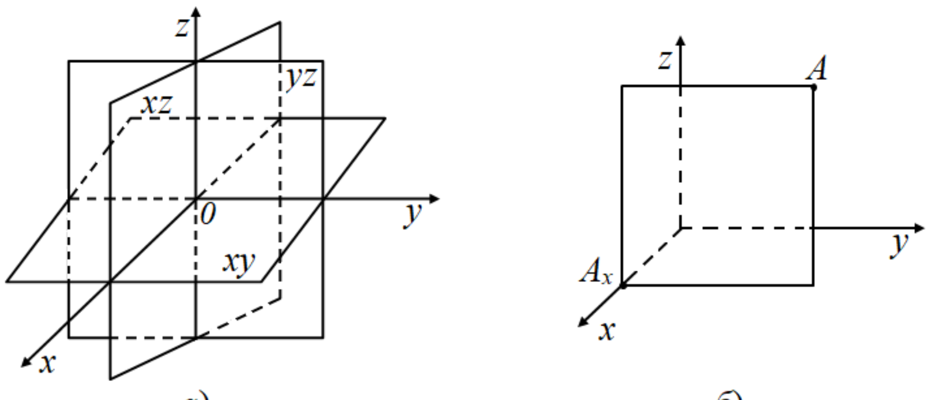


Рис. 359

Таким чином, кожній точці A простору відповідають три числа x, y, z – *координати точки A* в просторі.

Існує формула для знаходження відстані між точками, заданими своїми координатами.

На рис. 360, а точка B в просторі має три координати c, a, b тобто $B(c; a; b)$.

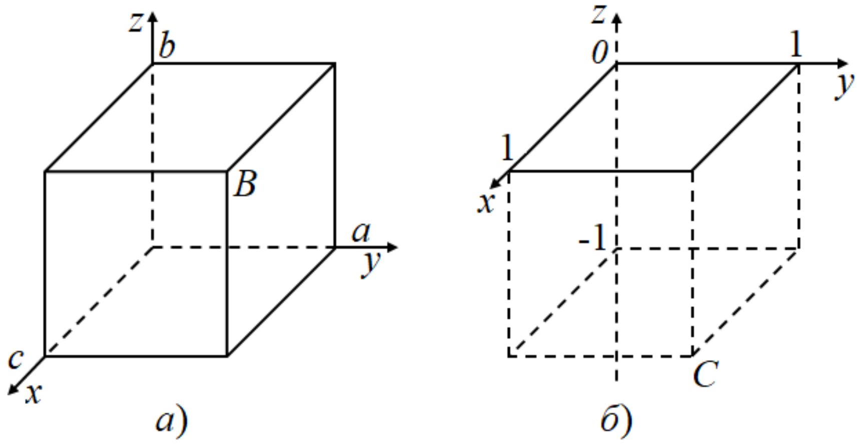


Рис. 360

Можна за трьома числами знайти положення точки в просторі.

Наприклад, три числа 1, 1,-1 задають положення точки C в просторі (рис. 360, б).

Координати середини відрізка. Відстань між точками

Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ – дві довільні точки площини і $C(x; y)$ – середина відрізка AB (рис. 361). Формули, які пов'язують координати точки C з координатами точок A і B, такі:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Формули правильні й у випадку, якщо відрізок AB паралельний одній з осей координат.

Для точок A, B і C простору ці формули аналогічні.

Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ – дві довільні точки. Формули, які виражають координати x, y, z точки C – середини відрізка AB через координати його кінців A і B, такі:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Існує формула для знаходження відстані між точками, заданими своїми координатами.

Якщо точки $A_1(x_1; y_1)$ і $A_2(x_2; y_2)$ (рис. 362) лежать на площині, то відстань між A_1 і A_2 знаходиться за формулою:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

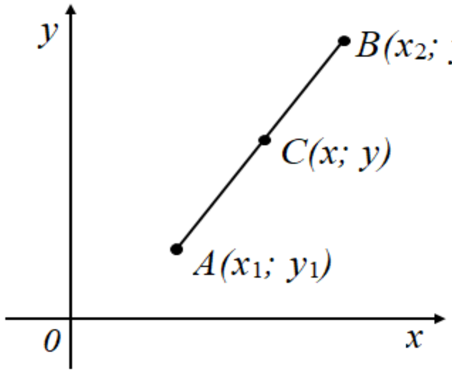


Рис. 361

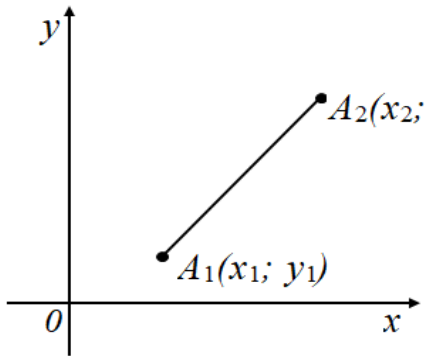


Рис. 362

Ця формула правильна для будь-якого розміщення точок A_1 і A_2.

Відстань між двома точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$ простору знаходиться за формулою:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

9.2 Рівняння фігур на площині

Рівняння кола

Рівнянням фігури на площині в декартових координатах називається таке рівняння з двома змінними x і y, при якому координати будь-якої точки фігури будуть розв'язком цього рівняння. І навпаки, будь-які два числа, які задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Коло з центром $A_0(a; b)$ і радіусом R (рис. 363) задається рівнянням

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Якщо центром кола є початок координат, то рівняння кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

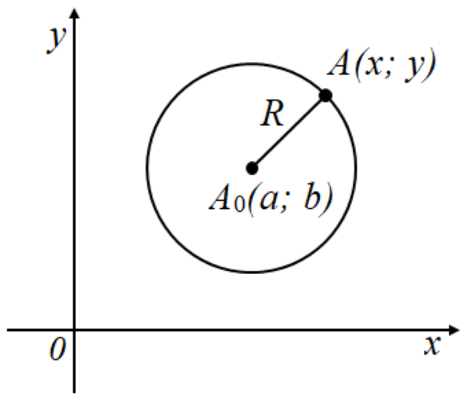


Рис. 363

Перетин двох кіл

На рис. 364 дано два кола з центрами O і O_1, відстанню між центрами $OO_1 = c$ і радіусами, які відповідно дорівнюють a і b. Приймемо точку O за початок координат, а півпряму OO_1 за додатну піввісь x. Тоді рівняння кіл такі:

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad (x - c)^2 + y^2 = b^2.$$

Розв'язавши систему цих рівнянь, можна зробити висновок: якщо одне з чисел a, b, c більше суми двох інших, то кола не мають спільної точки (рис. 364, *а*, *б*); якщо одне з цих чисел дорівнює сумі двох інших, то кола дотикаються (рис. 364, *в*, *г*); якщо кожне з цих чисел менше суми двох інших, то кола мають дві спільні точки, тобто перетинаються (рис. 364, *д*).

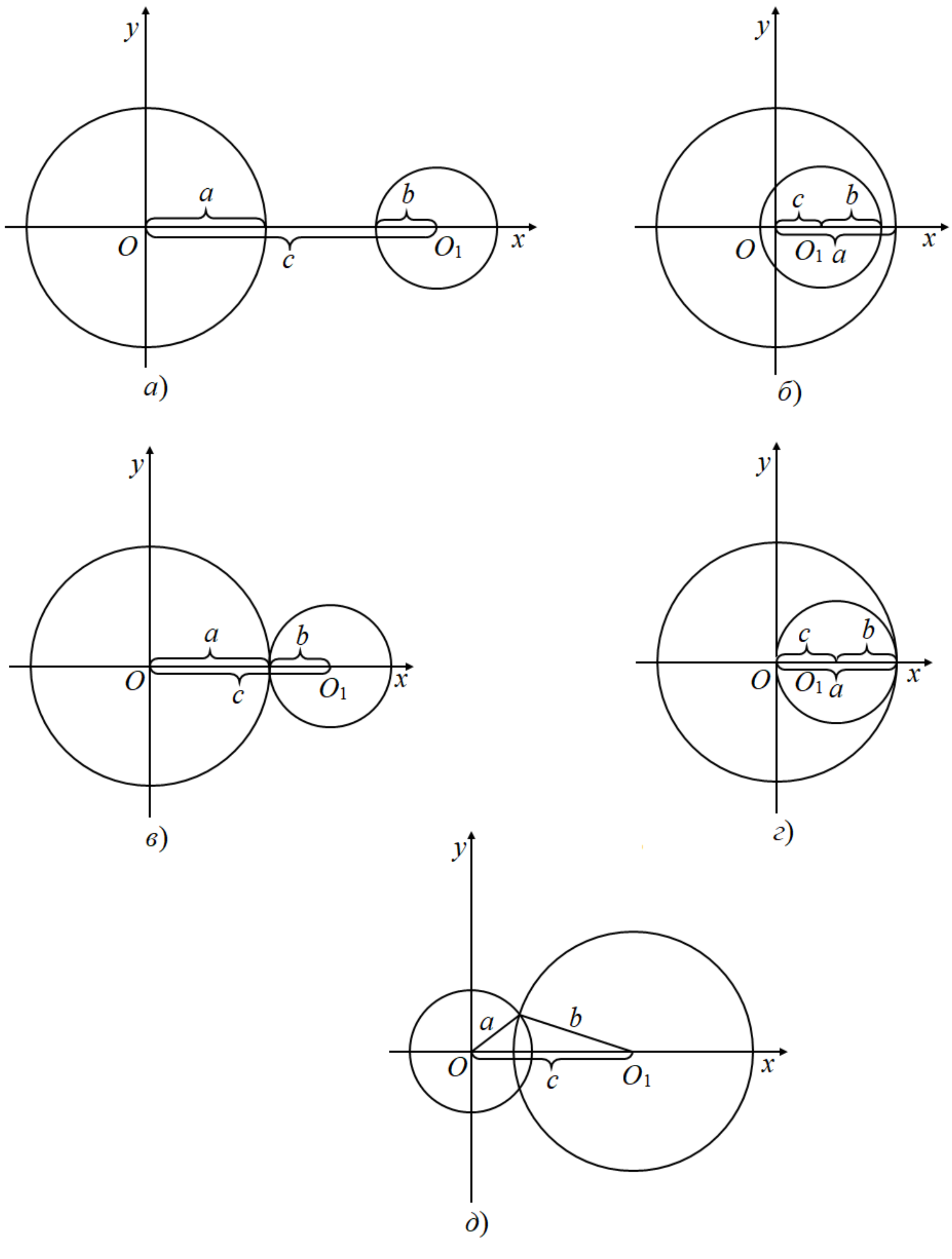


Рис. 364

Рівняння прямої

Будь-яка пряма в декартових координатах на площині задається рівнянням

$$ax + by + c = 0.$$

Коефіцієнти a і b в цьому рівнянні можуть набувати різного значення. В залежності від цього пряма буде порізному розміщуватися на площині. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. $a = 0,\ b \neq 0$. В цьому випадку рівняння прямої можна записати так: $y = -\frac{c}{b}$. Всі точки мають одну й ту саму ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$, отже, пряма паралельна осі x (рис. 365, *а*).

Наприклад, якщо $c = 0$, то пряма співпадає з віссю x.

2. $b = 0,\ a \neq 0$. В цьому випадку рівняння набуває вигляду $x = -\frac{c}{a}$. Пряма паралельна осі y (рис. 365, *б*) або співпадає з нею, а якщо $c = 0$.

3. $c = 0$. Рівняння набуває вигляду $ax + by = 0$. Пряма проходить через початок координат (рис. 365, *в*).

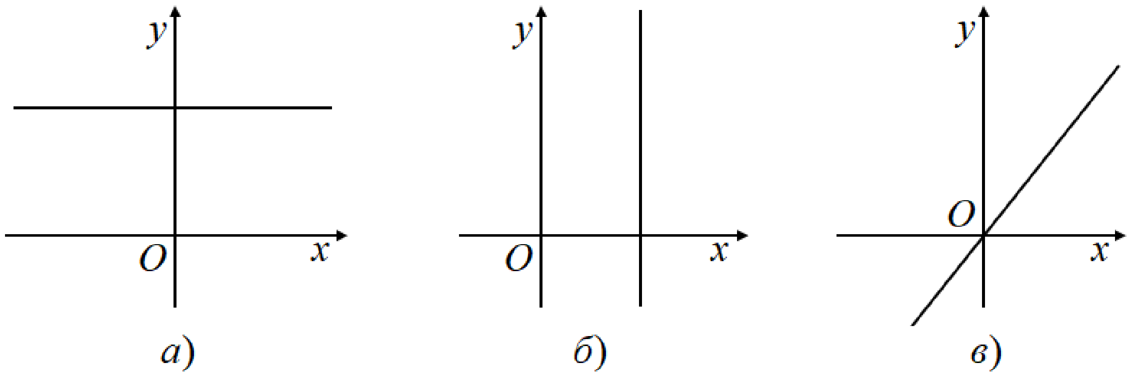


Рис. 365

Якщо в рівнянні прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт $b \neq 0$, то можна записати $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k,\ -\frac{c}{b} = q$, отримаємо $y = kx + q$. Коефіцієнт k в цьому рівнянні називається *кутовим коефіцієнтом прямої*.

На рис. 366 точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ належать зображеним прямим, а значить,

$$y_1 = kx_1 + q, \qquad y_2 = kx_2 + q.$$

Віднімаючи з другої рівності першу, отримуємо

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

звідки $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

У випадку, зображеному на рис. 366, *а*,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

У випадку, зображеному на рис. 366, *б*,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

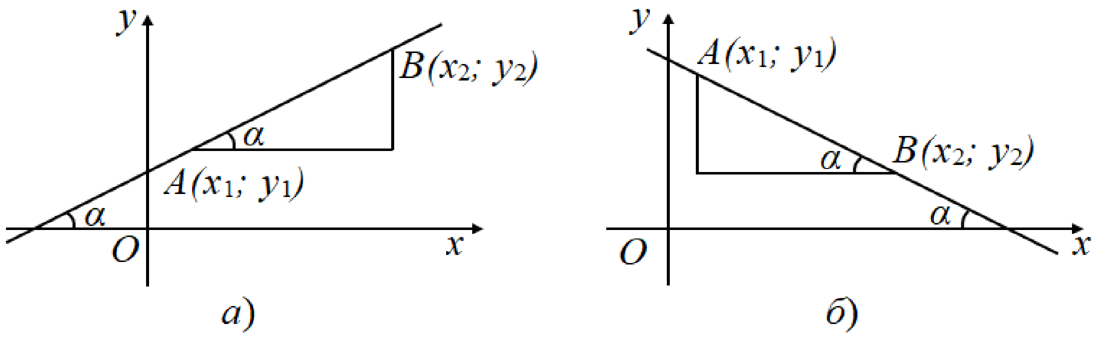


Рис. 366

Кутовий коефіцієнт прямої має такий геометричний зміст: коефіцієнт k в рівнянні прямої з точністю до знаку дорівнює тангенсу гострого кута, який утворює пряма з віссю x.

Перетин прямої і кола

На рис. 367 зображене коло радіусом R і пряма a, d – відстань від центра цього кола до прямої a. Якщо прийняти центр кола за початок координат, а пряму, перпендикулярну прямій a, за вісь x (рис. 368), то рівняння кола і прямої такі $x^2 + y^2 = R^2$, $x = d$. Розв'язуючи отриману систему, знайдемо $x = d$, $y = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$. Коло і пряма мають дві спільні точки, тобто перетинаються, якщо $R > d$ (рис. 368, *а*); пряма і коло мають одну спільну точку, тобто дотикаються, якщо $R = d$ (рис. 368, *б*); пряма і коло не перетинаються, якщо $R < d$ (рис. 368, *в*).

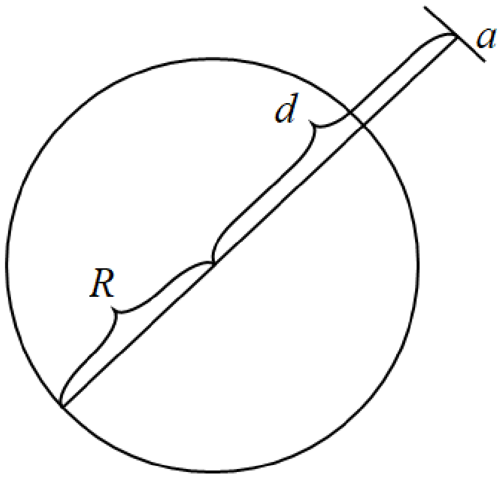


Рис. 367

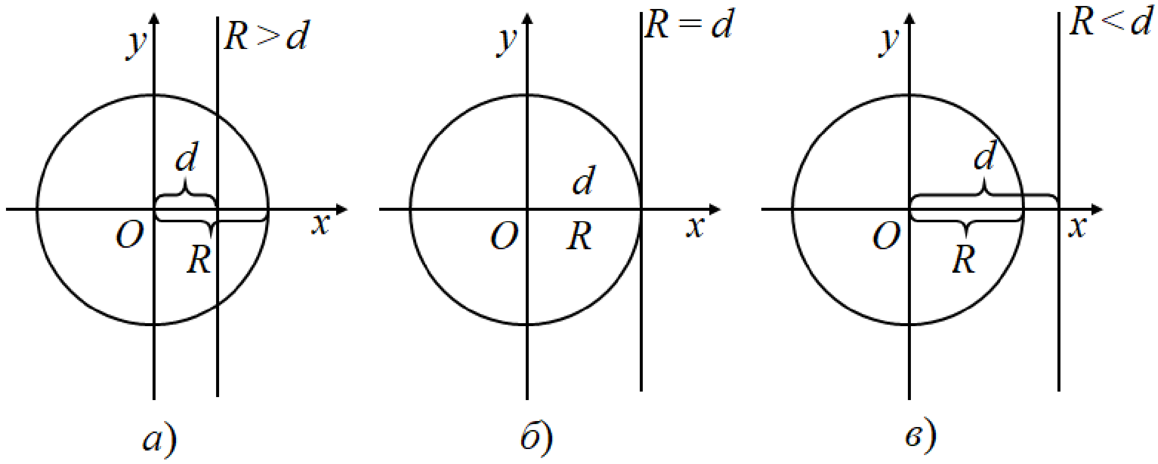


Рис. 368

9.3 Рівняння фігур в просторі

Рівняння площини

Рівняння фігури в просторі визначається так само, як і на площині.

Нехай $A_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка площини α і $\bar{n}(a; b; c)$ – вектор, перпендикулярний цій площині (рис. 369). Нехай $A(x; y; z)$ – довільна точка площини α, тобто $\overline{AA_0} \perp \bar{n}$, тоді $\overline{AA_0} \cdot \bar{n} = 0$. Координати точки A задовольняють рівняння

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

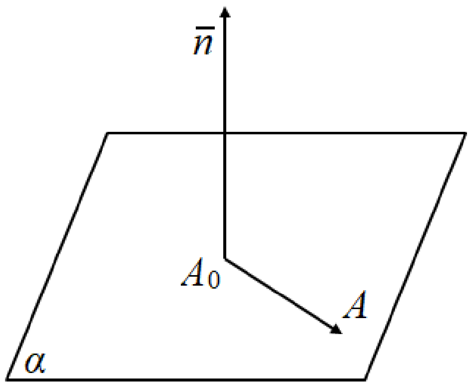


Рис. 369

Вірно і те, що коли точка $A(x; y; z)$ задовольняє попереднє рівняння, то точка A лежить в площині α. Таким чином, рівняння є рівнянням площини α. Рівняння площини можна записати у вигляді

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Коефіцієнти a, b, c в цьому рівнянні є координатами вектора, перпендикулярного до цієї площини.

Рівняння сфери

Нехай центр сфери знаходиться в точці $A(a; b; c)$, а радіус сфери дорівнює R. Точками сфери є ті і тільки ті точки простору, відстань від яких до точки A дорівнює R. Квадрат відстані від будь-якої точки $B(x; y; z)$ сфери до точки A дорівнює $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$. Тому *рівняння сфери* з центром в $A(a; b; c)$ і радіусом R має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Сфера з центром $(2; -1; 3)$ і радіусом 5 задається рівнянням

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

Якщо центром сфери є початок координат, то рівняння сфери з радіусом R таке:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Куля задається не рівнянням, а нерівністю. Розглянемо кулю з центром $A(a; b; c)$ і радіусом R. За означенням кулі їй належать всі такі точки M, для яких $AM \leq R$ тобто $AM^2 \leq R^2$. Враховуючи, що $A(a; b; c)$, а $M(x; y; z)$, отримаємо

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$$

Якщо центр кулі знаходиться на початку координат, то нерівність така:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Аналогічно круг радіусом r в прямокутних координатах на площині з центром $A(a; b)$ або на початку координат задається нерівністю

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 \text{ або } x^2 + y^2 \leq r^2.$$

Взаємне розміщення сфери і площини

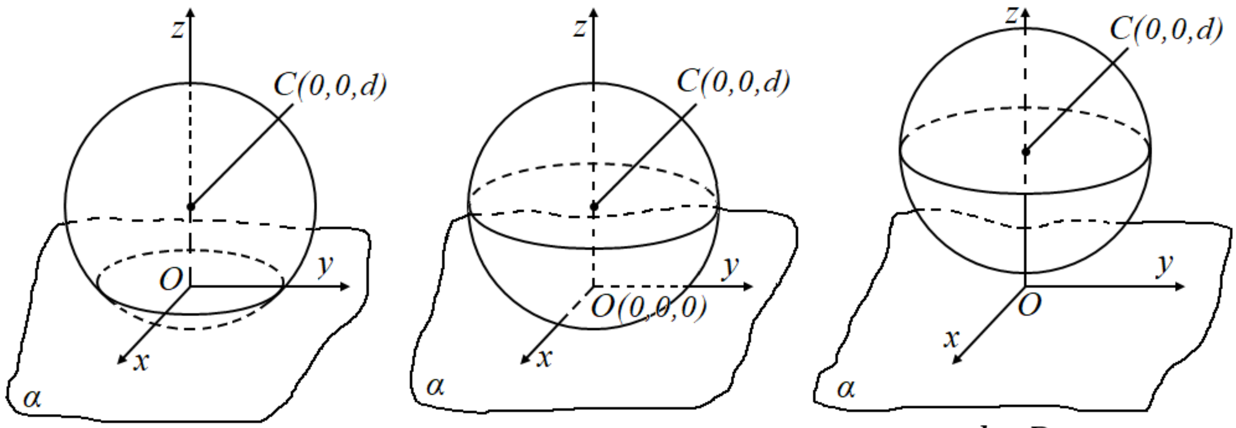
Нехай дана сфера радіусом R, а відстань від її центра C до площини α дорівнює d. Введемо систему координат так, як показано на рис 5.13: площина xy співпадає з площиною α, а центр C сфери лежить на осі z. В цій системі координат точка C має координати $(0; 0; d)$, тому рівняння сфери таке:

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2.$$

Площина α співпадає з координатною площиною xy, тому її рівняння $z = 0$.

Якщо координати якої-небудь точки $M(x; y; z)$ задовольняють обидва рівняння, то точка M лежить як в площині α, так і на сфері, тобто є спільною точкою площини і сфери. Якщо ж система цих двох рівнянь не має розв'язків, то сфера і площина не мають спільних точок. Таким чином, питання про взаємне розміщення сфери і площини зводиться до дослідження системи рівнянь

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2. \end{cases}$$



$d<R \cdot r=\sqrt{R^2-d^2}$ $\quad$ $d=R$ $\quad$ $d>R$

а) *б*) *в*)

Рис. 370

Можливі три випадки:

1. $d < R$. Система має нескінченну множину розв'язків, усі точки лежать на колі.

Висновок: якщо відстань від центра сфери до площини менша радіуса сфери, то переріз сфери площиною є коло (рис. 370, *а*).

2. $d = R$. Система має єдиний розв'язок.

Висновок: якщо відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери, то сфера і площина мають єдину спільну точку – точку дотику (рис. 370, *б*).

3. $d > R$. Система не має розв'язків.

Висновок: якщо відстань від центра сфери до площини більша радіуса сфери, то сфера і площина не мають спільних точок (рис. 370, *в*).

Перетин двох сфер

Щоб знайти умови перетину двох сфер приймемо пряму, яка сполучає їх центри, за вісь x. Нехай точка $A(a;0;0)$ – центр першої сфери, а R_1 – її радіус. Точка $B(b;0;0)$ – центр другої сфери, а R_2 – її радіус. Рівняннями сфер будуть

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2 \text{ і } (x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2.$$

Розв'язуючи цю систему, можна зробити висновок:

***Теорема* 72.** Лінія перетину двох сфер є коло.

Література

1. Математика для вступників до вузів. Навч. Посібник / Упоряд. Бондаренко М.Ф., Дікарєв В.А., Мельников О.Ф., Семенець В.В., Шкляров Л.Й. – Харків: «Компанія СМІТ», 2002. – 1120 с.
2. Алгебра і початки аналізу: Навч. посібник для учнів проф.-техн. Навчальних закладів. – Київ.: Техніка, 2000. – 544 с.
3. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. І. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – Київ.: Либідь, 1994. – 280 с.
4. Математика. Пособие для пед. ин-тов / В.Н. Боровик, Л.Н. Вивальнюк, В.Н. Костарчук, Ю.В. Костарчук, З.Г. Шефтель. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980, 400 с.
5. Математика. Множини. Логіка. Цілі числа: Практикум / В.М. Кухар, С.І. Тадіян, В.П. Тадіян. За заг. ред. В.М. Кухар. – Київ: Вища школа. Головне вид-во, 1989. – 333 с.
6. В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, А.В. Рудник. Математика. Практикум. Частина І. Навчальний посібник. – Чернігів, 2003. – 126 с.
7. В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, А.В. Рудник. Математика. Практикум. Частина 2. Навчальний посібник. – Чернігів, 2004. – 164 с.
8. Романишин Р.Я. Розширення поняття про число. Раціональні числа. Дійсні числа (Методичні рекомендації для студентів спеціальності “Початкове навчання”) / Івано-Франківськ: Видавець Кушнір Г.М. – 2010. – 36 с.
9. Коберник Г.І., Чирва Г.М. Математика. Практикум. Ч 1. – Умань: ФОП Жовтий О. О., 2013. – 193 с.
10. Матеріал до занять з основ початкового курсу математики: Навчальний посібник для студентів ВНЗ І-ІІ рівнів акредитації спеціальності: 501010201 «Початкова освіта» 2-е вид. перероблене і доповнене/ укладач Г.Г. Домашевська. – ч.ІІ – м. Корсунь – Шевченківський, 2017.