

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка

Кафедра фізико-математичної освіти та інформатики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

**ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ФУНКЦІЇ,
ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ» У 10-МУ КЛАСІ**

Виконав:

Афанасенко Іван Сергійович
студент 62ММ групи
спеціальності 014 Середня
освіта спеціалізації 014.04
Середня освіта (Математика)

Науковий керівник:

Кухарчук Роман Павлович

Допущено до захисту

« » _____ 2023 р.

Завідувач кафедри

_____ (підпис)

_____ (ініціали, прізвище)

Дата захисту « » _____ 2023 р.

Оцінка _____

Підписи членів ЕК:

Глухів 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ I. МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ» У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	6
1.1 Тема "Функції, їхні властивості та графіки" та її відображення у навчальній програмі.....	6
1.2 Основні поняття теми "Функції, їхні властивості та графіки"...	12
1.3 Аналіз навчальних підручників із теми "Функції, їхні властивості та графіки".....	26
1.4. Методичні особливості вивчення теми "Функції, їхні властивості та графіки".....	31
РОЗДІЛ II. МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ» У 10-МУ КЛАСІ	38
2.1. Основні поняття інформаційно-комунікаційних технологій та їх класифікація	38
2.2. Застосування ІКТ у процесі вивчення математики для дослідження функцій	50
2.3. Використання математичних пакетів для дослідження функцій	58
2.4. Методика використання математичного пакета Geogebra у процесі дослідження функцій	60
2.5. Практичні завдання та вправи на дослідження графіків функцій	69
ВИСНОВКИ.....	74
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	77

ВСТУП

Одним із головних пріоритетів, що визначають траєкторію розвитку сучасної освіти, є створення інформаційного середовища, в якому учні можуть розвивати навички самостійного навчання впродовж життя та застосовувати їх у практичній діяльності. У сучасних умовах якість освіти пов'язується з реалізацією компетентнісного підходу, спрямованого на формування в учнів базових компетентностей та предметних навичок. Це створює передумови для визначення практичного спрямування навчання, поетапного управління формуванням результатів навчання учнів та підвищує особисту відповідальність усіх учасників освітнього процесу за якість результатів навчання. Новий підхід ставить питання "як учні вчать", тобто як відбувається освітня діяльність і як вчителі повинні її організувати для досягнення найкращих результатів. Необхідність розвитку сучасного, цифрово-орієнтованого викладання пов'язана з потребою розвитку предметних компетентностей і цілей, найважливішими з яких є когнітивні, комунікативні, організаційні та особистісні.

У сучасному світі цифрові технології проникають в усі сфери життя, включаючи освіту. Використання цифрових технологій в освітньому процесі з математики може розширити можливості учнів для розвитку їх компетенцій у цьому предметі. Це, у свою чергу, сприяє підвищенню якості освіти та кращому розумінню математичних понять та їх практичного застосування в реальному житті.

Проблемі розроблення і впровадження нових інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес, як засвідчує аналіз та дослідження сучасної науково-методичної літератури, присвячена значна кількість наукових праць вітчизняних і зарубіжних учених, серед яких дослідження Бикова В., Жолдака М., Згуровського М., Кухаренко В., Морзе Н., Ракова С. та інших (Україна); Пейперта С., Резніка М. (США).

Питання використання інформаційно-комунікаційних технологій у вивченні іноземної мови розглядали у своїх дослідженнях О. Зимовець, О. Зубов, Л. Карташова, Л. Морська, В. Редько, Ю. Гапон, В. Ніколаєва, В. Ляудіс, Є. Маслико, Е. Носенко, О. Палий, К. Brucher, M. Collins, M. Simonson, A. Thompson та інші науковці.

Актуальність теми магістерської роботи "Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки»" може бути виправдана кількома чинниками.

У сучасному світі інформаційно-комунікаційні технології знаходяться в центрі уваги. Інструменти, такі як комп'ютери, програми для математичного моделювання та графічні редактори, стали потужними засобами для дослідження та вивчення математичних концепцій, зокрема функцій.

Використання інтерактивних методів навчання та візуалізація математичних концепцій може сприяти підвищенню інтересу студентів до математики. Робота з інформаційно-комунікаційними технологіями може зробити вивчення функцій більш привабливим та зрозумілим.

Знання про функції та їхні властивості мають велике практичне застосування в різних галузях, таких як інженерія, фізика, економіка, комп'ютерні науки тощо. Володіння навичками використання інформаційно-комунікаційних технологій у цьому контексті може бути корисним для магістрів, які планують працювати у цих галузях.

Магістерська робота у цій області може включати в себе дослідження ефективності різних інструментів та методів навчання математиці за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій. Це може призвести до розробки нових підходів до викладання та навчання математиці.

Роботодавці в цифровій епосі цінують фахівців, які володіють навичками використання інформаційних технологій. Магістри, які можуть комбінувати математичні знання із сучасними технологіями, можуть бути більш конкурентоспроможними на ринку праці.

Отже, тема магістерської роботи про застосування інформаційно-комунікаційних технологій у вивченні функцій є актуальною і має потенціал для сприяння розвитку освіти, підвищення інтересу студентів до математики і підготовки кваліфікованих фахівців для різних галузей.

Об'єкт дослідження: процес навчання алгебри і початків аналізу у 10 класі в закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО).

Предмет дослідження: процес вивчення теми "Функції, їхні властивості та графіки" учнями 10 класу в ЗЗСО з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Метою дослідження є упровадження ефективних методів та підходів у застосуванні інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного вивчення теми "Функції, їхні властивості та графіки" учнями 10 класу в ЗЗСО.

Завдання дослідження:

1. Проведення аналізу наявних інформаційно-комунікаційних технологій та програмних засобів, які можна використовувати для вивчення функцій, їхніх властивостей та графіків.

2. Дослідити зміст теми "Функції, їхні властивості та графіки" та її місце у навчальній програмі з алгебри і початків аналізу у 10 класі ЗЗСО.

3. Розробка дидактичних матеріалів та методик, які базуються на інформаційно-комунікаційних технологіях для підвищення ефективності вивчення теми "Функції, їхні властивості та графіки".

4. Розробка методичних рекомендацій для вчителів щодо використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення учнями 10 класу теми "Функції, їхні властивості та графіки".

Методи дослідження. Для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань у процесі роботи використовувалися теоретичні, загально-методологічні та емпіричні методи і прийоми дослідження: аналіз та синтез, порівняння, узагальнення, моделювання, спостереження.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

РОЗДІЛ І

МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ» У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Тема "Функції, їхні властивості та графіки" та її відображення у навчальній програмі

У державних документах [12, 13, 32] визначаються освітні вимоги до учнів і випускників основної та середньої школи та державні гарантії їх виконання. Прийняті національні стандарти освіти впроваджуються в практику загальноосвітніх навчальних закладів через навчальні плани і програми, підручники, посібники, навчально-методичні матеріали, затверджені Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України. В її успішній реалізації важливу роль відіграють науково-методичні надбання вітчизняних і зарубіжних учених.

Особливо важливо окреслити методологічні засади стратегії оновлення змісту освіти. Національні стандарти: забезпечення створення єдиного освітнього простору; посилення регулюючої ролі школи в системі безперервної освіти; забезпечення еквівалентності різних форм здобуття загальної середньої освіти; узгодження змісту шкільної освіти з потребами та викликами часу. Національний розвиток Покращення умов для навчання хімії.

Нові державні стандарти ґрунтуються на особистісно-орієнтованому, компетентнісному та діяльнісному принципах, що застосовуються в освітній галузі та відображені в результативних складових змісту базової і повної загальної середньої освіти.

Ключові компетентності включають вміння вчитися та спілкуватися державною, рідною та іноземними мовами, математичні та фундаментальні компетентності в природничих науках і технологіях, інформації та

комунікації, суспільства, громадянства, загальної культури, підприємництва та предметні (галузеві) компетентності включають комунікативну, літературну, мистецьку, міждисциплінарну естетику, природничі науки та математику, проектні технології та ІКТ, суспільствознавство, історичну компетентність.

Діяльнісний підхід спрямований на розвиток умінь і навичок учнів, на застосування набутих знань у реальних ситуаціях, на пошук шляхів інтеграції в соціокультурне та природне середовище.

Державні стандарти враховують вірогідність освітнього середовища, сприятливого для задоволення фізичних, соціокультурних і пізнавальних потреб учнів [13].

Метою навчання математики в математичних, фізико-математичних та математичних профільних класах є забезпечення загальної математичної освіти, необхідної для успішної самореалізації та соціалізації особистості в динамічному соціальному середовищі, успішного вивчення фізики та інших переважно природничих предметів, а також достатньої математичної освіти для продовження навчання за спеціальностями, безпосередньо пов'язаними з математикою у вищих навчальних закладах, або за спеціальностями, де математика слугує інструментом для навчання.

Навчання математики в класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів вимагає всебічної математичної освіти, органічно поєднаної з вивченням усіх природничих предметів та міжпредметної інтеграції на основі використання математичних методів, зокрема методів математичного моделювання. При цьому викладання математики та природничих дисциплін у класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів має бути орієнтоване як на обов'язкове засвоєння учнями певних знань, так і на розвиток їхніх навичок моделювання реальних процесів. Слід також враховувати, що розвиток природничо-наукової компетентності є частиною загальнонаукової компетентності, загально-

навчальної компетентності та соціальної компетентності людини із залученням гуманітарних та соціально-економічних дисциплін.

Основним принципом, що визначає структуру математичної освіти на математичному, фізико-математичному та фізико-математичному профілях, є моделювання елементів діяльності математика в навчальному процесі. Старшокласники мають навчитися використовувати математику як інструмент для отримання нових знань, нових наукових або прикладних результатів та розв'язування прикладних задач.

Математика посідає особливе місце в системі людських знань і слугує універсальним та потужним методом сучасної науки. Тому особливу увагу слід приділяти з'ясуванню ролі математики в прикладних галузях. Зокрема, слід дати учням ґрунтовне уявлення про математичне моделювання та навчити їх застосовувати його до широкого кола прикладних задач, у тому числі фізичних. Приділення більшого часу преалгебрі та алгебрі, ніж на академічному рівні, дозволило б забезпечити більш поглиблене викладання як на математичному, так і на професійному рівнях, включаючи задачі з математичним і фізичним змістом, а також прикладні задачі в таких галузях, як інженерія, енергетика, атомна фізика, екологія та економіка.

У курсі "Початки алгебри і початки аналізу", оскільки однією з основних змістових областей є функції, особлива увага приділяється вивченню властивостей функцій у тій чи іншій формі. Важливо показати зв'язки між функціями, рівняннями та нерівностями, які є ключовими поняттями курсу.

Зокрема, розв'язання рівняння $f(x)=0$, нерівностей $f(x)>0, f(x)<0$, є окремими випадками задачі на дослідження функції $y=f(x)$ (знаходження нулів функції та проміжків її знакосталості). Також зауважте, що функції моделюють реальні процеси, тому в уявленні учнів має асоціюватися характер реального процесу із відповідною функцією, її графіком та властивостями. Наприклад, змінювання маси радіоактивної речовини має викликати уявлення про функцію $m=m_0 e^{-kt}$ ($k>0$). Важливо, щоб

притаманні явищу властивості (наприклад, зменшення чи збільшення маси, розпад речовини з часом) пов'язувались із властивостями функцій (спадання, зростання, прямування до нуля, коли $t \rightarrow \infty$). Доцільно особливу увагу приділити показниковій функції, яка широко використовується при моделюванні процесів і явищ навколишнього світу [32].

Робота з графіками, діаграмами та кресленнями посідає важливе місце в діяльності фахівців технічних і природничих наук. Тому при вивченні функцій особливу увагу слід приділяти формуванню вмінь визначати властивості функцій за їх графіками, будувати графік заданої функції за аналітичними формулами у вигляді таблиць та експериментальними даними, а також виконувати геометричні перетворення графіка. Учнів слід навчити визначати за графіком функції неперервність, точки розриву, проміжки зростання і спадання, знакосталості, максимуми і мінімуми.

Тема "Функції, їхні властивості та графіки" є важливою складовою математичної освіти учнів 10 класу. Розуміння функцій та їх властивостей є ключовим для подальшого вивчення математики і додаткових наукових дисциплін. Крім того, вивчення графіків функцій допомагає учням розвивати вміння візуалізації та аналізу даних, що є важливими у сучасному світі.

Мета вивчення теми:

- Ознайомити учнів із поняттями функції, їх визначенням та властивостями.
- Навчити учнів будувати графіки функцій та розуміти їхні основні характеристики.
- Розвивати аналітичні та візуальні навички учнів.
- Застосовувати отримані знання для розв'язання практичних задач.

Методичні підходи:

1. Інтерактивність. Використання інтерактивних методів навчання, таких як віртуальні лабораторії та комп'ютерні програми для побудови графіків, може сприяти кращому розумінню матеріалу.

2. Порівняльний аналіз. Порівняльний аналіз різних функцій (лінійних, квадратичних, експоненціальних тощо) допомагає учням розуміти їхні властивості та особливості.

3. Застосування реальних задач. Включення реальних прикладів і задач, які вимагають використання функцій та їх графіків, може збільшити зацікавленість учнів.

4. Розвиток аналітичних навичок. Вправи на аналіз графіків, виявлення точок перетину та визначення властивостей функцій допомагають розвивати критичне мислення учнів.

5. Оцінка та контроль. Оцінювання зазвичай включає в себе тестування, практичні завдання з побудови графіків, вирішення задач та домашні завдання. Важливо також проводити систематичні перевірки знань та сприяти активній участі учнів у процесі навчання.

Отже, тема "Функції, їхні властивості та графіки" є важливою для формування математичної грамотності учнів і розвитку їхніх навичок розв'язування реальних завдань. Ефективне викладання цієї теми вимагає використання різноманітних методичних підходів та інтерактивних засобів навчання.

Навчальна програма з математики для 10 класу рівня стандарту включає 96 годин навчального матеріалу. На тему "Функції, їхні властивості та графіки" відведено 15 годин.

У процесі вивчення цієї теми учні здобудуть знання про:

Числові функції та їх властивості. Способи задання функцій. Парні та непарні функції.

Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня, його властивості.

Степінь з раціональним показником, та його властивості

Степеневі функції, їхні властивості та графіки.

Під час вивчення цієї теми учні повинні:

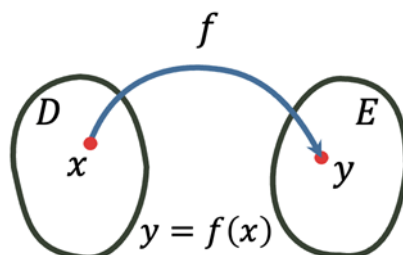
- **користуватися** різними способами задання функцій;
- **знаходити** область визначення функціональних залежностей; значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення;
- **встановлювати** за графіком функції її основні властивості;
- **встановлювати** властивості функцій;
- **обчислювати** та порівнює значення виразів, які містять степені з раціональними показниками, корені;
- **розпізнавати** та схематично зображує графіки степеневих функцій;
- **моделювати** реальні процеси за допомогою степеневих функцій [32].

Учні вивчають новий матеріал, розвивають навички розв'язання проблем, узагальнюють і систематизують знання, контролюють і перевіряють свої знання. При цьому шкільні лекції, семінари, практичні заняття, нетрадиційні форми навчання (динамічні слайд-лекції, дидактичні ігри, лекції "однієї проблеми" та "однієї ідеї") використовуються ширше, ніж академічна математика, математичні "батли", інтегровані курси з математики та фізики. Вони поєднують вивчення основ алгебри та аналізу з опрацюванням (у тому числі за допомогою комп'ютера) даних експериментів і додатків з фізики, астрономії, хімії, біології тощо. Можливі також різні індивідуальні або групові види діяльності, наприклад, звітування про результати "пошуку" на сторінках книг, журналів і веб-сайтів або "заповнення підручника". Рекомендується залучати до процесу навчання університетських викладачів, науковців та експертів.

1.2. Основні поняття теми "Функції, їхні властивості та графіки"

Вивчення починається із актуалізації опорних знань.

Функція – це таке правило, за якого кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає єдине значення залежної змінної.



Область визначення функції f – це множина тих значень, яких може набувати аргумент x .

Область значень функції f – це множина, яка складається із всіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення.

Функція називається **числовою**, якщо її область значень і область визначення – числа.

Способи задання функцій

1. Аналітичний

Якщо функцію задано формулою, то її задано аналітично.

Приклади функцій

Площа круга:	$S_{\text{круга}} = \pi r^2$; де r – аргумент, $S(r)$ – функція.
Капітал, що можна отримати, якщо вкласти певну суму грошей на певну кількість років до банку:	$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, де p – сталі відсотки, n – аргумент;
Довільні функції	$y = 8 + \sqrt{2}$

$$y = \frac{x - 3}{x + 7}$$

2. Табличний

Час завантаження файлу залежить від розміру файлу та швидкості передачі даних. Задамо цю залежність за допомогою таблиці для різних значень швидкості завантаження.

Розмір файлу, Мб	400 Мб	700 Мб	1000 Мб
Час завантаження при швидкості 100 кбіт/с	9 год 9 хв 15 с	16 год 18 хв 41 с	23 год 18 хв 7 с

Розмір файлу, Мб	400 Мб	700 Мб	1000 Мб
Час завантаження при швидкості 100 Мбіт/с	33 с	58 с	1 хв 22 с

Розмір файлу, Мб	400 Мб	700 Мб	1000 Мб
Час завантаження при швидкості 1 Гбіт/с	4 с	6 с	8 с

*В таблицях подані *ідеальні дані*, але зазвичай, під час завантаження файлу, швидкість завантаження може зменшуватися, саме тому такі дані зручно зображати за допомогою таблиці або графіка. Схожі дані, де значення функції можуть змінюватися – дані реєстрації температури повітря.

Табличний спосіб дозволяє вказати значення функції тільки для обмеженого набору значень аргументу.

3. Графічний

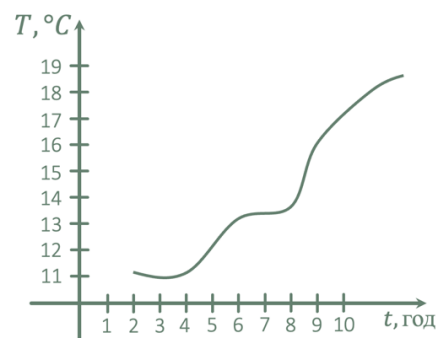
Зміна курсу валюти



Кардіограма



Зміна температури повітря

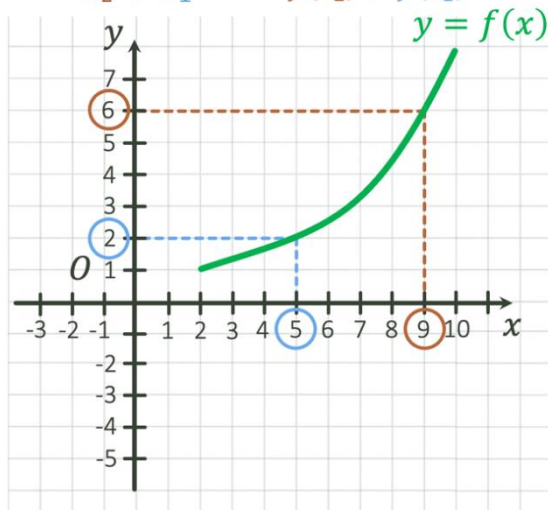


Графічний спосіб дає можливість унаочнити властивості функції

Монотонність функції

Зростаюча функція

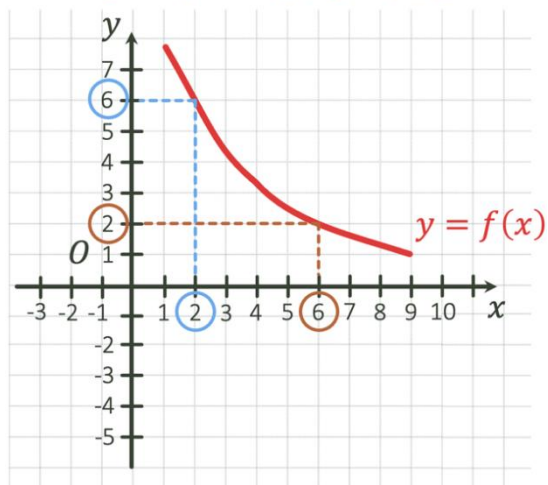
$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$



Функція називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Спадна функція

$$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

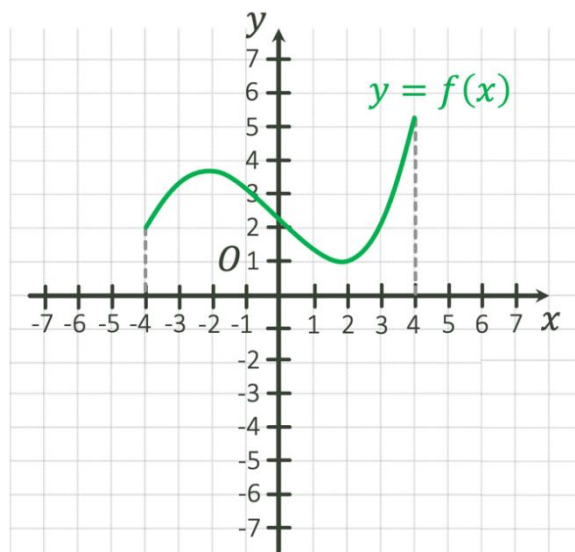


Функція називається спадною, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Функція називається **монотонною** на деякому проміжку, якщо вона на цьому проміжку або зростає, або спадає.

Проміжки зростання або спадання функції називаються **проміжками монотонності**.

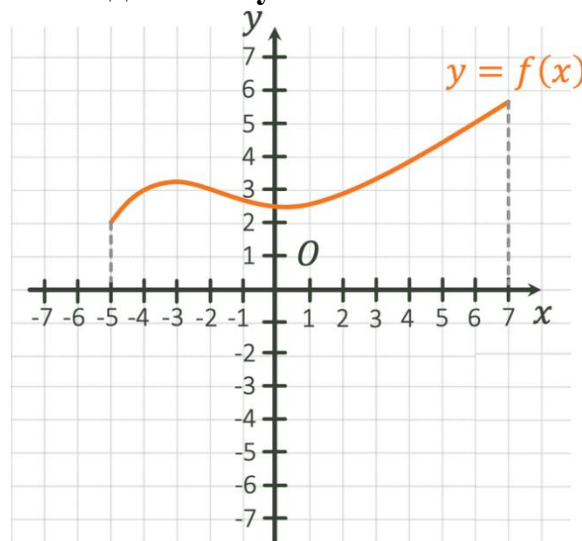
Симетрія області визначення відносно нуля



$$D(y) = (-4; 4)$$

Область визначення **симетрична** відносно нуля.

Для кожного додатного числа x області визначення, міститься також і число $-x$.



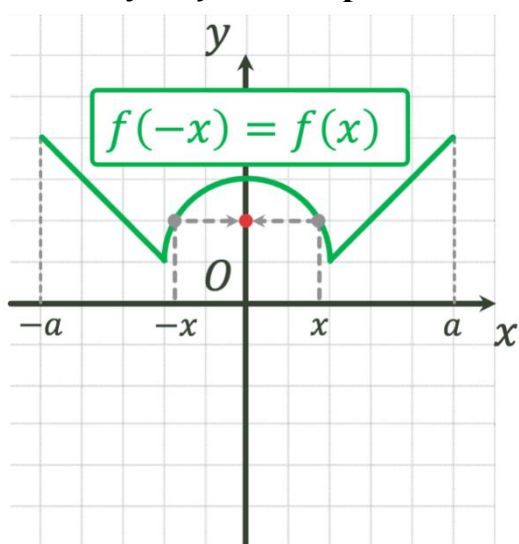
$$D(y) = (-5; 7)$$

Область визначення **несиметрична** відносно нуля.

Для чисел 6 і 7 області визначення не містить чисел -6 і -7 .

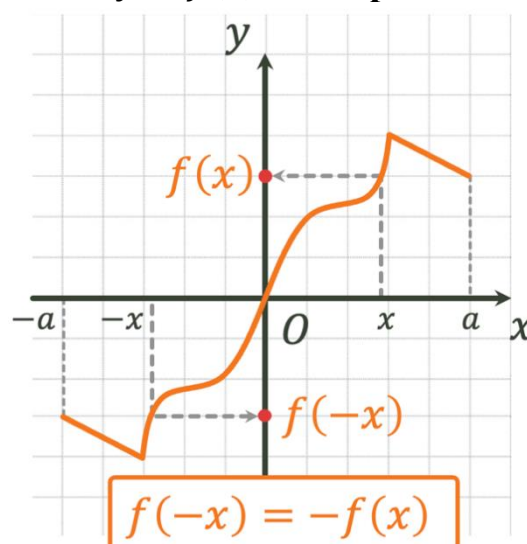
Парність та непарність функцій

$y = f(x)$ - парна



Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (ординат)

$y = f(x)$ - непарна



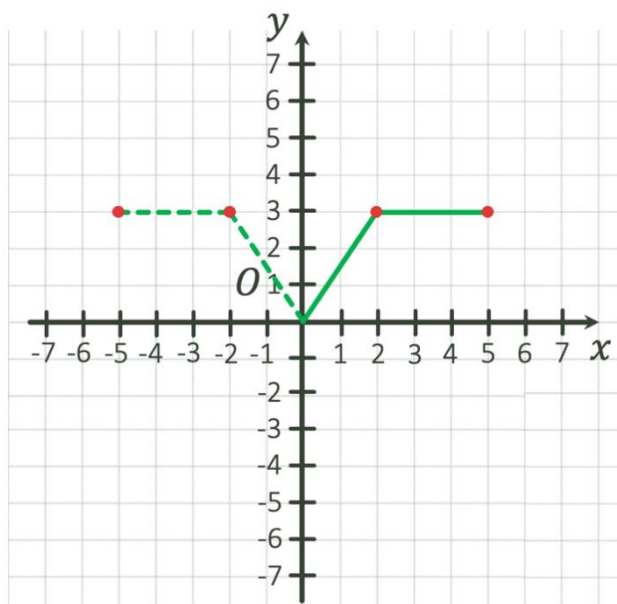
Графік непарної функції симетричний відносно початку координат

Алгоритм дослідження функції на парність і непарність:

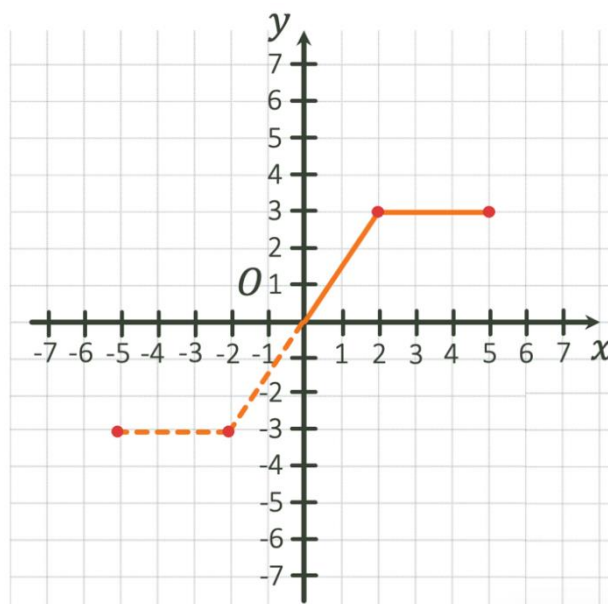
1. Перевірити, чи симетрична область визначення відносно нуля
2. Перевірити виконання умови: $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$

(!) Не будь-яка функція може бути парною або непарною.

Якщо не виконується хоча б одна з умов алгоритму дослідження функції на парність і непарність, то функція є ні парною ні непарною. Кажуть, що вона є *індиферентною*.



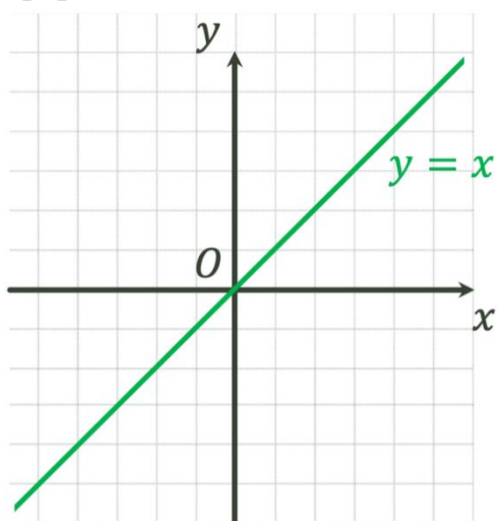
Симетрія відносно осі Oy



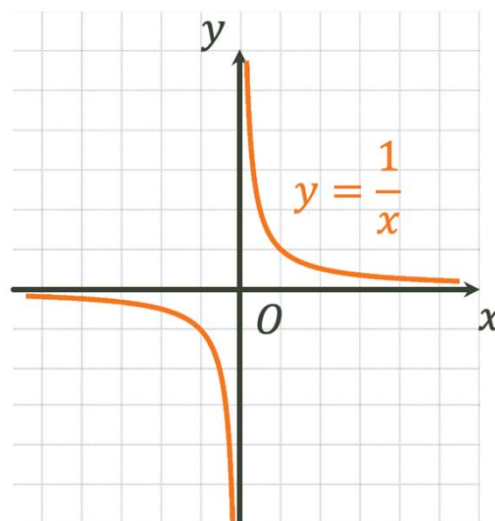
Симетрія відносно початку координат

Неперервність функції

Функція **неперервна на проміжку**, якщо її графік на цьому проміжку – неперервна лінія.



Неперервна на проміжку $(-\infty; +\infty)$



Неперервна на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

Точка $x = 0$ – точка розриву

- Поясніть, чому точка $x = 0$ є точкою розриву для функції $y = \frac{1}{x}$?
(Точка $x = 0$ не належить області визначення даної функції)

Знаходження кореня n – го степеня з числа a

Коренем (алгебраїчним) n -го степеня із числа a називають таке число, n -й степінь якого дорівнює a .

n – показник
кореня

$$\sqrt[n]{a}$$

$\sqrt{\quad}$ – знак
кореня (радикал)
 a – підкореневий
вираз

- Чи може якесь число, відмінне від числа 2, при піднесенні до 4 степеня дати число 16?

$$x^4 = 16$$

Алгебраїчні
корені

$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \sqrt[4]{16} = -2$$

Арифметичний корінь існує тільки для невід'ємного числа і може дорівнювати тільки невід'ємному числу (!)

Арифметичний
корінь

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

Якщо $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, то вираз $\sqrt[n]{a}$ означає арифметичний корінь n -го степеня із числа a .

Знайдіть:

Тотожності для кореня n -го степеня

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

n – не парне $a \in \mathbb{R}$
 n - парне $a \geq 0$

Наприклад:

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$(\sqrt[4]{7})^4 = 7$$

$$(\sqrt[3]{5})^3 = 5$$

$$(\sqrt[8]{-7})^8 = \emptyset$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Тільки для коренів
непарного степеня (!)

Наприклад:

$$\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$$

$$-\sqrt[7]{-4} = \sqrt[7]{4}$$

$$\sqrt[4]{-16} = \emptyset$$

$$(\sqrt[121]{-2})^{121} = -2$$

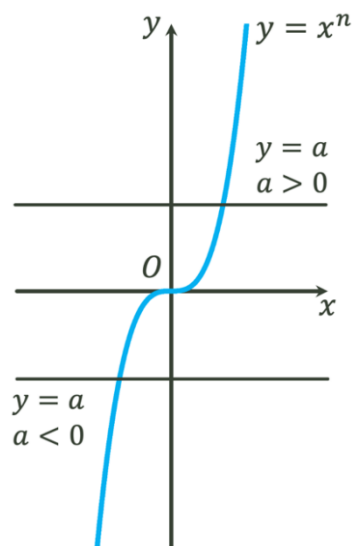
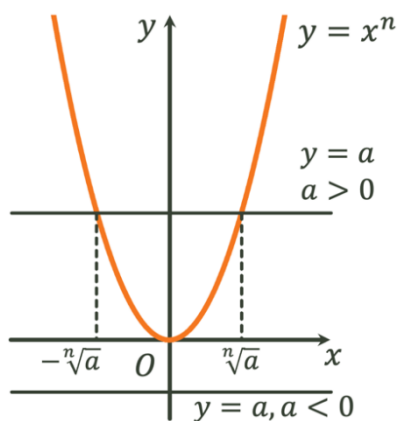
Остання тотожність дає можливість виразити не алгебраїчний корінь з від'ємного числа як алгебраїчний корінь того ж степеня:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

$\sqrt[n]{-a}$ // не алгебраїчний корінь; $-\sqrt[n]{a}$ // алгебраїчний корінь

Рівняння $x^n = a$

$$x^n = a, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$



$$a > 0$$

$$x_1 = \sqrt[n]{a}$$

$$a = 0$$

$$x = 0$$

$a < 0$
Коренів
немає

$$a \in \mathbb{R}$$

$$x = \sqrt[n]{a}$$

$$x_2 = -\sqrt[n]{a}$$

Наприклад:

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

$$x^{12} = 0$$

$$x = 0$$

$$x^4 = -3$$

Коренів
немає

$$x^7 = 5$$

$$x_1 = \sqrt[7]{5}$$

Наприклад:

$$x^{11} = 0$$

$$x = 0$$

$$x^{15} = -8$$

$$x = \sqrt[15]{-8}$$

Властивості арифметичного кореня n – го степеня

$$1) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{якщо } n \text{ – парне} \\ a, & \text{якщо } n \text{ – непарне} \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$$

$$2) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$a \geq 0; b \geq 0$$

$$3) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a \geq 0; b > 0$$

$$4) (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{Z}; a > 0$$

$$5) \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

$$n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}; a \geq 0$$

$$6) \sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$$

$$n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}; a \geq 0$$

Степень з раціональним показником

$$\begin{array}{l} a > 0 \\ m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

➤ Поясніть, як Ви розумієте « $m \in \mathbb{Z}$ » і « $n \in \mathbb{N}$ »?

(В чисельнику можуть бути від'ємні і додатні значення, в знаменнику – тільки додатні)

\mathbb{Z} - цілі числа ... - 3, -2, -1, 1, 2, 3 ...

\mathbb{N} - натуральні числа 1, 2, 3, 4, 5 ...

Наприклад:

$$3^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{3^5};$$

$$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7};$$

$$5^{0,7} = 5^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{5^7};$$

$$4^{-\frac{2}{5}} = 4^{\frac{-2}{5}} = \sqrt[5]{4^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{4^2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{16}}.$$

ВИРАЗИ, ЩО НЕ МАЮТЬ ЗМІСТУ:

$$a < 0$$

$$a = 0; \quad \frac{m}{n} < 0$$

Так як $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$, то має справджуватися рівність:

$$a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{10}}$$

Перевіримо цю рівність для $a = -1$:

$$(-1)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-1} = -1$$

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{2}{10}} &= \sqrt[10]{(-1)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$(-1)^{\frac{1}{5}} \neq (-1)^{\frac{2}{10}}$$

➤ Як на вашу думку, чому вираз « $0^{-\frac{1}{3}}$ » не має змісту?

(учні висловлюють власну думку)

$$0^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0}}$$

На нуль ділити не можна (!)

Властивості степеня з раціональним показником

*Дані властивості аналогічні властивостям степеня з цілим показником

Якщо $a > 0$, $b > 0$, p і q – раціональні числа, то:

$$1) a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

\mathbb{Q} – раціональні числа

$$2) a^p : a^q = a^{p-q}$$

$\frac{3}{5}$ - раціональне число

$$3) (a^p)^q = a^{pq}$$

(Добуток степенів)

$$4) (ab)^p = a^p b^p$$

(Частка степенів)

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

(Степінь степеня)

$$6) a^{-p} = \frac{1}{a^p}; \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$$

(Степінь добутку)

(Степінь частки)

Степенева функція

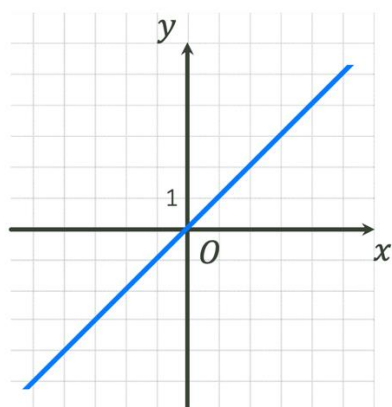
$$y = x^a$$

Степенева функція

a – сталє число

➤ Функція вигляду $y = x^a$, де a – деяке сталє число, називається степеневою

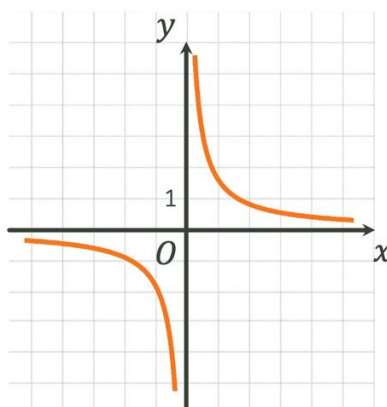
$$y = x^1 = x$$



Пряма пропорційність

(Пряма)

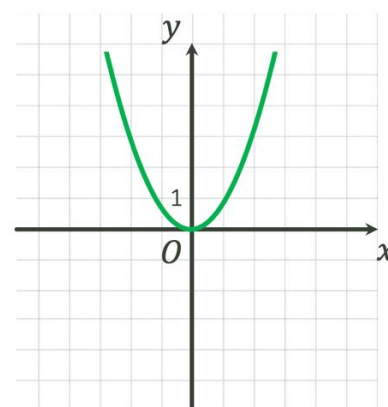
$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$



Обернена пропорційність

(Гіпербола)

$$y = x^2$$



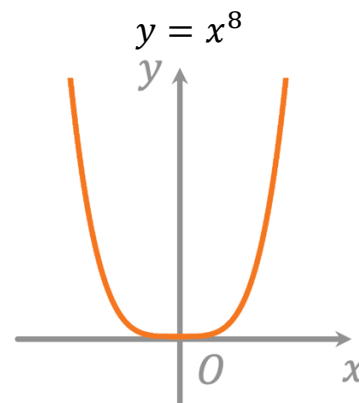
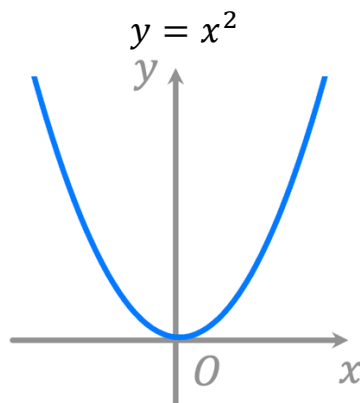
Квадратична залежність

(Парабола)

- Розглянемо випадки для додатних і від'ємних, парних і непарних, цілих і не цілих значень a .

$$y = x^a$$

a – ціле парне
додатне



Властивості

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

$$E(y) = [0; +\infty).$$

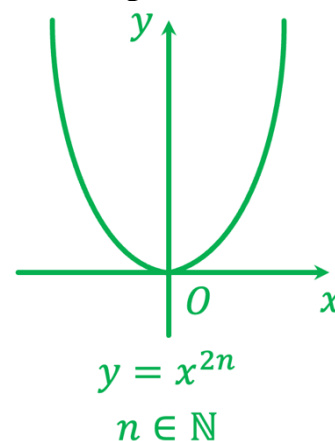
Парність: не парна.

Спадає на проміжку: $x \in (-\infty; 0)$.

Зростає на проміжку: $x \in (0; +\infty)$.

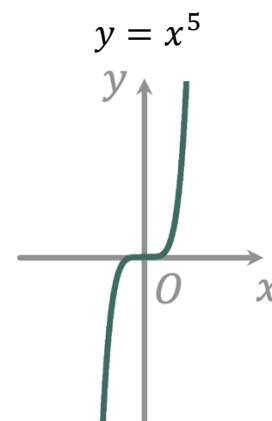
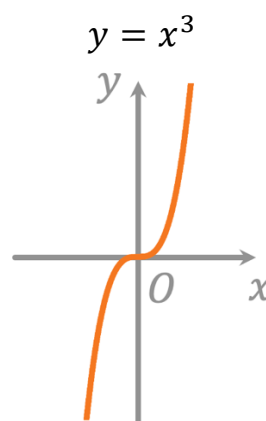
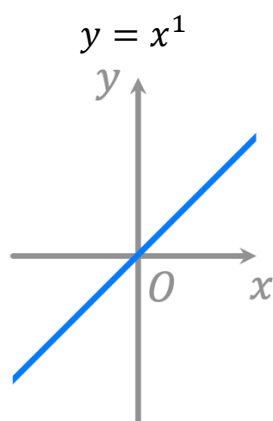
Нулі функції: $x = 0$.

**Схематичне
зображення:**



$$y = x^a$$

a – ціле
непарне
додатне



Властивості

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty).$$

Парність: непарна.

**Схематичне
зображення:**

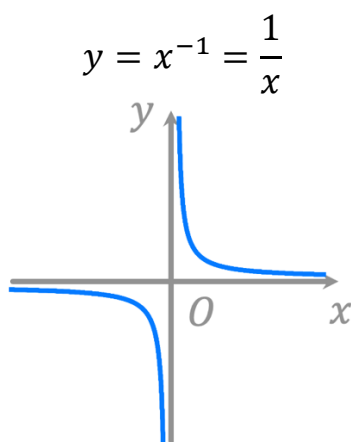


Зростає на проміжку: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Нулі функції: $x = 0$.

$$y = x^a$$

**a – ціле непарне
від'ємне**



Властивості

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

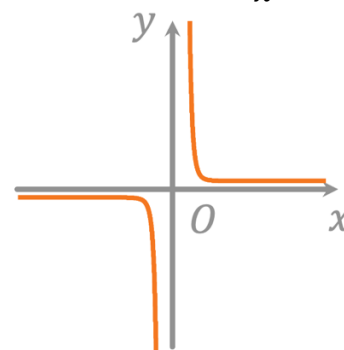
$$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Парність: непарна.

Спадає на проміжку: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Нулі функції: немає.

$$y = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$



Схематичне зображення:

$$y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{(2n-1)}}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

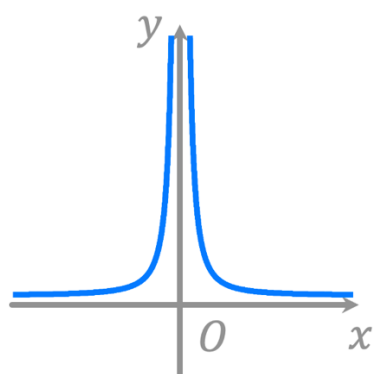
$$y = x^a$$

$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$y = x^{-8} = \frac{1}{x^8}$$



**a – ціле парне
від'ємне**



Властивості

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

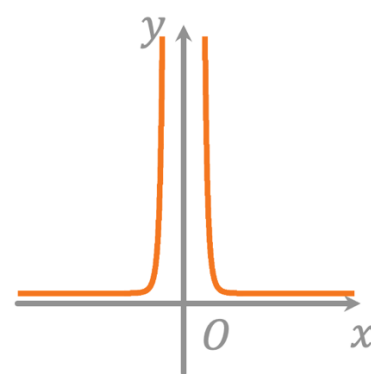
$$E(y) = (0; +\infty).$$

Парність: парна.

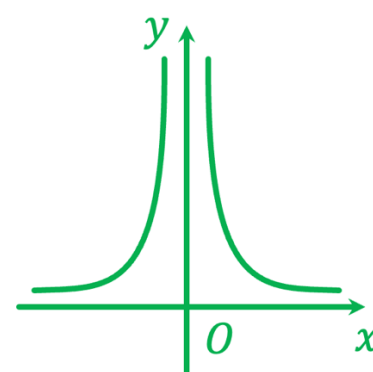
Спадає на проміжку: $x \in (-\infty; 0)$.

Зростає на проміжку: $x \in (0; +\infty)$.

Нулі функції: немає.

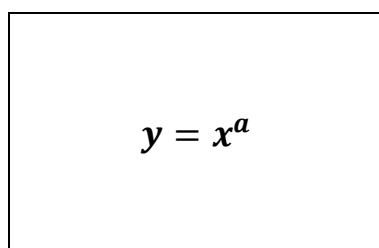


Схематичне зображення:



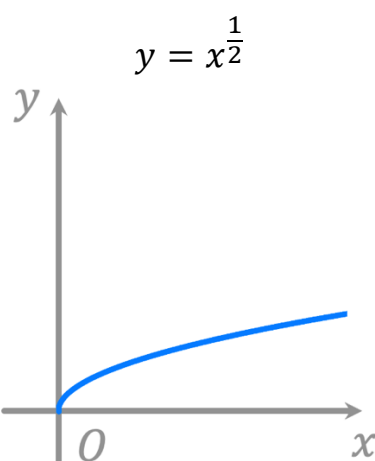
$$y = x^{2n}$$

$$n \in \mathbb{N}$$



$$y = x^a$$

a – неціле додатне

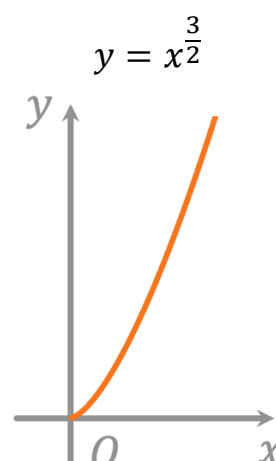


Властивості

$$D(y) = [0; +\infty).$$

$$E(y) = [0; +\infty).$$

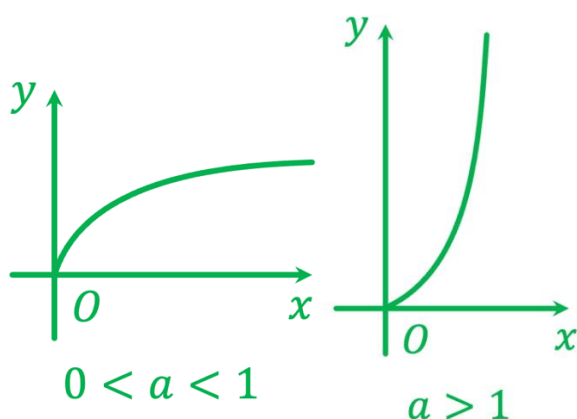
Парність: індиферентна.



**Схематичне
зображення:**

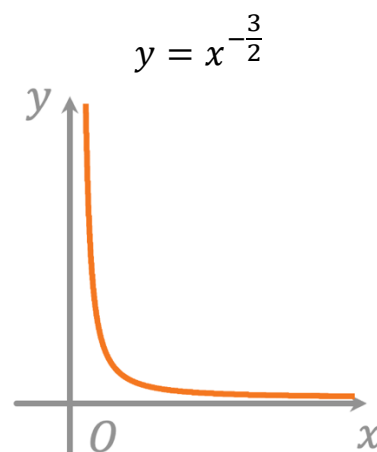
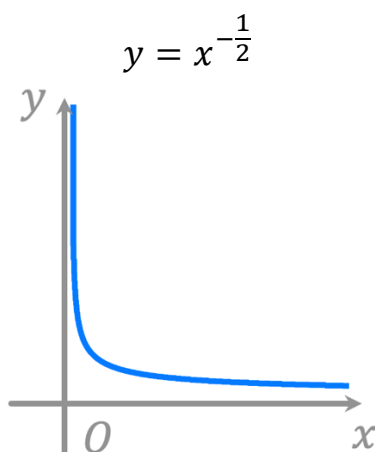
Зростає на проміжку: $x \in [0; +\infty)$.

Нулі функції: $x = 0$.



$$y = x^a$$

a – неціле від'ємне



Властивості

$D(y) = [0; +\infty)$.

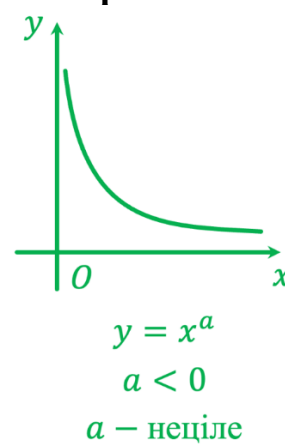
$E(y) = [0; +\infty)$.

Парність: індиферентна.

Зростає на проміжку: $x \in [0; +\infty)$.

Нулі функції: немає.

**Схематичне
зображення:**



$$y = x^a$$

$y \uparrow$

$$a = 0$$

$$x \neq 0$$

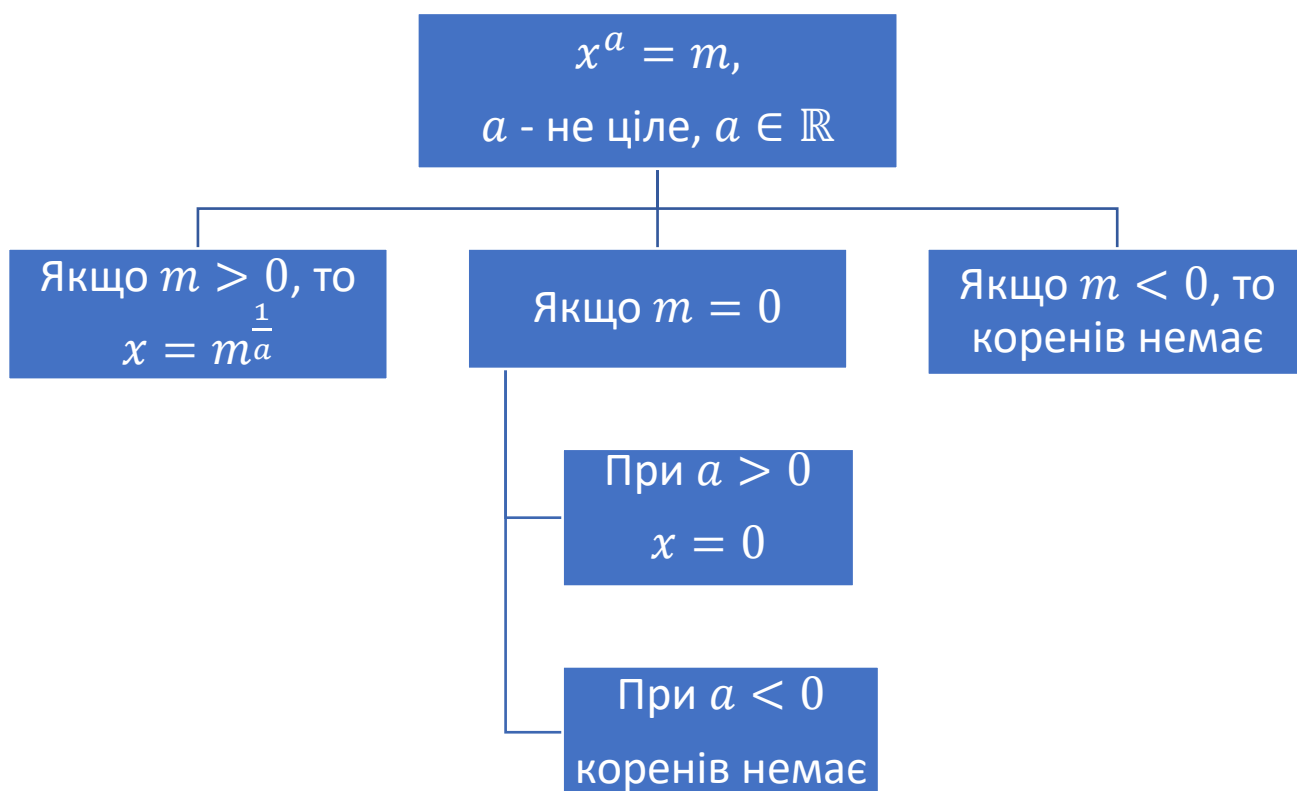
Властивості

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

$$E(y) = 1.$$

Парність: парна.

Рівняння $x^a = t$ (іраціональні рівняння)



1.3. Аналіз навчальних підручників із теми "Функції, їхні властивості та графіки"

Математичні знання та вміння розглядаються не як самоціль, а як засіб формування особистості учня, забезпечення математичної грамотності як здатності учнів розуміти роль математики у світі, в якому вони живуть, приймати обґрунтовані математичні рішення та використовувати математичні знання для задоволення своїх пізнавальних і практичних потреб.

Важливою частиною математичної освіти є систематичне використання історичних джерел. Це підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює прагнення до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів і формує в учнів розуміння математики як невід'ємної частини людської культури. Показати учням, як розвивалися математичні поняття, відношення, теорії та методи, використовуючи зрозумілі та змістовні приклади. Сприяти національно-патріотичному вихованню шляхом ознайомлення учнів з іменами та біографіями видатних вчених, які створили математику, зокрема видатних українських математиків [3].

Підручники з математики є важливим інструментом навчання учнів. У процесі проведення аналізу підручників з математики необхідно враховувати критерії, які відображають ефективність та корисність підручника. Підручники з математики мають бути якісними, доступними та ефективними засобами навчання. При аналізі підручників з математики, слід враховувати наступні критерії:

1. Зміст підручника, структура, логічність, відповідність освітній програмі.
2. Наочність, доступність, якість пояснень, мотиваційний аспект та зацікавленість навчального матеріалу.
3. Приклади та вправи, система оцінювання.

Зміст, структура, логічність, відповідність освітній програмі. Підручники мають відповідати змісту навчальної програми та потребам

учнів. Підручники мають включати всі основні поняття, теорії та методи, необхідні для вивчення математики, і поєднувати теорію та практику. Підручники мають бути подані в послідовній і логічній формі та сприяти розумінню математичних концепцій за рахунок відповідної організації розділів і підрозділів.

Наочність, доступність, якість пояснень, мотиваційний аспект та зацікавленість навчального матеріалу. Автори підручників мають у доступній формі розкривати зміст освіти, давати чіткі та зрозумілі пояснення математичних понять і правил. Розгляд методів навчання, що використовуються в підручниках, може сприяти підвищенню ефективності навчання, розвитку різних типів мислення, підтримці інтересу учнів до предмета та розвитку ключових компетентностей.

Використання відповідних методів викладання сприяє підвищенню ефективності навчання учнів. Різноманітні методи, як-от пояснення матеріалу, використання прикладів і вправ, виконання практичних завдань і проєктів, дають змогу залучити учнів до активного процесу навчання та покращити засвоєння математичних понять.

Різні методи навчання враховують різні типи мислення студентів, такі як аналітичне, логічне, творче та візуальне. Використання різних методів навчання дає змогу кожному студенту знайти свій власний підхід до вивчення математики та розвинути свої сильні сторони.

Використання різних методів навчання сприяє підтриманню інтересу учнів. Викладення матеріалу в інтерактивній формі, використання реальних прикладів та візуалізація математичних понять допомагають учням навчатися цікавіше та зрозуміліше.

Використання різноманітних методів навчання сприяє розвитку в студентів таких ключових компетентностей, як критичне мислення, вміння розв'язувати проблеми, спілкуватися та співпрацювати. Ці компетенції важливі як у математиці, так і в житті загалом.

Приклади та вправи, система оцінювання. Наявність прикладів, вправ і задач у підручниках важлива з кількох причин.

Приклади та вправи є важливими інструментами для вивчення математичних понять. Вони допомагають студентам зрозуміти та застосувати теоретичні знання на практиці. Різні типи завдань дають студентам можливість відпрацювати свої навички та закріпити отримані знання.

Вправи та завдання підручника розвивають навички розв'язування математичних задач. Студенти можуть розвивати творче та алгоритмічне мислення, розглядаючи різні ситуації та застосовуючи різні методи й стратегії розв'язування задач.

Наведені в підручнику приклади, вправи та завдання можуть бути використані для підготовки до іспитів і вступних випробувань. Вони допомагають студентам розвинути знання та навички, необхідні для складання іспитів.

У підручниках подано різні типи прикладів, вправ і завдань, тож викладачі та студенти можуть обрати той, що найбільше відповідає їхнім потребам і рівню складності. Це дає змогу адаптувати навчання до індивідуальних особливостей і потреб студентів.

Порівняємо підручники з алгебри та початків аналізу для учнів 10 класу, опираючись на наведені вище критерії. Для порівняльного аналізу ми пропонуємо такі підручники:

1. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с. [25].
2. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М.І.Бурда, Т.В.Колесник, Ю.І.Мальований, Н. А. Тарасенкова. К.: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с. [26].

3. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. Київ:Генеза, 2018. 384 с.[27].
4. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018. 256 с. [28].
5. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с. [29].

Таблиця 1.1.

**Порівняльний аналіз підручників з математики для учнів 10 класу
щодо відповідності до змісту навчального матеріалу**

№	Підручник	Зміст
1	Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с. [25].	Числові функції та їх властивості Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь і нерівностей Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня, його властивості Степінь з раціональним показником та його властивості Степенева функція, її властивості та графік
2	Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень	Числові функції та їхні властивості Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня та його властивості

	стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М.І.Бурда, Т.В.Колесник, Ю.І.Мальований, Н. А. Тарасенкова. К.: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с. [26].	Степінь з раціональним показником. Степенева функція та її властивості
3	Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. Київ:Генеза, 2018. 384 с.[27]	Числова функція. Графік функції. Монотонність і неперервність функції. Парні і непарні функції. Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня. Властивості арифметичного кореня n -го степеня. Степінь з раціональним показником і його властивості Степеневі функції, їх властивості та графіки
4	Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк,	Найбільше і найменше значення функції. Парні та непарні функції Степенева функція з натуральним показником Степенева функція із цілим показником Означення кореня n -го степеня Властивості кореня n -го степеня

	Д.А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018. 256 с. [28]	Означення та властивості степеня з раціональним показником Ірраціональні рівняння
5	Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с. [29]	Числові функції Властивості функції Корені n-го Степені з раціональними показниками Степеневі функції

Проведений аналіз підручників з математики для 10-го рівня стандарт вказує, що усі підручники відповідають вимогам чинної навчальної програми з математики 10-го класу [32] та методичним вимогам до такого виду літератури.

1.4. Методичні особливості вивчення теми "Функції, їхні властивості та графіки"

Вивчення функції у програмі загальноосвітньої школи досить складний процес, проте засвоєння цього матеріалу є дуже важливим. Адже поняття функції є фундаментальним для складніших розділів. Тому без чіткого розуміння сенсу цього математичного терміна неможливе подальше освоєння шкільного курсу математики.

Пояснення починають зазвичай з розгляду залежностей між значеннями двох змінних, в яких кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної.

Під час формування загального поняття функції важливо використати приклади залежностей, що задаються різними способами (за допомогою формули, графіка, таблиці), відомі учням з попередніх класів, і ті знання та вміння, які вони здобули під час здійснення функціональної пропедевтики.

Початкові відомості про функції учні отримують у 7 класі під час вивчення теми "ФУНКЦІЇ", де розглядають функціональну залежність між величинами як математичну модель реальних процесів, поняття "функція", область визначення та область значень функції, способи задання функції, графік функції, лінійну функцію, її графік та властивості.

Під час вивчення теми "ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ" учні вивчають лінійні рівняння з однією змінною, лінійні рівняння з двома змінними та їх графіки, навчаються розв'язувати системи двох лінійних рівнянь з двома змінними різними способами, зокрема графічним способом.

У 8 класі учні знайомляться з функціями $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, їхніми графіками та властивостями; вчать розв'язувати вправи, що передбачають побудову графіків функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

У 9 класі знайомляться із квадратичними функціями; навчаються обчислювати значення функції в точці, пояснювати перетворення графіків функції: $f(x) \rightarrow f(x)+a$; $f(x) \rightarrow f(x+a)$; $f(x) \rightarrow kf(x)$, $f(x) \rightarrow -f(x)$; алгоритм побудови графіка квадратичної функції; характеризують функцію за її графіком; розв'язують вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції тощо.

Основною метою вивчення є формування уявлень в учнів про функції як математичної моделі залежності між величинами й об'єктами будь-якої природи; введення поняття про основні способи задання функцій на

прикладях прямої й оберненої пропорційності; розгляд функцій та їхніх графіків, способів задання.

Оскільки функція вважається заданою, якщо вказано спосіб залежності між змінними і область визначення функції, то природно, розглядаючи приклади, запровадити поняття області визначення та області значень функції.

Під час введення загального поняття функцій через поняття змінних краще наводити приклади таких властивостей, оскільки змінні можуть мати будь-яку природу, а не тільки кількість, але надалі учні матимуть справу з числовими функціями.

На цьому етапі навчання вже можна назвати три основні способи задання функції та застосувати символ $y = f(x)$ для позначення будь-якої функції.

Графік залежності (рис. 1.1) показує, що одному значенню незалежної змінної x відповідають два значення залежної змінної y і $-y$.

Навпаки, одному значенню незалежної змінної x відповідають два значення залежної змінної y і $-y$, тобто друга суттєва властивість поняття функції не виконується.

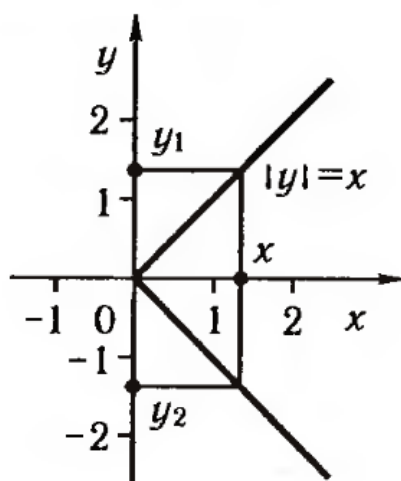


Рис. 1.1.

Слід звернути увагу студентів на те, що термін "функція" іноді використовується для позначення двох понять: функціональної залежності та залежної змінної.

За різних способів визначення функції йдеться про обчислення значень аргументів, що відповідають значенням даної функції.

З метою розвитку вміння створювати математичні моделі залежностей у практичних задачах важливо створювати формули (функції) залежностей: шляху від часу за сталої швидкості, маси від об'єму різних об'єктів, графічного представлення залежностей температури та тиску від часу, отриманих у результаті експериментальних спостережень. Для ознайомлення з елементами статистики студенти можуть потренуватися у складанні таблиць статистичних даних.

Відома методистка з викладання математики Слєпкань З. І. наводить загальну методичну схему вивчення окремих видів функцій як у курсі алгебри, так і в курсі алгебри і початків аналізу.

I. Етап мотивації: розглядаються приклади залежностей, які приводять до певного виду функції.

II. Формулювання означення функції, що впроваджується. Залежно від виду функції та підготовленості учнів означення можна ввести конкретно-індуктивним методом (за якого учнів підводять до самостійного виокремлення істотних властивостей і формулювання означення) чи абстрактно-дедуктивним методом (за якого вчитель сам формулює означення і наводить приклади введеного виду функції). На цьому етапі учні розв'язують усні вправи на підведення до поняття функції, що вивчається. Серед пропонованих функцій мають бути такі, що не належать до розглядуваного виду.

III. Побудова по точках за заздалегідь заготовленою таблицею графіка функції та «читання» за ним властивостей функції. На наступних етапах навчання, зокрема в 9—10 класах, під час систематизації відомостей про функції та введення означення зростаючої, спадної, парної, непарної,

періодичної функції буде нагода довести властивості окремих видів функції аналітично.

IV. Застосування властивостей вивченої функції, зокрема, до розв'язування рівнянь, нерівностей та інших задач [36].

Під час ознайомлення учнів з визначенням лінійних функцій за допомогою конкретно-індуктивного методу, можна запропонувати учням записати відношення між змінними в чотирьох прикладах у вигляді одного рівняння. Позначивши незалежну змінну через x , залежну змінну через y , коефіцієнт при змінній через k і вільний постійний член через b , отримаємо рівняння $y = kx + b$.

Вчитель звертає увагу на те, що всі функції, які можуть бути представлені цим рівнянням, називаються *лінійними*. Учням пропонується використати це рівняння для формулювання визначення лінійної функції. У цьому випадку доцільно звернути увагу учнів на найважливішу властивість лінійних функцій. Це легко зрозуміти зі структури рівняння, що визначає дану функцію. У загальному випадку між членами стоїть знак плюс. Якщо між членами стоїть знак мінус, то це означає, що відноситься до вільного члена b . Неістотні властивості – це значення коефіцієнтів k і b . Вони можуть мати будь-яке числове значення, порядок слідування членів також може будь-яким.

Лінійні функції використовуються під час вивчення двох рівнянь із двома невідомими, особливо під час введення графічного методу розв'язання таких рівнянь, а раніше під час вивчення графіків рівнянь із двома невідомими.

При введенні понять зростаючої, спадної, парної та непарної функцій у 10 класі бажано повернутися до властивостей лінійних функцій і довести їх аналітично.

Окремим випадком лінійної функції є *пряма пропорційність*, оскільки формулу $y = kx$ можна отримати з формули $y = kx + b$, якщо $b = 0$. Тому вивчення прямої пропорції можна розпочати саме з цього розгляду. Потім

учні можуть сформулювати власне визначення прямої пропорційності та навести приклади залежності, що задається формулою $y = kx$.

Як окремий випадок лінійних функцій, пряма пропорційність має вигляд прямої лінії. Можна запитати учнів про специфічні властивості цієї прямої. Хтось із них скаже, якщо $x = 0$ $y = 0$, то графік прямої пропорційності являє собою пряму, що проходить через початок координат. Тому для побудови графіка можна знайти координати іншої точки, задати зручне значення x і обчислити y за формулою.

Розв'язуючи вправи стосовно лінійної функції та прямої пропорційності, методисти роблять поради щодо побудови не тільки графіків відповідних функцій за заданою формулою, а й розв'язування обернених вправ: за відомим графіком знайти формулу, що задає функцію [36].

Під час вивчення функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ можна навести приклади залежностей між змінними, які приводять до цих функцій (залежність площі квадрата від довжини його сторони, залежність об'єму куба від довжини його сторони).

Вивчення цих двох функцій відбувається з більшою цікавістю й учні беруть жваву участь у цьому процесі, якщо ще до заповнення таблиць і побудови графіків дослідити їх властивості та передбачити деякі особливості в розміщенні графіків на основі відомих учням властивостей виразів x^2 і x^3 .

Вивчення оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$ природно пов'язати з різними прикладами залежностей між змінними, які відомі учням із життєвого досвіду або із суміжних предметів, зокрема геометрії, фізики. Наприклад: за постійної напруги сила струму обернено пропорційна опорі провідника функцій $I = \frac{U}{R}$.

Під час вивчення квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо $a \neq 0$, в 9 класі на етапі мотивації легко навести приклади залежностей, які задаються функцією $y = ax^2$, що є окремим випадком квадратичної, але складніше підібрати аналогічні приклади для загального вигляду функції. Проте такий

приклад є у курсі фізики, де учні вивчають формулу положення тіла відносно системи координат у будь-який момент часу:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Найскладнішим для сприймання учнів є навчальний матеріал щодо побудови графіка квадратичної функції загального вигляду $y = ax^2 + bx + c$. Тому не випадково учнів готують до цього, послідовно розглядаючи питання побудови графіків функцій $y = x^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x + m)^2 + n$ з використанням побудови відомого графіка функції $y = x^2$.

Матеріали для побудови графіків і вивчення деяких властивостей квадратичних функцій та їхніх загальних форм дають змогу в класах і математичних гуртках поглибленого вивчення математики досліджувати побудову графіків складніших функцій на рівні узагальнення, за допомогою геометричних перетворень графіків відомих функцій. При цьому для урізноманітнення вправ на графіки функцій слід об'єднати вісім основних перетворень. Це дасть змогу учням, які навчаються на поглибленому рівні, будувати графіки складніших тригонометричних, степеневих, експоненціальних і логарифмічних функцій у курсах елементарної алгебри та аналізу.

РОЗДІЛ II.

РОЗВИТОК УМІНЬ УЧНІВ ЗАСТОСОВУВАТИ ПОХІДНУ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

2.1. Основні поняття інформаційно-комунікаційних технологій та їх класифікація

Перехід суспільства від індустріального до інформаційного сприяє скороченню життєвого циклу знань і навичок у традиційному їх розумінні та перетворює функцію освіти з разової, за якої отримання певних документів державного зразка (сертифікатів, дипломів) дає змогу людині працювати за однією й тією самою професією до кінця життя, на таку, що враховує швидкі зміни в цивілізації й суспільному розвитку та характеризується переходом від фахових знань і навичок до звичаєвої, що характеризується постійним оновленням. У цих умовах традиційна очна освіта стає лише частиною загального освітнього процесу, а частка інформаційних технологій (головним чином, комп'ютерів, Інтернету та телекомунікацій) в освітньому процесі постійно зростає. Інформаційне суспільство висуває високі вимоги до підготовки учнів з урахуванням швидко мінливого соціального контексту і темпів розвитку цивілізації. Ключовим поняттям у цьому процесі є інформаційні технології та їх раціональне використання.

Інформаційна технологія – сукупність методів, виробничих і програмно-технологічних засобів, об'єднаних у технологічний ланцюжок, що забезпечує збір, зберігання, опрацювання, висновки і поширення інформації для зниження трудомісткості процесів використання інформаційних ресурсів, підвищення надійності та оперативності; комплекс методів, способів і засобів, які забезпечують зберігання, обробку, передавання та відображення даних/інформації та, які орієнтовані на підвищення ефективності та продуктивності праці [21].

Матеріальною основою сучасних інформаційних технологій є три основних технічні досягнення:

— поява нового середовища нагромадження інформації на фізичних носіях (магнітні стрічки, мікрофільми, магнітні та оптичні диски, напівпровідникові пристрої, тощо);

— розвиток засобів зв'язку, що забезпечують доставку інформації практично в будь-яку точку земної кулі без обмежень в часі та просторі, та масове охоплення населення засобами зв'язку (радіо, телебачення, мережі передачі даних, супутниковий зв'язок, телефонна мережа);

— можливість автоматизованої обробки даних за допомогою комп'ютера згідно заданого алгоритму [37].

Інформаційні технології проникають як на роботу, так і в особисте життя. Вони впливають на міжнародний торговельний баланс, зайнятість і політику. З появою інформаційного суспільства виникла потужна індустрія інформаційних технологій, покликана задовольнити потреби цього суспільства. Індустрія інформаційних технологій створює нові види інформаційних продуктів і засоби їх доставки споживачам. Під інформаційними продуктами слід розуміти різні аспекти знань, даних, творів мистецтва та інших форм інформації та розваг, які можуть бути отримані за допомогою традиційних засобів та електронних пристроїв.

Загалом сучасні інформаційні технології спрямовані на підвищення рівня автоматизації всіх інформаційних процесів і є основою для прискорення темпів науково-технічного прогресу. Інформаційні технології дають змогу ефективно поєднувати технічні можливості комп'ютерів, телекомунікацій та інформатики. Ці технології спрямовані на збирання, зберігання, аналіз і доставку інформації споживачам (вченим, інженерам, менеджерам, лікарям, економістам) незалежно від джерела та відстані до обсягу інформації, на автоматизацію повторюваних завдань управлінських процесів і підготовку аналітичної інформації для ухвалення рішень.

Інформаційні технології – це широка галузь, яка включає в себе різноманітні технології та системи для обробки, передачі та збереження інформації. ІТ можна класифікувати за декількома основними категоріями:

1. Комп'ютерні технології.
 - Апаратне забезпечення (жорсткі диски, процесори, пам'ять, монітори тощо).
 - Програмне забезпечення (операційні системи, програми для обробки даних, графіки, тексту та інші).
 - Комп'ютерні мережі та інтернет.
2. Телекомунікаційні технології.
 - Мобільні технології (стільникові мережі, 3G, 4G, 5G).
 - Супутниковий зв'язок.
 - Телефонія та VoIP (голосовий інтернет-протокол).
 - Відеоконференції та інші форми відеозв'язку.
3. Інтернет-технології.
 - Веб-розробка (HTML, CSS, JavaScript).
 - Веб-сервери та хостинг.
 - Хмарні технології та послуги (хмарне зберігання, хмарні обчислення).
4. Бази даних.
 - Системи керування базами даних (СКБД).
 - Мови запитів SQL (Structured Query Language).
 - Біг-дейт (Big Data) технології та аналітика.
5. Програмування та розробка.
 - Розробка додатків (мобільні додатки, десктоп-додатки).
 - Розробка веб-додатків та сайтів.
 - Штучний інтелект та машинне навчання.
6. Інформаційна безпека.
 - Кіберзахист та кібербезпека.

- Антивірусне програмне забезпечення.
 - Інциденти безпеки та відновлення після кібератак.
7. ІТ-управління та процеси:
- ІТ-інфраструктура та сервіси управління.
 - Процеси управління ІТ-проектами (ITIL, Agile, Scrum).
 - Автоматизація бізнес-процесів.
8. ІТ-освіта та навчання:
- Комп'ютерні науки та інженерія.
 - ІТ-курси та сертифікація.
 - Електронне навчання та масові відкриті онлайн-курси (MOOCs).

Інформаційні технології охоплюють широкий спектр засобів і способів їх використання - від друкованих видань до сучасних комп'ютерів. У межах інформаційних технологій розрізняють комп'ютерні та комунікаційні технології, які об'єднуються в поняття "нові інформаційні технології" (НІТ).

Традиційно під засобами ІТ розуміють програмно-технічні засоби та пристрої на базі мікропроцесорної техніки, сучасні телекомунікаційні засоби та системи обміну інформацією, аудіо- та відеотехніку тощо, які забезпечують операції зі збирання, виробництва, накопичення, зберігання, оброблення та передавання інформації.

До них належать: комп'ютери всіх видів, пристрої мовленнєвого введення, сканери, бази даних і знань, мультимедійні системи, відео та телетекст, модеми, комп'ютерні мережі, інформаційно-пошукові системи, цифрові фотоапарати, системи експертного навчання, пристрої виведення графічної інформації, гіпертекстові системи, телебачення, радіо, телефон і факс, голосова електронна пошта, телеконференції, електронні дошки оголошень, навігаційне програмне забезпечення Інтернету. Системи, пристрої виведення графічної інформації, гіпертекстові системи, телебачення, радіо, телефон і факс, голосова електронна пошта, телеконференції, електронні дошки оголошень, навігаційне програмне

забезпечення Інтернету, електронні бібліотеки, освітнє програмне забезпечення, шифрувальні пристрої, редакційно-видавничі системи, CD-ROM, системи розпізнавання тексту, програмні системи (мови програмування, транслятори), пристрої синтезу мовлення, пристрої передавання даних, пейджери, системи віртуальної реальності, системи передачі даних, системи віртуальної реальності, системи

Інформаційні технології дають можливість користувачу оперувати інформаційними ресурсами.

Інформаційний ресурс – окремі документи і масиви документів в інформаційних системах (бібліотеках, архівах, фондах, банках даних; сукупність документів у інформаційних системах (бібліотеках, архівах, банках даних тощо) або сукупність інформаційних продуктів певного призначення, які необхідні для забезпечення інформаційних потреб споживачів у визначеній сфері діяльності [21].

Особливим видом інформаційних технологій є інформаційно-комунікаційні технології.

Інформаційні технології (ІТ) і інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) часто використовуються як синоніми, але вони мають певні відмінності в значенні, хоча взаємозв'язок між ними є дуже сильним.

Інформаційні технології (ІТ) - це загальна категорія, яка включає в себе всі технології та системи, пов'язані з обробкою, передачею та зберіганням інформації. Це включає в себе апаратне та програмне забезпечення, комп'ютерні мережі, бази даних, розробку програмного забезпечення та інше. ІТ фокусується на технічних аспектах обробки інформації та технологій, які дозволяють робити це більш ефективно.

Інформаційні технології (ІТ) - це загальна категорія технологій, які використовуються для обробки інформації, включаючи її збереження та передачу, тоді як інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) розширюються, включаючи аспекти комунікації та обміну інформацією між

користувачами та системами. Обидві області взаємопов'язані і спільно сприяють розвитку сучасного інформаційного суспільства.

Отже, інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) включають в себе понад технічні аспекти ІТ і також охоплюють всі аспекти комунікації, включаючи обмін інформацією між користувачами та системами. Це включає в себе всі форми електронної комунікації, такі як телефонія, електронна пошта, соціальні мережі, відеоконференції, а також інші інструменти та технології для спілкування. ІКТ також включають в себе технології для доступу до інформації через мережу Інтернет та засоби для забезпечення безпеки інформації під час її передачі.

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ, англ. Information and communications technology, ICT) – сукупність методів, засобів і прийомів, що використовуються для збирання, систематизації, зберігання, опрацювання, передавання, подання різних повідомлень і даних за допомогою засобів обчислювальної техніки та зв'язку; синонім до інформаційних технологій (ІТ), хоча ІКТ це загальніший термін, який підкреслює роль уніфікованих технологій та інтеграцію телекомунікацій (телефонних ліній та бездротових з'єднань), комп'ютерів, підпрограмного забезпечення, програмного забезпечення, накопичувальних та аудіовізуальних систем, що дозволяють користувачам створювати, одержувати доступ, зберігати, передавати та змінювати інформацію. ІКТ складається з ІТ, а також телекомунікацій, медіа-трансляцій, усіх видів аудіо і відео, передачі, мережних функцій управління та моніторингу [21].

Вважаємо за необхідне у нашій роботі виділити галузь інформаційно-комунікаційних технологій в освіті.

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) в освіті – це сукупність методів, прийомів, виробничих процесів і програмно-апаратних засобів, інтегрованих з метою розроблення інформаційно-цифрових освітніх систем, електронних освітніх ресурсів (ЕОР) та побудови комунікаційних

мереж, а також технології розв'язування задач в галузі освіти з використанням таких систем, ресурсів і мереж [21].

Засоби ІКТ в освіті класифікують залежно від їх методичного призначення за схемою

Класифікація засобів ІКТ залежно від їх методичного призначення

Навчальні – повідомляють освітню інформацію, формують знання, навички й уміння навчальної або практичної діяльності

Тренувальні – призначені для закріплення умінь і навичок, повторення вивченого матеріалу

Інформаційно-пошукові і довідкові – повідомляють інформацію, формують уміння її систематизувати

Демонстраційні – візуалізують об'єкти, що вивчаються, з метою їх дослідження та вивчення

Імітаційні – представляють певний аспект реальності для вивчення його структурних та функціональних характеристик

Лабораторні – дають змогу проводити віддалені експерименти на реальному обладнанні

Модельовальні – дають змогу моделювати об'єкти з метою їх вивчення

Навчально-ігрові – створюють навчальні ситуації, яких діяльність реалізується в ігровій формі

Різноманітність інструментів та технологій, які використовуються в сучасному освітньому процесі для покращення доступу до знань, підвищення якості навчання та забезпечення індивідуалізації навчання відображає класифікація ІКТ за наступними категоріями:

1. Електронні навчальні платформи.

- Системи керування навчанням (Learning Management Systems, LMS): це платформи, які дозволяють вчителям створювати, керувати та оцінювати навчальні матеріали та завдання.

- Масові відкриті онлайн-курси (MOOCs): безкоштовні курси, доступні в мережі для масової аудиторії.

2. Електронні навчальні ресурси:

- Відеоуроки та вебінари: навчальні матеріали в формі відео для дистанційного навчання.
- Електронні підручники: цифрові версії навчальних посібників та підручників.
- Інтерактивні вправи та ігри: навчальні додатки, які розвивають навички та знання.

3. Віддалене навчання та телекомунікаційні технології:

- Відеоконференції: можливість проводити уроки та зустрічі в режимі онлайн.
- Спільні онлайн-платформи для співпраці: інструменти для спільного навчання та роботи над проектами.
- Електронна пошта та форуми: комунікаційні засоби для вчителів і учнів.

4. Адаптивне навчання та аналітика:

- Системи адаптивного навчання: програми, які пристосовують навчання до індивідуальних потреб учнів.
- Аналітика в освіті: збір та аналіз даних про навчальний процес для покращення результатів навчання.

5. Інтерактивні дошки та технології:

- Інтерактивні дошки в класі: спеціальні пристрої, які дозволяють вчителям та учням взаємодіяти з навчальними матеріалами на дошці.
- Планшети та смартфони для навчання: використання мобільних пристроїв у навчальних цілях.

6. Використання штучного інтелекту (AI) в освіті:

- Персоналізоване навчання: використання AI для створення індивідуальних навчальних програм для кожного учня.
- Інтелектуальні підказки та оцінювання: системи AI, які надають поради та оцінки з навчання.

Сучасний вчитель повинен прагнути до впровадження інтерактивного способу використання ІКТ, та розуміти, що ІКТ - це не флешка з презентацією, а сучасні освітні онлайн-сервіси, навчальні платформи, хмарні мультимедійні технології, дистанційне індивідуальне навчання, навчально-розвиваючі проекти в соцмережах.

Застосування ІКТ дозволяє вчителю економити час і максимально ефективно вирішувати повсякденні справи і обов'язки як фахівця:

- створювати: текстові документи, таблиці, малюнки, презентації;
- використовувати: інтернет-технології, локальні мережі, бази даних;
- здійснювати: пошук необхідної інформації в мережі Інтернет;
- розробляти власні електронні продукти (розробки уроків, демонстраційний матеріал);
- поєднувати готові електронні продукти (електронні підручники, енциклопедії, навчальні програми, демонстраційні програми тощо).

Використання комп'ютера в процесі навчання сприяє підвищенню інтересу й загальної мотивації навчання завдяки новим формам роботи; активізації навчання завдяки використанню привабливих і швидкозмінних форм подання інформації, індивідуалізації навчання; розширенню інформаційного і тестового наповнення, доступу учнів до інформації, можливості оперативно отримувати необхідні дані в достатньому обсязі; об'єктивності перевірки й оцінювання знань, умінь і навичок учнів.

До сучасних інформаційно-комунікаційних технологій навчання відносяться Інтернет-технології, мультимедійні програмні засоби, офісне та спеціалізоване програмне забезпечення, електронні посібники та підручники,

системи дистанційного навчання (системи комп'ютерного супроводу навчання).

За допомогою комп'ютерних технологій, які увібрали в себе елементи різних методик (особистісно-орієнтованого, розвивального, проектного навчання) кожен учитель може підібрати та узагальнити матеріал, який би був цікавим для учня, спираючись на його інтереси, здібності, особисті цінності й суб'єктивний досвід, можливість самореалізації в пізнавальній та інших видах діяльності, створюють комфортні умови для самовизначення особистості в інформаційному суспільстві.

Дає можливість використовувати електронні підручники, статистичні та динамічні таблиці, літературні портрети, тестові завдання, медіа-твори, проводити віртуальні екскурсії.

Використання мультимедійних програмних засобів, дозволяє поєднувати текстову, графічну, анімаційну, відео- і звукову інформацію. Мультимедійні програмні засоби імітують складні реальні процеси, ситуації, візуалізують абстрактну інформацію за рахунок динамічного представлення процесів, демонстрації фрагментів передач, фільмів, віртуальних екскурсій тощо.

Комп'ютер не замінить ні вчителя, ні підручник. Та створюючи електронний дидактичний матеріал, використовуючи його на різних етапах уроку, маємо змогу розвивати вербально-логічний, наочно-дієвий, просторовий, візуальний тип мислення, поєднувати слухове й зорове сприйняття матеріалу.

Комп'ютер притягує увагу, якої ми деколи не можемо отримати при фронтальній роботі з класом. А візуальна насиченість навчального матеріалу робить його яскравим, переконливим, сприяє кращому його засвоєнню і запам'ятовуванню. Комп'ютер органічно вписується в освітній процес школи і є ще одним ефективним технічним засобом, за допомогою якого можна значно урізноманітнити процес навчання.

Інформаційно-комунікаційні технології дають змогу здійснювати навчання студентів і викладачів навіть за їхньої географічної віддаленості один від одного та безпосередньо у виші з метою формування самостійної діяльності студента з оволодіння програмою навчання за профільним напрямом. Такі характеристики, як гнучкість, мобільність, зручність, рівність і доступність, дають змогу студентам, які здобувають професійну освіту, навчатися у зручний для них час і в зручному місці.

Інформаційно-комунікаційні технології в освіті мають суттєві переваги у ситуації, що склалася сьогодні:

- можливість інтерактивної взаємодії між учасниками освітнього процесу в режимі діалогу, що у деяких випадках може наближатися до діалогової взаємодії в традиційних навчальних технологіях;
- швидке розсилання та одержання освітніх матеріалів в електронному поданні;
- оперативний доступ до інформаційних ресурсів через мережу Інтернет;
- можливість перевірки та контролю знань у дистанційному режимі;
- можливість організації практикумів у віртуальному режимі через реалізацію віддаленого мережного доступу до реального обладнання;
- створення «віртуальних груп» для оперативної взаємодії між учнями;
- можливість накопичення статистичних даних та на основі їх аналізу управляти навчанням;
- підвищення якості навчання та управління;
- впровадження автоматизованого управління якістю навчання;
- індивідуалізація професійної підготовки шляхом створення індивідуальних графіків навчання для окремих учнів.

Слід зазначити, що роль вчителя в цьому процесі розширилася й оновилася, ставши наставником-консультантом, тьютором, що має координувати пізнавальні процеси, постійно вдосконалювати викладацькі курси та підвищувати творчі здібності й якості у відповідь на інновації та технологічні зміни.

Під час карантинів та війни в Україні технології мобільного навчання довели, що електронне навчання може бути настільки ж ефективним, як і аудиторне, якщо методи й технології відповідають вимогам, є взаємодія між учнями та вчасний зворотний зв'язок між учасниками освітнього процесу. Зрештою успішні програми електронного навчання засновані на послідовних і комплексних зусиллях учнів, вчителів координаторів, допоміжного персоналу та адміністрації.

У цьому контексті ІКТ в освіті можна визначити як підхід до навчання, що використовує мобільні електронні пристрої для створення електронного навчального середовища, у якому учні можуть отримувати доступ до онлайн-матеріалів у будь-який час і в будь-якому місці, використовуючи інтерактивні засоби навчання. Інакше кажучи, використання ІКТ в освіті надає учням більшу "свободу", тобто більшу інтерактивність, більшу свободу пересування і більше технологічних засобів, в основному UMPC (ультрамобільні ПК), планшетні ПК і ультрапортативні ноутбуки, КПК (персональні цифрові асистенти), аудіоплеєри для запису і прослуховування лекцій, мультимедійні навчальні консолі, електронні книжки, смартфони та багато іншого.

Для реалізації дистанційного навчання на сайті освітніх закладів доречно розміщувати всі необхідні навчальні матеріали для учнів і передбачати зворотний зв'язок. Крім того, групові діалоги можна проводити через Viber, WhatsApp, Zoom та Moodle, а учні можуть отримувати консультації безпосередньо в режимі онлайн від своїх вчителів.

В умовах інформаційного суспільства розвиток сучасних інформаційних технологій підвищив рівень вимог до професійних якостей

вчителів та їхньої відповідальності. Тому, щоб бути конкурентоспроможними в умовах жорсткої конкуренції та зростаючих інформаційних потоків, вчителі повинні вміти продовжувати навчатися впродовж усього свого життя.

2.2. Застосування ІКТ у процесі вивчення математики для дослідження функцій

Різноманітність інструментів та технологій, які використовуються в освітньому процесі дуже різноманітна і насичена. Розглянемо найбільш поширені та ефективні інструменти у відповідності до наведеної нами класифікації у п.2.1.

1. Електронні навчальні платформи.

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) в освіті включають в себе різноманітні електронні навчальні платформи, які надають учителям та учням можливість навчатися та викладати онлайн.

Moodle є однією з найвідоміших і найбільш використовуваних систем керування навчанням (LMS). Вона дозволяє вчителям створювати онлайн-курси, завдання, тести, форуми та багато інших навчальних ресурсів.

Google Classroom дозволяє вчителям створювати віртуальні класи, додавати завдання та матеріали для навчання, а учні можуть зручно спілкуватися та взаємодіяти з матеріалами.

Blackboard – популярна LMS, яка використовується в багатьох університетах та навчальних закладах. Blackboard надає інструменти для створення та керування навчальними курсами.

Canvas – платформа LMS, створена компанією Instructure, є важливим інструментом для багатьох університетів і шкіл для навчання та оцінювання студентів.

Schoology – платформа LMS пропонує інструменти для організації навчання, комунікації та оцінювання в одній системі.

Edmodo є платформою для навчання та спілкування в освітньому співтоваристві. Вона використовується в школах та шкільних класах для спілкування та навчання.

Sakai – відкрита платформа LMS, розроблена для вищої освіти.

Desire2Learn (D2L) Brightspace. – платформа, що надає інструменти для створення навчальних курсів, спілкування та оцінювання у структурованому середовищі.

iTunes U – платформа від Apple, що дозволяє учителям інтегрувати контент для навчання, такий як відео, аудіо, книги та додатки, в навчальний процес.

2. Електронні навчальні ресурси:

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) в освіті надають доступ до різноманітних *електронних навчальних ресурсів*, які допомагають учням та вчителям покращити навчання та навчальний процес.

Khan Academy – це безкоштовна платформа з безліччю відеоуроків та вправ з різних предметів, включаючи математику, науки, історію та багато інших. Вона надає інтерактивні завдання та тести для перевірки знань.

Coursera – платформа, що пропонує безкоштовний доступ до онлайн-курсів від університетів та коледжів з усього світу. Ці курси можуть бути корисні як студентам, так і вчителям, які шукають нові методи навчання.

edX – платформа, що спільно розроблена MIT та Harvard і надає доступ до курсів з різних предметів. Ви можете взяти курси безкоштовно або отримати сертифікат за оплату.

TED-Ed - це платформа з навчальними відео від експертів з різних галузей. Відео супроводжуються питаннями та завданнями для обговорення.

Duolingo - це популярний додаток для вивчення іноземних мов. Він пропонує інтерактивні уроки з різних мов та дозволяє вчити мову на рівні від початкового до високого.

Codecademy. – платформа для програмістів, що надає можливість вивчення різних мов програмування через інтерактивні завдання та проекти.

Smithsonian Learning Lab - це онлайн-ресурс від Smithsonian Institution, який містить навчальні матеріали та ресурси з різних галузей науки та культури.

NASA for Students пропонує низку навчальних ресурсів для учнів та вчителів, які цікавляться астрономією та космічними дослідженнями.

BBC Bitesize – платформа, що містить навчальні ресурси для учнів у Великобританії, але їх можна використовувати для вивчення різних предметів та тем.

National Geographic Education – навчальні ресурси, які допомагають розширити знання про природу, науку та культуру.

3. Віддалене навчання та телекомунікаційні технології.

Для віддаленого навчання та телекомунікаційних потреб існує багато програм і технологій, які допомагають вчителям та учням спілкуватися та навчатися на відстані.

Zoom є однією з найпопулярніших платформ для відеоконференцій та віддаленого навчання. Вона дозволяє вчителям та учням проводити онлайн-уроки та зустрічі з великою кількістю учасників, обмінюватися повідомленнями та матеріалами.

Google Meet – платформа від Google також надає можливість відеоконференцій та взаємодії у режимі реального часу, інтегрована з Google Classroom.

Microsoft Teams – це інтегрована платформа для спільної роботи та відеоконференцій від Microsoft, яка включає в себе чати, відеоконференції та обмін файлами.

Skype for Business - це бізнес-версія популярного додатку Skype, яка використовується для спілкування та відеоконференцій у корпоративних оточеннях.

Cisco Webex - це інша платформа для відеоконференцій та віддаленого навчання, яка надає інструменти для спільної роботи та спілкування.

Adobe Connect дозволяє проводити вебінари, відеоконференції та взаємодіяти з аудиторією в режимі реального часу.

GoToMeeting - це інструмент для відеоконференцій та спільної роботи від LogMeIn.

BigBlueButton – це відкрита платформа спеціально розроблена для освітніх потреб і надає можливість проводити онлайн-уроки та взаємодіяти зі студентами.

Jitsi - відкрита і безкоштовна платформа для відеоконференцій та спілкування в реальному часі.

4. Адаптивне навчання та аналітика.

Адаптивне навчання та аналітичні програми використовуються в освіті для індивідуалізації навчального процесу та аналізу навчальних даних. Ось кілька конкретних програм для адаптивного навчання та аналітики:

Knewton - це платформа для адаптивного навчання, яка використовує штучний інтелект для створення індивідуалізованих навчальних шляхів для кожного учня на основі їхніх потреб та здібностей.

DreamBox - це програма для адаптивного навчання математиці для учнів початкових класів. Вона аналізує відповіді учнів та надає індивідуалізовані завдання.

SMART Learning Suite - це набір програм для інтерактивного навчання та адаптивного навчання, які включають в себе інструменти для створення уроків та аналізу навчальних даних.

Edgenuity надає інтерактивні навчальні матеріали для старшокласників та може бути використана для вдома навчаються або для кредитної навчання.

SAS Curriculum Pathways - це інструмент для адаптивного навчання та аналітики, який допомагає учителям створювати індивідуалізовані навчальні матеріали для учнів.

Khan Academy надає аналітику для учителів та учнів, яка допомагає відстежувати прогрес та слабкі місця.

Sundog - це програма для адаптивного навчання математиці та мовам для учнів початкових класів. Вона створена для розвитку навичок учнів шляхом ігор.

Renaissance Accelerated Reader – програма, що надає адаптивні завдання для читання та включає в себе аналітику, яка допомагає вчителям відстежувати прогрес читання учнів.

Adaptive Learning Platform by McGraw-Hill Education – платформа від McGraw-Hill Education, що надає інструменти для адаптивного навчання та аналізу навчальних даних.

5. Інтерактивні дошки та технології.

Інтерактивні дошки та технології використовуються в освіті для створення інтерактивних та захоплюючих уроків.

SMART Notebook - це програмне забезпечення, розроблене компанією SMART Technologies, яке використовується з інтерактивними дошками. Воно дозволяє вчителям створювати інтерактивні уроки та вправи.

Promethean ActivInspire - це програмне забезпечення для інтерактивних дошок від компанії Promethean. Воно надає інструменти для створення змісту для уроків та взаємодії з учнями.

Educreations - це онлайн-платформа, яка дозволяє вчителям створювати відеоуроки та інтерактивні презентації для учнів.

Nearpod - це платформа, яка дозволяє вчителям створювати інтерактивні уроки з використанням інтерактивних дошок та мобільних пристроїв учнів.

MimioStudio - це програмне забезпечення для інтерактивних дошок від компанії Voxlight, яке дозволяє створювати та ведення уроків з використанням різних інтерактивних елементів.

Gynzy - це онлайн-платформа з більш ніж 200 інтерактивними вправами та уроками для вчителів та інтерактивних дошок.

Prowise Presenter - це програмне забезпечення для інтерактивних дошок та інтерактивних проекторів, яке надає інструменти для створення інтерактивних уроків.

SMART Learning Suite включає в себе різні програми для створення, вивчення та аналізу інтерактивних уроків з використанням інтерактивних дошок.

Ziteboard - це онлайн-біла дошка, яка дозволяє користувачам створювати та редагувати графічний зміст разом, навіть на великих відстанях.

Explain Everything - це інтерактивна дошка, яка дозволяє створювати анімації, відео та інтерактивні презентації для навчання.

Крім названих вище технологій, доречно виділити інтерактивні онлайн дошки - це інструменти для віртуального навчання та співпраці, які дозволяють вчителям та учням працювати над матеріалами в режимі реального часу через Інтернет. Вони стали особливо актуальними в контексті віддаленого навчання та спільної роботи.

Jamboard від Google - це інтерактивна онлайн дошка, де ви можете створювати візуальні матеріали, рисувати, писати текст та спільно робити над проектами з іншими користувачами.

Miro - це онлайн-дошка для спільної роботи та віртуальних команд, де ви можете створювати схеми, діаграми, мозкові штурми та багато інших матеріалів.

Padlet - це віртуальна дошка, де ви можете створювати інтерактивні "стіни" з різними видами вмісту, включаючи тексти, зображення, відео та файли.

Trello - це інструмент для керування завданнями та проектами, де ви можете створювати дошки для спільної роботи та організації завдань.

Microsoft Whiteboard – це інтерактивна онлайн дошка від Microsoft, яка інтегрується з іншими програмами Microsoft і дозволяє користувачам робити спільну роботу над проектами та навчальними матеріалами.

Stormboard - це інтерактивна дошка для мозкових штурмів та групової роботи, де ви можете створювати та організовувати ідеї.

LoomieLive - це онлайн-платформа для створення інтерактивних віртуальних персонажів для віддалених зустрічей та уроків.

Ziteboard - це інтерактивна дошка для рисування, роботи з текстом і діаграмами, яка дозволяє користувачам спільно працювати над вмістом.

Conceptboard - це інструмент для створення візуальних презентацій і спільної роботи над проектами.

6. Використання штучного інтелекту.

Використання штучного інтелекту (ШІ) в освіті надає можливості для індивідуалізації навчання та покращення навчального процесу.

Cognii використовує штучний інтелект для оцінки та аналізу письмових завдань учнів. Вона допомагає вчителям швидко зрозуміти, як кожен учень розвиває навички письма та аргументації.

DreamBox використовує ШІ для індивідуалізації навчального матеріалу з математики для кожного учня, надаючи завдання, які відповідають їхнім потребам та рівню навчання.

ScribeSense - це платформа, яка використовує ШІ для перевірки рукописних текстів та надає докладну аналітику щодо навичок письма.

MATHia - це програма для вивчення математики, розроблена Carnegie Learning, яка використовує ШІ для створення індивідуалізованих навчальних шляхів та завдань.

Quillionz використовує ШІ для автоматичного створення питань і тестів на основі тексту, що допомагає вчителям створювати завдання для вивчення тексту та розвитку розуміння прочитаного.

Thinkster Math використовує ШІ для надання персоналізованих математичних завдань та аналізу навчальних даних.

Zearn Math - це програма для вивчення математики, яка використовує ШІ для створення індивідуалізованих уроків та завдань для кожного учня.

Wooclap використовує ШІ для створення інтерактивних уроків та тестів для учнів, де вони можуть відповідати в режимі реального часу.

Knewton. Компанія Knewton використовує ШІ для створення індивідуалізованих навчальних шляхів для учнів у різних предметах.

Century Tech використовує ШІ для створення персоналізованих уроків та оцінювання навчальних досягнень учнів.

Найбільш поширеними онлайн ресурсами, що надають можливості користування штучним інтелектом, є:

ChatGPT від OpenAI - це розширена версія штучного інтелекту, створена для спілкування з користувачами через текстовий чат. Вона може відповідати на запитання, робити рекомендації та спілкуватися з користувачами на різні теми. Використовується для відповідей на питання, створення чат-ботів та інших цілей.

IBM Watson - це платформа для розробки та впровадження рішень з використанням штучного інтелекту. Вона має набір інструментів для аналізу даних, мовленнєвого аналізу, комп'ютерного зору та багато інших завдань. Використовується в різних сферах, включаючи медицину, фінанси та бізнес.

Google Cloud AI - це набір інструментів для розробки застосунків з використанням штучного інтелекту на хмарних серверах Google. Включає в себе інструменти для машинного навчання, аналізу даних та обробки мовлення. Використовується для різних завдань, від розпізнавання образів до аналізу великих обсягів даних.

Cortana - це віртуальний особистий асистент від Microsoft. Він використовується для розпізнавання голосу, виконання завдань на пристроях з Windows та інших платформах. Cortana може надавати інформацію, створювати нагадування та виконувати інші завдання з використанням штучного інтелекту.

Replika - це чат-бот, який використовується для спілкування та підтримки користувачів за допомогою штучного інтелекту. Він розроблений для покращення ментального здоров'я та сприяння розмовам користувачів про їх почуття та думки.

Отже, інструментарій інформаційно-комунікаційних технологій дуже широкий і надає можливості здійснювати різні види освітньої діяльності педагогу, спрощуючи спілкування, розробку, оприлюднення, обробку й оцінку освітнього контенту.

2.3. Використання математичних пакетів для дослідження функцій

Аналіз програм для дослідження функцій та побудови їх графіків важливий для вчителів, студентів і всіх, хто займається вивченням математики або потребує аналізу графіків функцій у своїй роботі. Ось декілька популярних програм для цієї мети:

- 1. GeoGebra** – вільно-поширюване (GPL) динамічне геометричне середовище, яке дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі, планіметрії, зокрема, для побудов за допомогою циркуля і лінійки. Крім того, програма володіє багатьма можливостями для роботи з функціями (побудова графіків, обчислення

коренів, екстремумів, інтегралів тощо) за рахунок команд вбудованої мови (яка, до речі, дає змогу керувати і геометричними побудовами).

Програма написана Маркусом Хохенвартером мовою Java (відповідно працює повільно, але у великій кількості операційних систем). Перекладена на 39 мов [39, 40].

- Переваги. GeoGebra - це потужний та безкоштовний інструмент для вивчення графіків функцій, геометрії, алгебри і статистики. Він має інтерактивний інтерфейс, підтримує багато мов і доступний для використання в онлайн-режимі.
- Недоліки. Для новачків інтерфейс може здатися складним, і GeoGebra має велику кількість функцій, які можуть здаватися перевищеними для простих завдань.

2. Desmos Calculator — це онлайн-сервіс, який дозволяє будувати графіки складних математичних функцій, графічно вирішувати системи рівнянь, нерівностей, перетворювати функції тощо. Надає можливість зберігати свої обчислення, поділитися їх з іншими, експортувати у відео зображення тощо [10].

- Переваги. Desmos - це безкоштовний онлайн-графічний калькулятор, який відзначається простим інтерфейсом і високою швидкістю побудови графіків. Він також має додатки для смартфонів і планшетів.
- Недоліки. Desmos може бути менш потужним, ніж інші програми, і не підтримує складні математичні обчислення.

3. Wolfram Alpha.

- Переваги. Wolfram Alpha - це обчислювальний пошуковий двигун, який може будувати графіки функцій та вирішувати математичні задачі. Він має велику кількість функціональності та підтримує різні області математики.

- Недоліки. Wolfram Alpha є платним сервісом, і його графічні можливості можуть бути обмеженими порівняно з іншими програмами для графіків.

4. Microsoft Excel або Google Sheets.

Електронні таблиці (табличний процесор) – це інтерактивний, комп'ютерний застосунок для налагодження, аналізу та збереження даних у табличному форматі. Електронні таблиці дозволяють обробляти таблиці, передусім із числовими даними, дозволяють з'єднувати кілька таблиць для спільної роботи й опрацювання, включати текстові, графічні й інші мультимедійні елементи. До інструментарію електронних таблиць можна внести різноманітні математичні функції, які дозволяють виконувати складні математичні, фінансові, логічні, статистичні та інші види розрахунків. Більшість електронних таблиць включають вбудовану скриптову мову для програмування автоматизації розрахункових робіт.

- Переваги. Електронні таблиці дозволяють побудовувати графіки функцій і аналізувати дані. Вони можуть бути корисними для побудови діаграм та виконання базового аналізу.
- Недоліки. Електронні таблиці не призначені для складних математичних обчислень і не підтримують інтерактивність, характерну для інших програм.

5. MATLAB.

MATLAB – високорівнева інтерпретована мова програмування разом із пакетом прикладних програм та інтегрованим середовищем для розробки, виконання інженерних та математичних розрахунків, роботи з матричними базами даних, візуалізації.

- Переваги. MATLAB - це мова програмування, яка дозволяє виконувати складні обчислення та будувати графіки функцій. Вона широко використовується в академічних та інженерних дослідженнях.

- Недоліки. Може бути складною для новачків і вимагає навчання програмуванню.

2.4. Методика використання математичного пакета Geogebra у процесі дослідження функцій

GeoGebra - це інтерактивна математична програма та платформа, яка допомагає учням та вчителям вивчати математику та науку через візуальну інтерактивну роботу з математичними концепціями. Вона має безкоштовну версію та різні продукти, які охоплюють різні аспекти математики і науки.

Основні інструменти GeoGebra:

1. **Графічний калькулятор.** GeoGebra надає інтерактивний графічний калькулятор, який дозволяє створювати графіки функцій та математичні об'єкти. Ви можете будувати графіки функцій, виконувати обчислення та досліджувати відношення між різними геометричними об'єктами.
2. **Динамічна геометрія.** GeoGebra дозволяє створювати динамічні геометричні фігури. Ви можете пересувати точки, змінювати розміри та досліджувати властивості геометричних об'єктів в режимі реального часу.
3. **Алгебра і калькулятор.** GeoGebra має інструменти для розв'язування математичних рівнянь, виразів та обчислень. Ви можете створювати алгебраїчні вирази та рівняння та отримувати їх розв'язки.
4. **3D Моделювання.** GeoGebra дозволяє створювати 3D-моделі геометричних об'єктів та функцій, що сприяє вивченню тривимірної геометрії та аналізу просторових відношень.
5. **Статистика та ймовірність.** GeoGebra надає інструменти для статистичного аналізу та роботи з графіками, що допомагає учням вивчати статистику та ймовірність.

6. **Освітні ресурси.** В GeoGebra доступні безліч навчальних ресурсів, включаючи готові уроки та матеріали, які розроблені вчителями та математичними експертами.

GeoGebra є потужним інструментом для вивчення математики та науки, який поєднує в собі графічний калькулятор, динамічну геометрію та алгебраїчні функції, щоб допомогти учням розуміти математичні концепції через інтерактивність та візуалізацію.

Методика дослідження функцій за допомогою Geogebra

Дослідження функцій за допомогою GeoGebra може бути важливою методикою для вивчення математики та впровадження інтерактивної компоненти в навчальний процес. GeoGebra має версії для комп'ютерів та мобільних пристроїв.

Для дослідження функцій необхідно виконати такі кроки:

1. **Запуск GeoGebra.** Відкрийте програму GeoGebra та створіть новий аркуш для роботи. Перейдіть у "Графічний калькулятор".

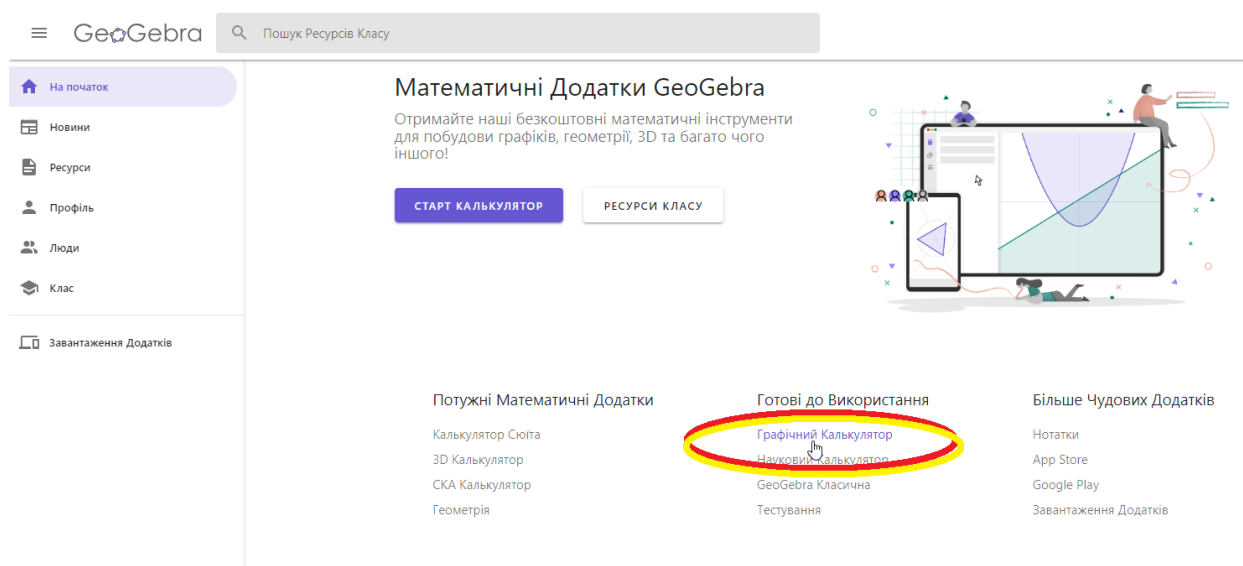


Рис. 2.1. Створення графіків

2. **Створення графіка функції.** Введіть функцію, яку ви хочете дослідити, в поле "f(x)" на графічному калькуляторі GeoGebra. Наприклад, введіть " $f(x)=x^2$ ".
3. **Розгортання графіка.** Побудуйте графік функції на аркуші. Ви побачите графік функції на координатній площині. Користуючись мишкою, можна масштабувати графік, переміщувати поле з графіком відносно екрану, демонструючи його особливості.

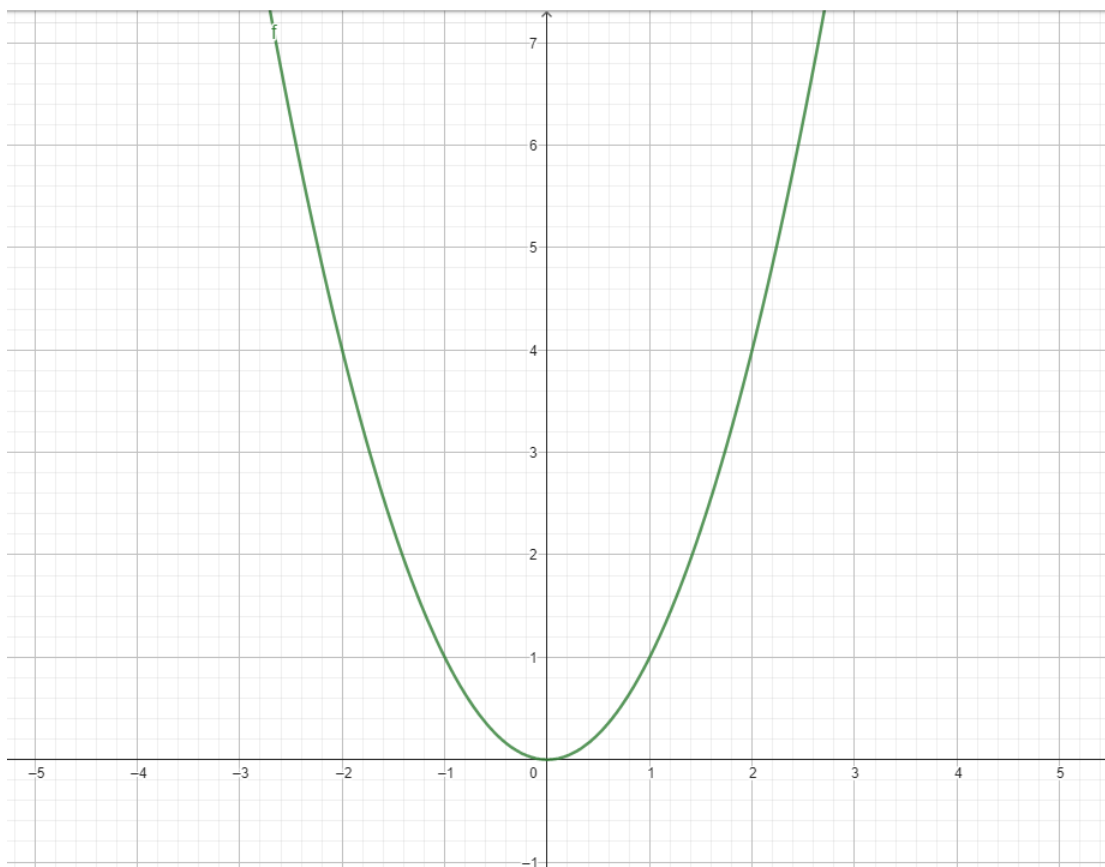


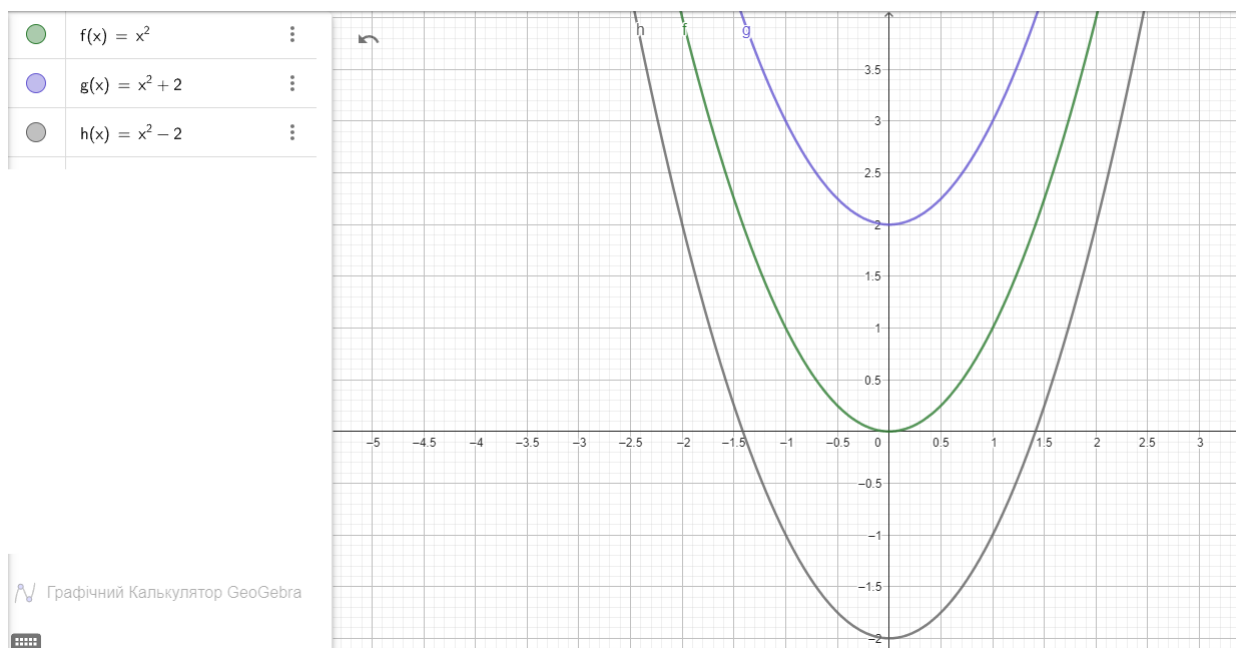
Рис. 2.2. графік квадратичної функції $f(x)=x^2$

4. **Зміна параметрів.** Використовуйте інструменти GeoGebra для зміни параметрів функції, таких як коефіцієнти або зсуви.

Наприклад, змінюючи параметри " a " у функції " $f(x) = x^2 + a$ " можемо спостерігати, як це впливає на графік (графік зміщується вгору або вниз у залежності від знака a).

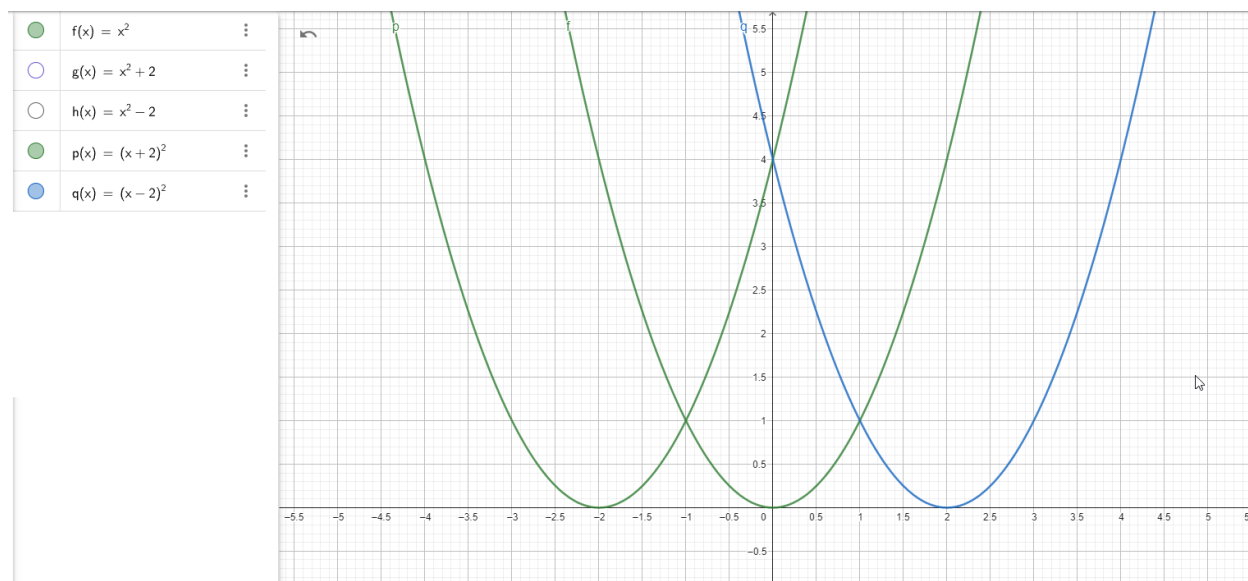
Для наочності до уже введеного графіка додаємо новий. Такий підхід дає можливість наочно спостерігати "рух" графіка.

GeoGebra Графічний Калькулятор

Рис. 2.3. Графік функцій $f(x)=x^2+a$

Подібним чином змінюючи параметри " b " у функції " $f(x) = (x + b)^2$ " можемо спостерігати, як це впливає на графік (графік зміщується вправо або вліво у залежності від знака b).

GeoGebra Графічний Калькулятор

Рис. 2.4. Графік функцій $f(x)=(x+b)^2$

Змінюючи обидва параметри (a і b), можемо отримати зміщені графіки відносно центра координат відповідно до цих параметрів.

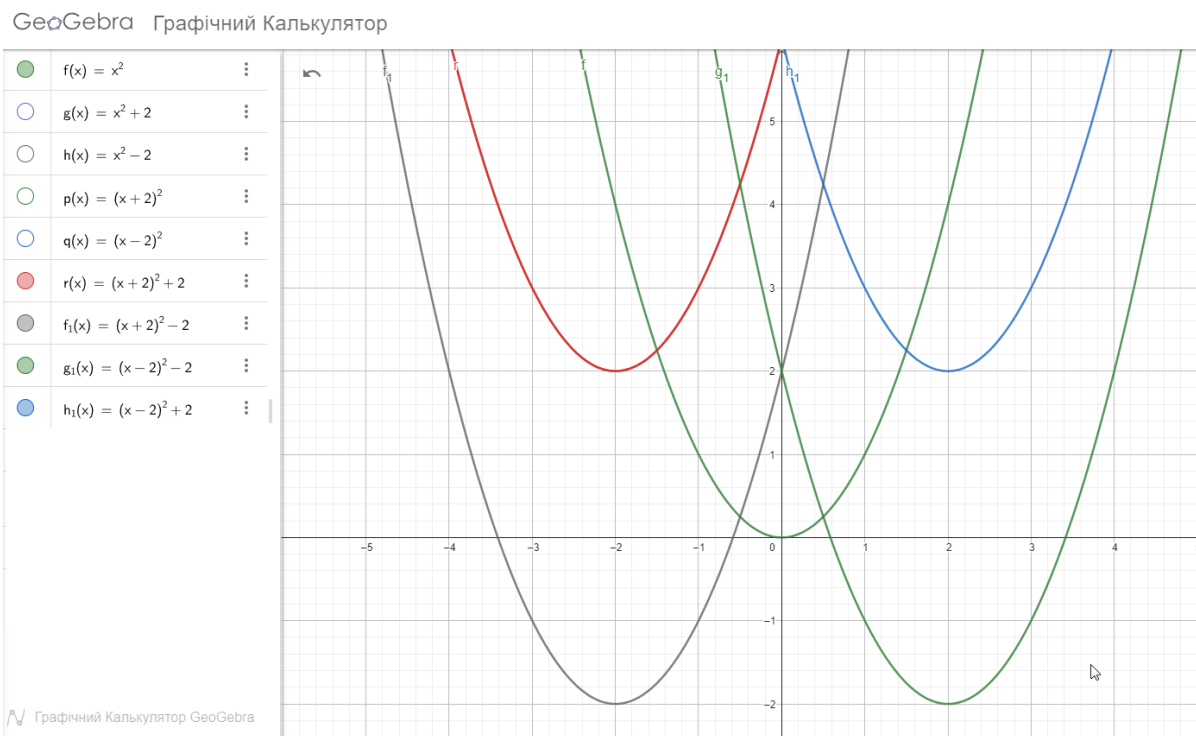


Рис. 2.5. Графік функцій $f(x)=(x+b)^2 + a$

Можемо дослідити, яким чином впливає коефіцієнт c на графік функції $f(x) = C x^2$.

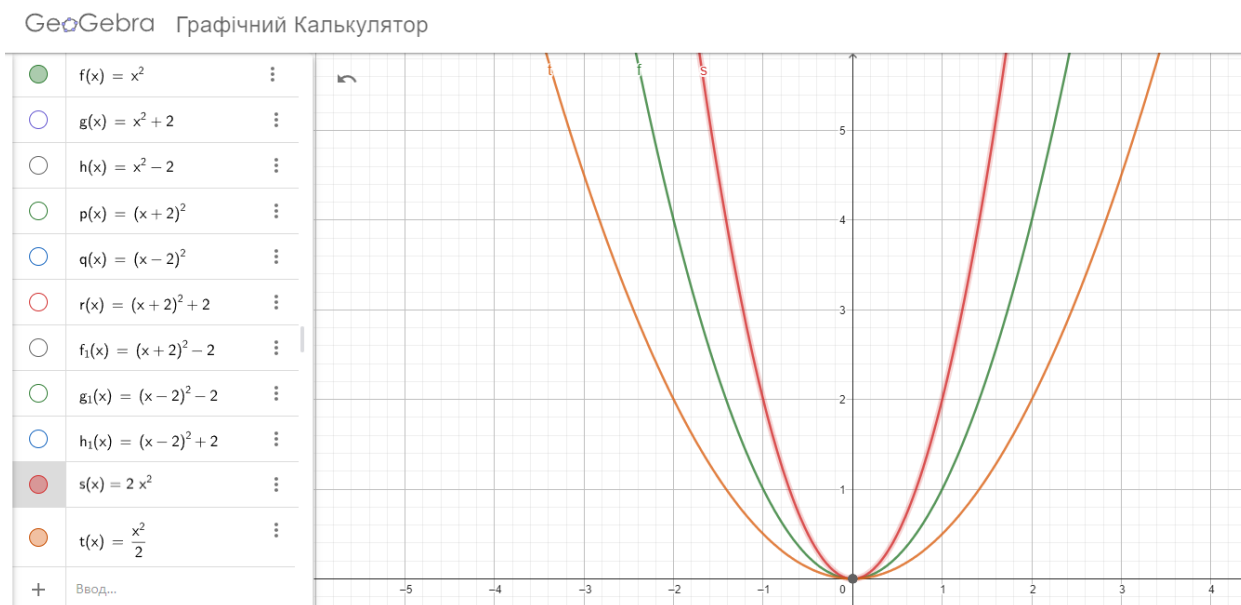


Рис. 2.6. Графік функцій $f(x)=C x^2$

Даємо можливість учням зробити висновки по перетворенню і дослідженню графіків функції.

5. **Дослідження точок перетину.** Використовуйте інструмент для знаходження точок перетину графіків, таких як корені функції.

Для цього у меню "Інструменти" вибираємо інструмент "Корені". Потім вибираємо меню "Алгебра", у якому відображаються корені рівняння функції.

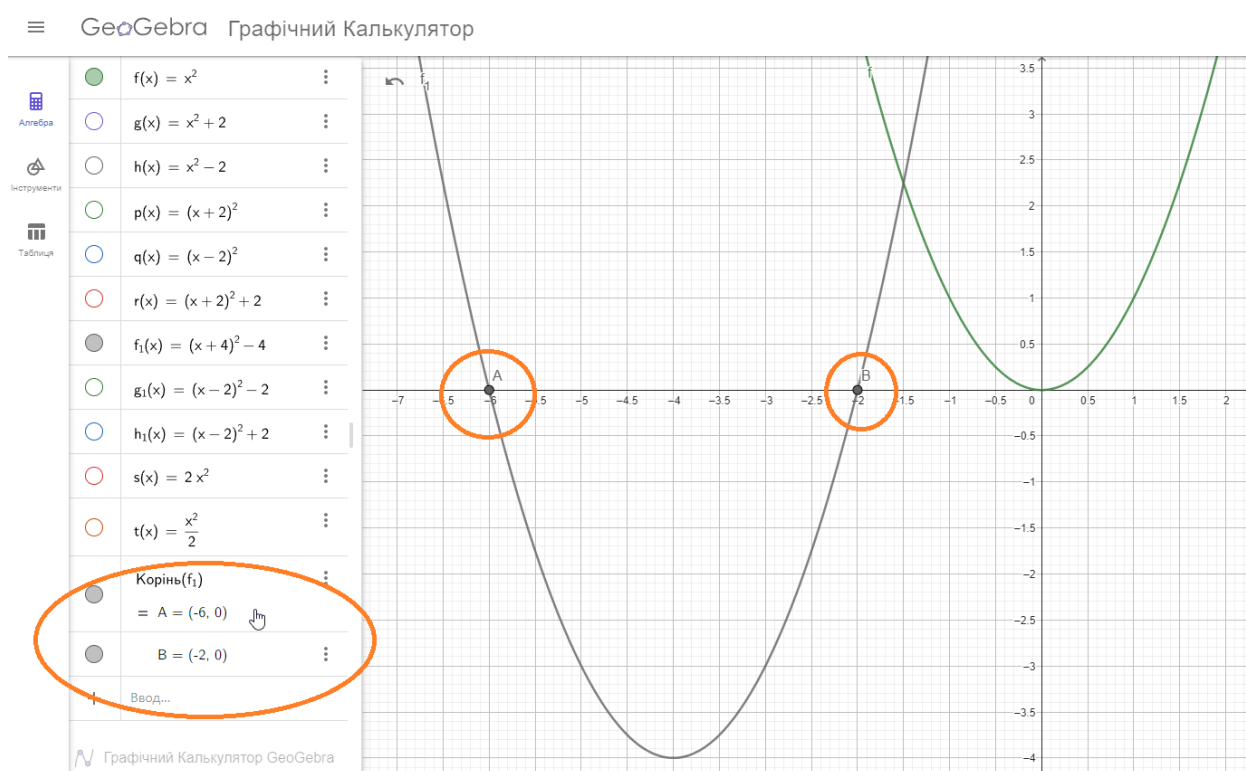


Рис. 2.7. Знаходження нулів функції

6. **Аналіз екстремумів.** Знайдіть точки екстремуму, тобто точки, де графік функції має локальний максимум або мінімум.

Для цього у меню "Інструменти" вибираємо інструмент "Екстремум". Потім вибираємо меню "Алгебра", у якому відображаються корені екстремуми функції.

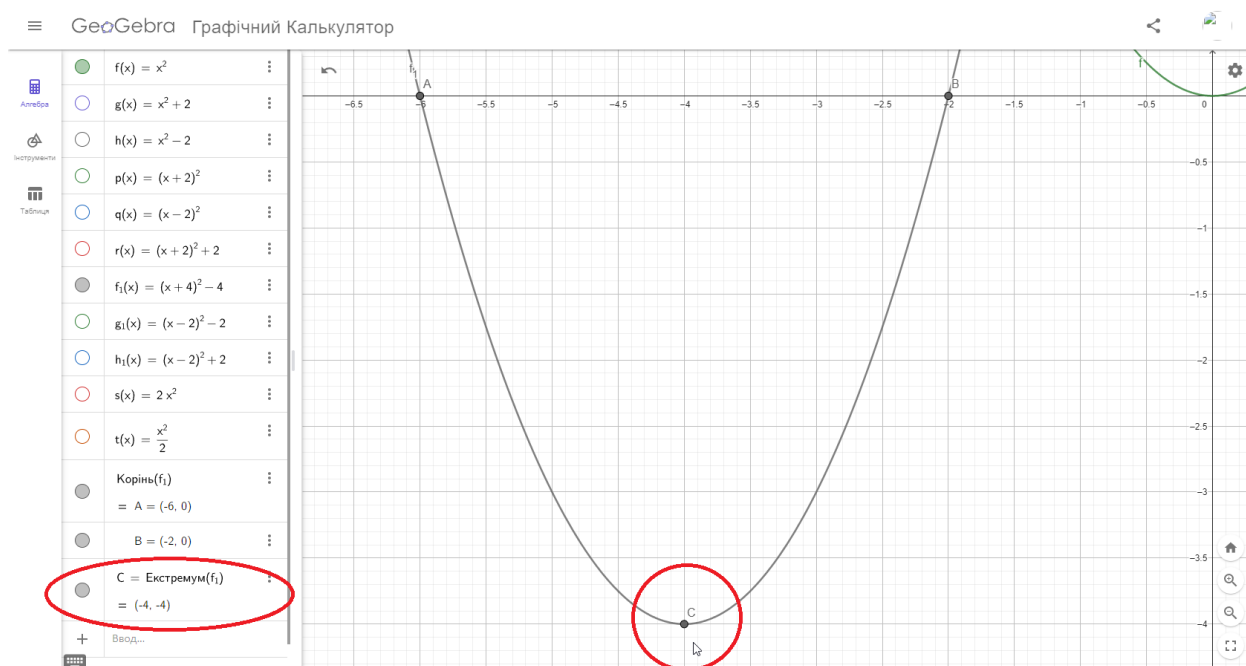


Рис. 2.8. Дослідження функції на екстремуми

7. **Вивчення асимптот.** Досліджуйте асимптоти функції та вивчайте їх властивості.
8. **Визначення областей знакосталості функції.** Використовуйте GeoGebra для визначення областей, де функція додатня $f(x) > 0$ та від'ємна ($f(x) < 0$).
9. **Визначення областей зростання та спадання функції.** Використовуйте GeoGebra для визначення областей, де функція зростає (інкременту) та де вона спадає (декременту).
10. **Створення анімацій.** GeoGebra дозволяє створювати анімації для візуалізації руху точок на графіку при зміні параметрів функції.
11. **Збереження та обмін результатами.** Збережіть ваш робочий аркуш та результати дослідження для подальшого використання або обміну з іншими.

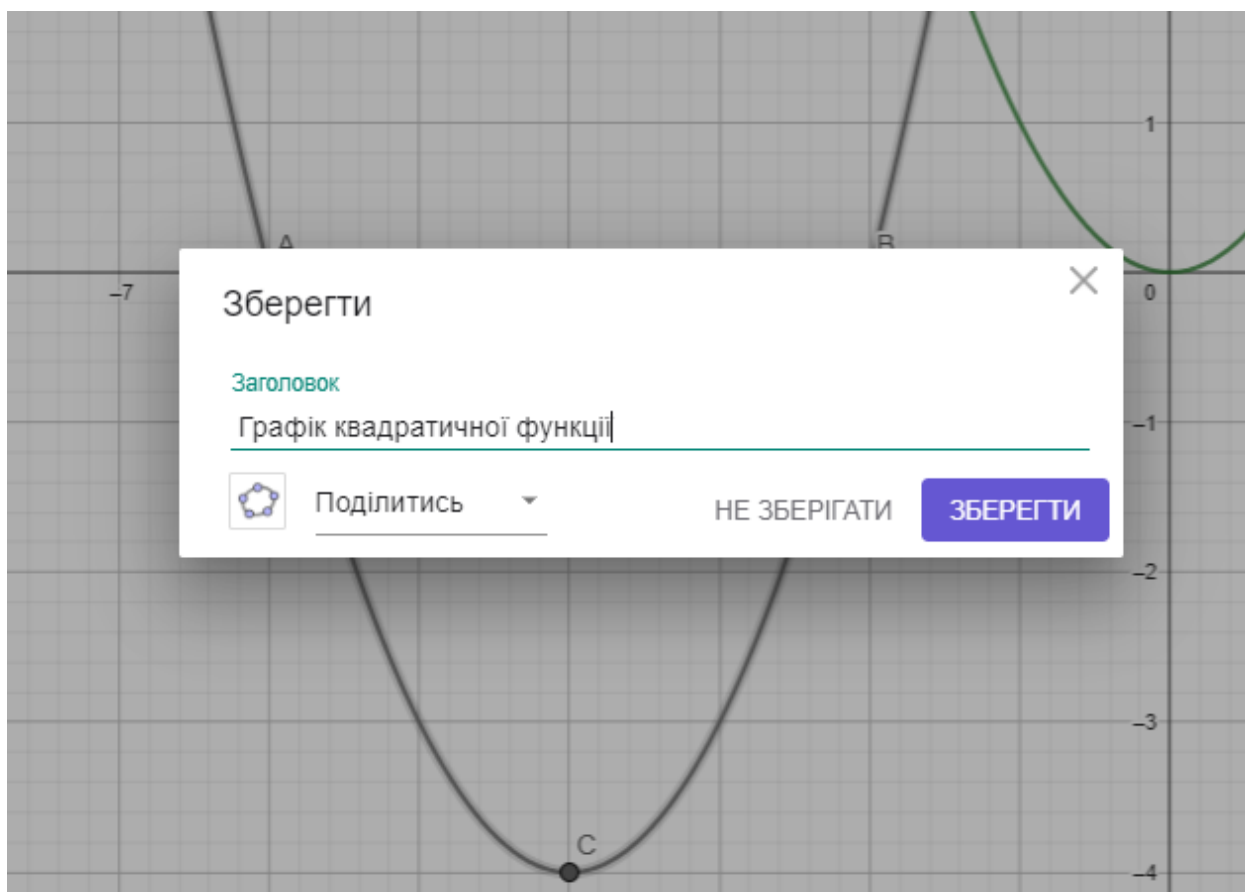


Рис. 2.9. Збереження графіка функції в бібліотеці

12. Аналіз та формулювання висновків.

Після завершення дослідження проведіть аналіз отриманих результатів та формулюйте висновки. Можна порівнювати графіки різних функцій, визначати їхні властивості та робити висновки про поведінку функцій у різних точках.

Отже, GeoGebra – потужний інструмент для дослідження графіків функцій, і важливо стимулювати активну участь учнів та надавати їм можливість самостійно досліджувати матеріал.

2.5. Практичні завдання та вправи на дослідження графіків функцій

Практичні завдання є важливим компонентом вивчення теми "Функції та їх графіки". Використання практичних завдань у процесі вивчення теми "Функції та їх графіки" робить навчання більш цікавим і ефективним. Вони допомагають учням краще зрозуміти теоретичні знання та розвинути важливі уміння і навички:

- *навчитися* застосовувати теоретичні знання на практиці. Практичні завдання дають учням можливість закріпити теоретичні знання, отримані на уроках, та перевірити їх на практиці;
- *розвивати* логічне мислення та навички розв'язання задач. Практичні завдання вимагають від учнів логічного мислення та навичок розв'язання задач. Це допомагає їм розвинути ці навички та стати більш успішними в навчанні;
- *формувати* творче мислення та вміння самостійно працювати. Практичні завдання часто вимагають від учнів творчого мислення та вміння самостійно працювати. Це допомагає їм розвивати ці навички та стати більш самостійними в навчанні.

Практичні завдання для дослідження функцій можна розподілити таким чином:

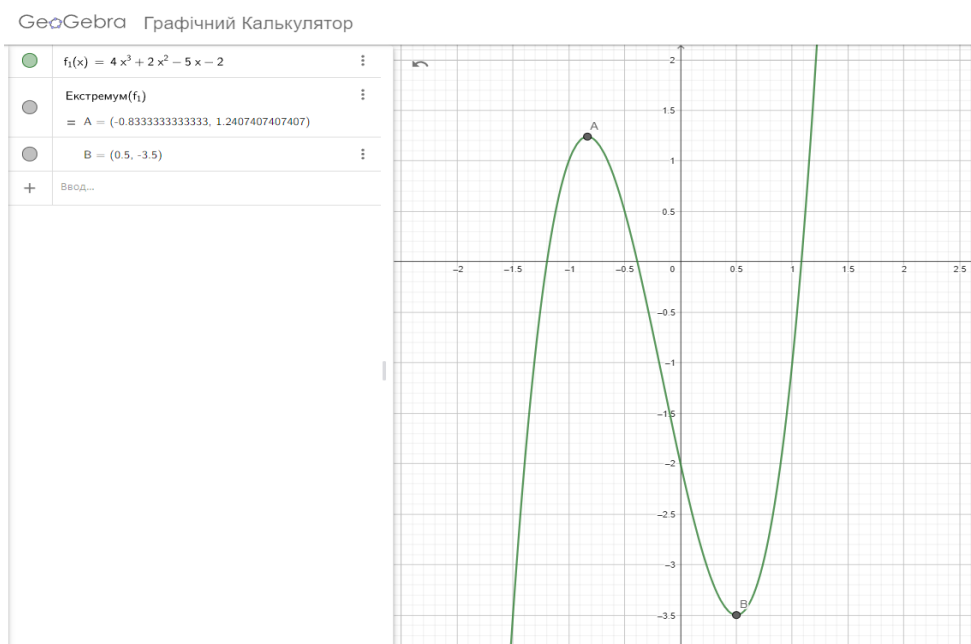
1. Побудувати графік функції за заданою формулою.
2. Знайти область визначення та область значень функції.
3. Визначити проміжки зростання і спадання функції.
4. Знайти точки екстремуму функції.
5. Визначити проміжки монотонності функції.
6. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
7. Побудувати графік функції за заданими точками.

Практичні завдання можуть бути індивідуальними, парними або груповими. Вони можуть виконуватися вручну і(або) перевірятися за допомогою комп'ютерних програм.

Наведемо приклади таких завдань.

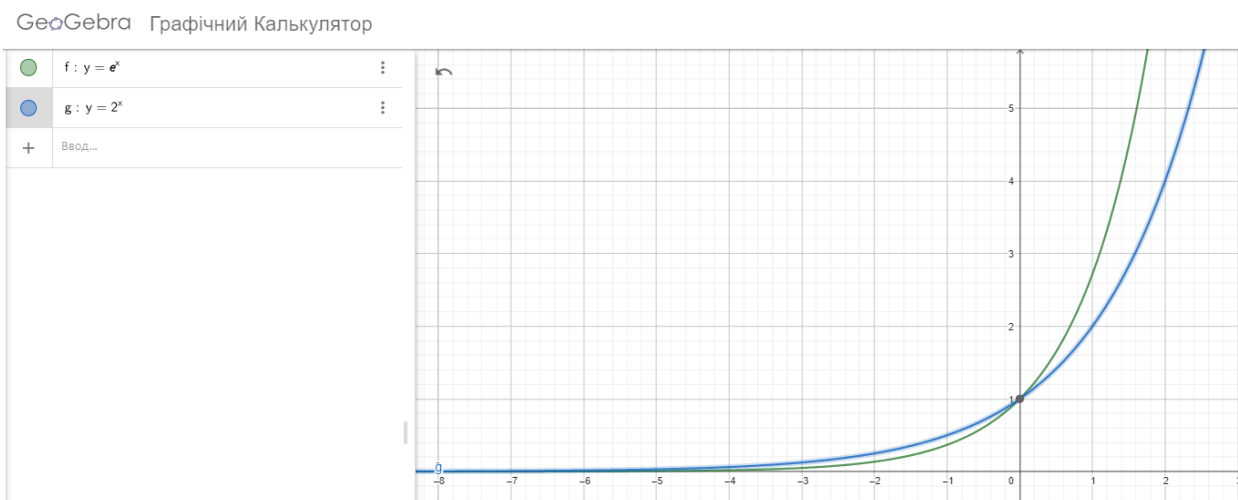
1. Знайдіть точки екстремуму функції $y = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2$.

Приклад розв'язання.



2. Порівняйте графіки функцій $y = e^x$ і $y = 2^x$. Чим вони відрізняються?

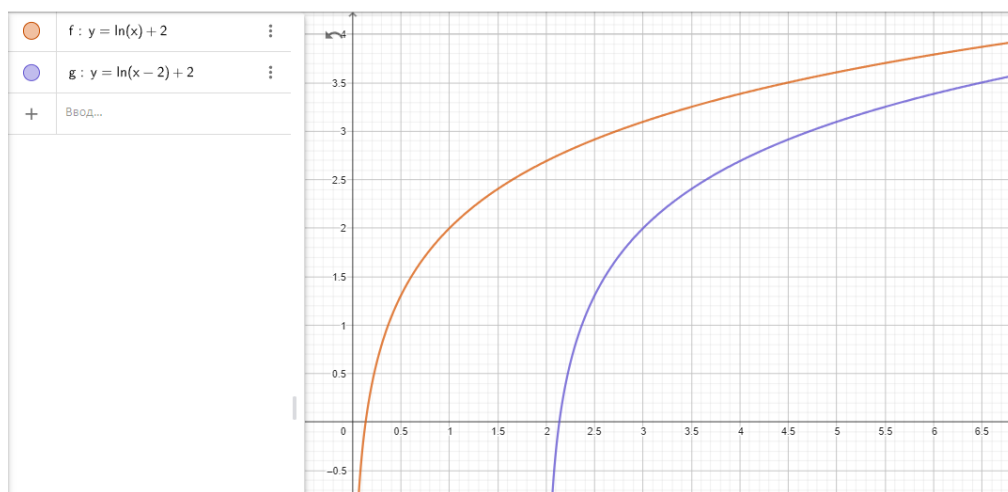
Приклад розв'язання.



3. Дослідіть функцію $y = \ln(x) + 2$. Як змінюється графік при зсуві вправо?

Приклад розв'язання.

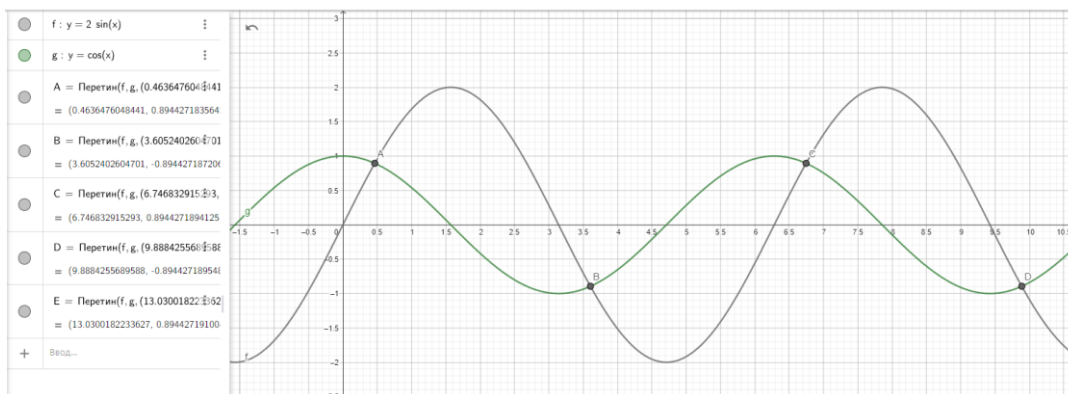
GeoGebra Графічний Калькулятор



4. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = 2\sin(x)$ і $y = \cos(x)$.

Приклад розв'язання.

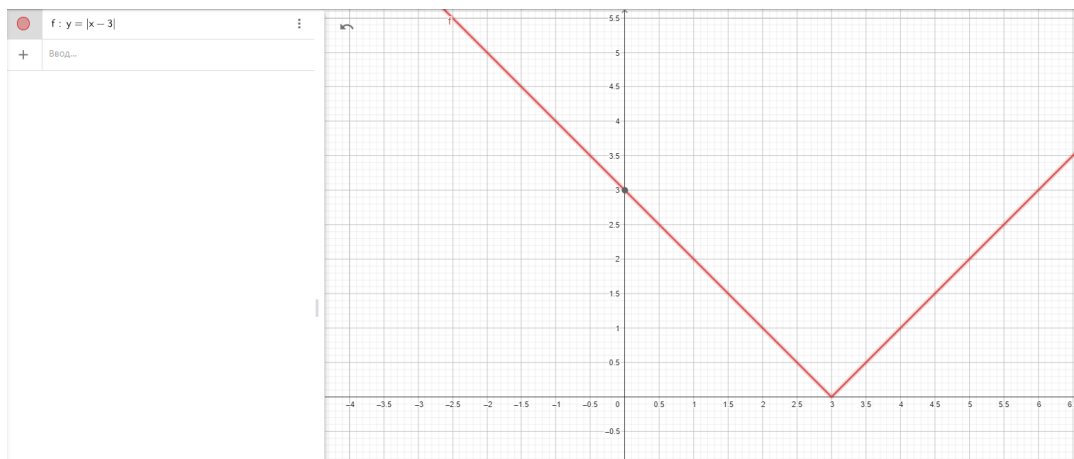
GeoGebra Графічний Калькулятор



5. Побудуйте графік функції $y = |x - 3|$ і знайдіть точку перегину.

Приклад розв'язання.

GeoGebra Графічний Калькулятор



6. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 7x - 10$ і знайдіть корені цієї функції.
7. Порівняйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = x^3$. Як вони відрізняються?
8. Дослідіть функцію $y = \sin(x)$. Як змінюється графік при збільшенні амплітуди?
9. Побудуйте графік функції $y = \ln(x)$ і визначте область визначення.
10. Дослідіть функцію $y = 1/x$. Як змінюється графік при збільшенні чи зменшенні константи?
11. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 2x - 1$.
12. Дослідіть функцію $y = \cos(2x)$. Як впливає зміна частоти на графік?
13. Визначте асимптоти для функції $y = (x^2 + 1) / (x - 2)$.
14. Порівняйте графіки функцій $y = 3\sin(x)$ і $y = 2\cos(x)$. Як вони відрізняються?
15. Дослідіть функцію $y = 1/x^2$. Як змінюється графік при збільшенні чи зменшенні значень?
16. Знайдіть точку перетину графіків функцій $y = e^x$ і $y = \ln(x)$.
17. Дослідіть функцію $y = \tan(x)$. Де вона має горизонтальні асимптоти?
18. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$ і визначте область визначення.
19. Порівняйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = |x|$. Як вони відрізняються?
20. Дослідіть функцію $y = 2^x - 1$. Де вона має горизонтальну асимптоту?
21. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = 2\sin(x)$ і $y = \cos(x)/2$.
22. Дослідіть функцію $y = e^{-x}$. Як змінюється графік при збільшенні чи зменшенні коефіцієнта?
23. Порівняйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = x^4$. Як змінюються поведінка і форма графіків?
24. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = 2\sin(x)$ і $y = \cos(x)$.
25. Дослідіть функцію $y = \sqrt{4 - x^2}$. Яка її область визначення?
26. Порівняйте графіки функцій $y = \log_2(x)$ і $y = \log_3(x)$. Як вони відрізняються?
27. Дослідіть функцію $y = \tan(x/2)$. Де вона має вертикальні асимптоти?

28. Порівняйте графіки функцій $y = 1/x$ і $y = 1/x^2$. Як вони відрізняються відносно збільшення x ?
29. Дослідіть функцію $y = 1/(x - 1)$. Як змінюється графік при зсуві вправо?
30. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = e^x$ і $y = x^2$.
31. Дослідіть функцію $y = \cos(x/3)$. Як змінюється графік при збільшенні чи зменшенні періоду?
32. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 5x - 6$.
33. Знайдіть область визначення і область значень функції $y = 1/x$.
34. Визначте проміжки зростання і спадання функції $y = \sin x$.
35. Знайдіть точки екстремуму функції $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.
36. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = x^2 - 4$ з осями координат.
37. Побудуйте графік функції $y = a^x$, де a - додатня константа.
38. Знайдіть область визначення і область значень функції $y = \lg(x+2)$.
39. Визначте проміжки зростання і спадання функції $y = e^{2+x}$.
40. Знайдіть точки екстремуму функції $y = \ln(x-4)$.
41. Визначте проміжки монотонності функції $y = 3x^2 - 5x + 2$.
42. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = x^2 - x$ з осями координат.
43. Побудуйте графік функції $y = 1/(x+2)^2$.
44. Знайдіть область визначення і область значень функції $y = 1/(x-3)$.
45. Визначте проміжки зростання і спадання функції $y = \tan(x)$.
46. Знайдіть точки екстремуму функції $y = \operatorname{ctg}(x)$.
47. Визначте проміжки монотонності функції $y = 3\cos(2x+1)$.
48. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = (1/(x-2)^3) + 5$ з осями координат.
49. Побудуйте графік функції $y = \sin(2x + \pi)$.
50. Знайдіть область визначення і область значень функції $y = 3\cos 2x$.

ВИСНОВКИ

У процесі виконання магістерської роботи на тему "Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки» у 10-му класі" були проведені дослідження, впроваджені прийоми та методи покращення методики вивчення «Функції, їхні властивості та графіки» з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Результати проведеного дослідження і практичної роботи дають можливість зробити такі висновки:

У результаті науково-методичного аналізу науково-методичної та навчальної літератури нами досліджено методику вивчення функцій та їх графіків у закладах загальної середньої освіти; значення вивчення теми для подальшого навчання. Якісне вивчення теми дозволяє учням здобути глибокі знання й навички в галузі математики, що створює підґрунтя для вивчення математики не тільки у школі, а й у перспективі в закладах вищої освіти.

Проведено аналіз п'яти підручників з математики для 10-го рівня стандарт. Усі підручники відповідають вимогам навчальної програми з математики 10-го класу та методичним вимогам до такого виду літератури.

Нами проведено аналіз наявних інформаційно-комунікаційних технологій та програмних засобів, які можна використовувати для вивчення функцій, їхніх властивостей та графіків. Проведено класифікацію ІКТ і, відповідно до неї, приведено перелік найбільш поширених та ефективних засобів слід віднести електронні навчальні платформи (Moodle, Google Classroom, Blackboard, Canvas, Edmodo тощо), електронні навчальні ресурси (Khan Academy, Coursera, edX, TED-Ed, Duolingo тощо), системи віддаленого навчання та телекомунікаційні технології (Zoom, Google Meet, Microsoft Teams, Skype), технології адаптивного навчання та аналітики (Knewton,

DreamBox, SMART Learning Suite) , інтерактивні дошки та технології (SMART Notebook, Jamboard, Miro, Padlet), технології використання штучного інтелекту (DreamBox, MATHia, Thinkster Math, Zearn Math, ChatGPT, Google Cloud AI, Cortana). Отже, інструментарій інформаційно-комунікаційних технологій дуже широкий і надає можливості здійснювати різні види освітньої діяльності педагогу, спрощуючи спілкування, розробку, оприлюднення, обробку й оцінку освітнього контенту.

Під час аналізу традиційних методики вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки» з'ясували, що застосування інформаційно-комунікаційних технологій навчання, зокрема, електронних навчальних платформ, технологій віддаленого навчання (Zoom, Meet), інтерактивних дошок (Jamboard, Miro, Padlet), математичного програмного забезпечення (GeoGebra, Desmos Calculator), електронних таблиць (**Microsoft Excel або Google Sheets**) та віртуальних середовищ (**MATLAB**), допомагає зрозуміти складні математичні терміни та наочно представити особливості функцій та їх графіків. Використання візуалізації та демонстраційних матеріалів, зокрема графіків функцій у математичному калькуляторі Geogebra, допомагає наочно представити графіки функцій, їх особливості, перетворення тощо.

Аналіз математичних пакетів, таких як GeoGebra та Desmos Calculator, дозволяє зробити висновок про їх доцільне й раціональне застосування у процесі вивчення теми «Функції, їхні властивості та графіки». Програмне забезпечення сприяє:

- візуалізації математичних концепцій – сприймати графіки функцій в реальному часі; бачити, як різні параметри впливають на форму графіків;
- інтерактивності – програма надає можливість миттєво змінювати параметри функцій, досліджувати різні варіанти та спостерігати, як це впливає на графіки;

- варіативності завдань – вчителі можуть створювати різноманітні завдання для учнів, які дозволяють досліджувати різні види функцій і властивості графіків;
- розвитку дослідницьких навичок – учні можуть самостійно досліджувати функції, вирішувати задачі та формулювати гіпотези, спираючись на результати, які вони бачать на екрані;
- підвищенню математичної грамотності – використання GeoGebra сприяє розвитку математичної грамотності учнів, бо учні навчаються працювати з математичними об'єктами, аналізувати результати та робити висновки;
- підготовці до навчання у закладах вищої освіти – вивчення функцій та їх графіків з використанням GeoGebra може бути підготовкою до більш складних математичних курсів, де важливо володіти візуалізацією та аналітичними навичками.

Нами було запропоновано 50 задач для дослідження функцій, які у процесі вивчення теми "Функції та їх графіки" перетворюють навчання у цікавий дослідницький процес. Дослідження функцій відповідно до запропонованих задач за допомогою Geogebra робить навчання більш цікавим і ефективним. Вони допомагають учням краще зрозуміти теоретичні знання та розвинути важливі уміння і навички: навчитися застосовувати теоретичні знання на практиці; розвивати логічне мислення та навички розв'язання задач; формувати творче мислення та вміння самостійно працювати.

Отже, впровадження інформаційно-комунікаційних технологій, методів, підходів та інструментів в освітній процес дозволяє створювати інтерактивні навчальні матеріали, що полегшують вивчення функцій та графіків; дозволяє індивідуалізувати навчальний процес, адаптувати матеріал до рівня кожного учня та надавати додаткові матеріали для тих, хто швидше вивчає чи потребує додаткової підтримки; сприяє розвитку навичок

використання сучасних технологій, аналізу даних, проблемного мислення та комунікації; підтримує впровадження активного навчання, де учні більше взаємодіють з матеріалом та один з одним, що сприяє засвоєнню матеріалу на глибшому рівні; сприяє підвищенню якості математичної освіти та підготовки учнів до подальших етапів навчання; загалом сприяє підвищенню ефективності освітнього процесу з математики у закладах загальної середньої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексеева І. В. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум / І. В. Алексеева, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федеорова. К.: НТУУ «КПІ», 2012. 176 с.
2. Алілуйко А.М. Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб. / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. Тернопіль: ТНЕУ, 2017. 148 с.
3. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
4. Бевз Г.П. Методи навчання математики: навч. метод. посіб. К.: Генеза, 2010. 117 с.
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч.посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. К. : Вища шк., 1989. 367 с.
6. Бубняк Т.І. Вища математика / Т.І. Бубняк Навчальний посібник.- Львів: «Новий Світ-2000», 2007. 436 с.
7. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навчальн. посіб. Курпа Л.В., Кашуба Ж.Б., Лінник Г.Б.; за ред. проф. Л.В. Курпи Х.: НТУ «ХПІ», 2008. 528 с.
8. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 1 / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. К.: Либідь, 2003. 400 с.
9. Вікові особливості учнів [Електронний ресурс]. URL: http://skola36.ucoz.ru/vikovi_osoblivosti_uchniv.doc
10. Графічний калькулятор Desmos [Електронний ресурс]. URL: <https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>
11. Грохольська А.В., Яценко С.Є. Методика навчання математики в старшій та вищій школах. Частина І.: К.: НПУ імені М.П.

- Драгоманова, 2011. 310 с.
12. Державний стандарт базової середньої освіти [Електронний ресурс]. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
 13. Державні стандарти загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti>
 14. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології : навч. посіб. / І.М. Дичківська. К. : Академвидав, 2004. 352 с.
 15. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. . Юрик. К: А. С. К., 2006. 647 с.
 16. Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (Алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб, для підготовч. від-нь. К.: МАУП, 2003. 304 с.
 17. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: посібник для вчителів. К.: Техніка, 1997. 304 с.
 18. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. 3-тє вид. К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. 315 с.
 19. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL: http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/3315/14_11_2019_new_IKTN_2009.pdf?sequence=1&isAllowed=y
 20. Інформаційно-комунікаційні технології в освіті: словник. К.: ЦП Компринт, 2019. 134 с.
 21. Інформаційно-комунікаційні технології в освіті: словник. К.: ЦП Компринт, 2019. 134 с.
 22. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-

- го кл. закл. заг. серед, освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. Київ : Генеза, 2018. 448 с.
23. Класифікація інформаційно-комунікаційних технологій навчання / О. Воронкін // Вища освіта України. 2015. № 2. С. 95-102. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vou_2015_2_16
24. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. К.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
25. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П. Нелін. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.
26. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М.І.Бурда, Т.В.Колесник, Ю.І.Мальований, Н. А. Тарасенкова. К.: УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
27. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. Київ:Генеза, 2018. 384 с.
28. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018. 256 с.
29. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
30. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018. 512 с.
31. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10

- кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018. 400 с.
32. НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika.-riven-standartu.docx>
33. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 272 с.
34. Про затвердження Порядку конкурсного відбору підручників (крім електронних) та посібників для здобувачів повної загальної середньої освіти та педагогічних працівників. Наказ МОН України №1001 від 21.09.2021 р. [Електронний ресурс]. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/z1483-21#n17>
35. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. – К.: Вища школа, 2006. 512 с.
36. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. К.: Вища шк., 2006. 582 с.
37. Стеклов В. К. Нові інформаційні технології: Транспортні мережі телекомунікацій. К.: Техніка, 2004. 486, с.
38. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.-метод. посібн. / О.І.Пометун, Л.В.Пироженко. За ред.. О.І.Пометун. К.: Видавництво А.С.К., 2004. 192 с.
39. GeoGebra [Електронний ресурс]. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>
40. GeoGebra [Електронний ресурс]. URL: <https://www.geogebra.org/>