МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка

Кафедра фізико-математичної освіти та інформатики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

Прикладні задачі з алгебри і початків аналізу як засіб підвищення математичної культури старшокласників

Виконала:
Ворона Тамара Леонідівна
(прізвище, ім'я, по батькові)
014 Середня освіта,
Середняо світа (Математика)__
(спеціальність, освітня програма)

Науковий керівник:
Канд. пед наук, ст. викладач
(науковий ступінь, учене звання, посада)
Л. Ф. Сухойваненко
(ініціали, прізвище)

Допущено до захисту
"___"__________ 20___р.

Завідувач кафедри
__________Р.П. Кухарчук_
(підпис) (ініціали, прізвище)

Дата захисту: «___» _____20__ р.

Оцінка_______________
Підписи членів ЕК:
____
____
____

Глухів - 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку суспільства відбувається стрімке зростання обсягу наукової інформації і високоінтелектуальних технологій виробництва. Тому перед закладами загальної середньої освіти стоїть важлива задача: підготувати молодь до життя, тобто навчити їх застосовувати отримані знання на практиці, швидко адаптуватися до нестандартних ситуацій. Освітній заклад повинний дати випускнику не тільки суму базових знань, сформувати корисні і необхідні навички, а й сформувати у них вміння самостійно здобувати потрібну інформацію, застосовувати на практиці нові знання, аналізувати їх, приймати виважені рішення. Це, у свою чергу, вимагає істотних змін як у цілому в системі освіти, так і в оновленні сучасного змісту нової української школи.

Математика є загальнокультурною базою для засвоєння системи принципів і структур дисциплін, що вивчаються в закладах освіти. Тому математичну освіту необхідно орієнтувати на розвиток предметного мислення, яке передбачає вміння створювати математичні структури, аналізувати їх властивості, а також інтерпретувати результати аналізу. Цього можна досягти тільки через формування в учнів уміння бачити й застосовувати математику в реальному житті; розуміння змісту і методів математичного моделювання; вміння будувати математичну модель, дослідження її методами математики; інтерпретування отриманих результатів; формування високого рівня математичної культури учнів.

У новій програмі з математики [36] особлива увага акцентується на змісті математичної освіти, у якому максимально враховується прикладна спрямованість освітнього процесу як засобу підвищення математичної культури учнів. Прикладні задачі – один з дієвих і ефективних засобів підвищення математичної культури учнів, але їх вкрай недостатньо в чинних шкільних підручниках з алгебри і початків аналізу.

Прикладна спрямованість шкільного курсу математики як засіб підвищення математичної культури задекларовано у «Концепції математичної освіти 12-річної школи» [28], у «Державному стандарті базової і повної середньої освіти: освітня галузь Математика» [20], у програмах з математики для базової школи [37] та в інших документах.

Так, у державному стандарті базової і повної середньої освіти [20] зазначено, що завданнями освітньої галузі є: розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури; формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів; розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті» [20].

Проблема підвищення математичної культури учнів досліджувалася за такими напрямами: методолого-теоретичні засади формування математичної культури особистості висвітлені в працях О. Анісімова, Л. Вороніної, Т. Іванової, Є. Лодатко, Л . Моісєєвої, В. Снєгурової; теоретико-методичні аспекти формування математичної культури старшокласників досліджувалися О. Артебякіною, Г. Булдик, Т. Захаровою, І. Кулешовою, О. Рассохою та іншими; підготовка майбутніх учителів до формування математичної культури учнів висвітлені в працях Є. Лодатко, С. Архипової; специфіка використання окремих засобів формування математичної культури учнів загальноосвітніх навчальних закладів досліджували А. Айбазова, П. Ю. Батчаєва, І. Захарова, А. Жохов, В. Снєгурова та інші. На розробку технологій розв'язування задач прикладного змісту були спрямовані наукові дослідження Г. Возняк, М. Ігнатенка, З. Слєпкань, Л. Соколенко, А. Прус, Ю. Ткача, В. Швеця та інших. Не зважаючи на велику кількість досліджень щодо підвищення математичної культури учнів, залишається не достатньо дослідженою проблема підвищення математичної культури старшокласників засобом прикладних задач.

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити ефективність використання задач прикладного змісту у процесі підвищення математичної культури старшокласників.

Об'єкт дослідження: навчальний процес з алгебри і початків аналізу в профільній школі.

Предмет дослідження: прикладні задачі як засіб підвищення математичної культури старшокласників.

Для досягнення мети роботи поставлені такі **завдання:**

1. Проаналізувати літературні джерела з теми дослідження.
2. Розробити критерії та рівні сформованості математичної культури старшокласників.
3. Виявити рівні сформованості математичної культури старшокласників.
4. Розробити систему роботи з підвищення математичної культури старшокласників засобом прикладних задач та експериментально перевірити її ефективність.
5. Надати методичні рекомендації вчителям щодо підвищення математичної культури старшокласників засобом прикладних задач.

Методи дослідження:

теоретичні методи – теоретико-методологічний аналіз проблеми, систематизація психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження, порівняння та узагальнення даних;

емпіричні методи – педагогічний експеримент (констатувальний, формувальний, контрольний етапи);

статистичні методи: математична обробка результатів педагогічного експерименту.

Апробація дослідження: 1) за матеріалами дослідження опубліковано тези на тему: «Прикладні задачі з алгебри і початків аналізу як засіб підвищення математичної культури старшокласників» у Всеукраїнському збірнику наукових праць студентів «Альманах QN», 2023 р., випуск 13; 2) прийнято участь у Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції молодих дослідників «Інновації в науці: сучасний вимір» (04.05.2023 р., м. Суми).

Наукова новизна одержаних результатів полягає у теоретичному обґрунтуванні аспектів використання задач прикладного змісту як засобу підвищення математичної культури старшокласників, уточненні їх значення та функції в курсі математики основної школи.

Практичне значення дослідження: розроблена методика використання задач прикладного змісту з алгебри і початків аналізу, підібрані задачі прикладного змісту. Матеріал дослідження можна використовувати у педагогічній практиці роботи вчителів математики базової школи, навчальному процесі вищих навчальних закладів, у післядипломній підготовці та перепідготовці педагогічних кадрів.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 68 найменувань і 10 додатків. Робота містить 12 таблиць, 11 графіків. Загальний обсяг роботи становить 123 сторінки, із них 73 сторінок основного тексту.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕТИ ПРОБЛЕМИ ПІДВИЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТАРШОКЛАСНИКІВ

1.1. Огляд літературних джерел з проблеми підвищення математичної культури старшокласників

Ю. Холін у статті «Завтрашній українець: розумник чи неук?» писав «Якщо Україні потрібне населення розумне, здатне самостійно й критично обмірковувати перспективи суспільного розвитку, яке вміє не лише застосовувати, але й створювати високі технології, то неприпустимо …. руйнувати математичну і природничу освіту у середній школі» [65], це ж стосується і профільної школи. Сьогодні слід зрозуміти, що математична культура – це необхідний компонент сучасного інформаційного суспільства [35] і стимулювати її розвиток можна лише приділяючи гідну увагу математичній складовій в національній системі освіти.

Розглянемо різні підходи до тлумачення поняття «математична культура».

Математична культура – складова частина загальнолюдської культури.

Протягом всього періоду існування людства проблема культури мала першочергове значення, оскільки вона була основним чинником розвитку суспільств. Культура відбиває якісну характеристику суспільного життя, характеризує специфічний спосіб життєдіяльності людей, який зафіксований в результатах їх діяльності, у системі соціальних норм [21].

У академічному тлумачному словнику української мови поняття «культура» тлумачиться різнобічно, а саме: як «сукупність матеріальних і духовних, нематеріальних цінностей, створених людством протягом його історії; як рівень розвитку суспільства у певну епоху; те, що створюється для задоволення духовних потреб людини» [1].

Культура свідчить про освіченість, вихованість людини, ступінь досконалості господарської або розумової діяльності; її можна розуміти як алгоритми поведінки людини, який надає цій поведінці сенс і значимість [1].

Поняття «культура» – досить обширне, воно поєднує в собі декілька галузей. Сюди входять наука, освіта, мистецтво, мораль, уклад життя та світогляд тощо. При класифікації культур за прикладними галузями, Є. Лодатко виділив матеріальну, духовну, культуру людини (політичну, економічну, правову, моральну, інформаційну культури людини), фізичну культуру [35].

Математика – одна із давніх наук, вона допомагає краще пізнати і описати світ, на протязі всього розвитку людства вона виступає невід'ємною і важливою складовою його культури, елементи якої учень засвоює за рахунок мисленнєвої діяльності із ідеальними моделями. Математика відображає реальність за допомогою математичних понять, знаково-символьної системи, виконуючи тим самим роль універсальної мови науки, інструменту опису світу. Отже, математичні поняття, аксіоми, теореми і теорії мають своїм джерелом саме реальність.

Термін «математична культура» ввели для того, щоб можна було визначити на скільки особа оволоділа математичними знаннями та як математика пливає на розвиток особистості. Поняття математичної культури значно ширше, ніж просто система математичних знань, вмінь та навичок. Вона слугує інтегральною характеристикою особистості, яка відображає її здатність адекватно сприймати математичну складову наукової картини світу і вибудувати відповідно цьому сприйманню власну освітню, професійну або суспільну діяльність, створювати свої морально-етичні та естетичні ідеали [23].

Аналіз наукових джерел показав, що поняття «математична культура» не має однозначного тлумачення і єдиної структури. Його розглядають як: складову професійного становлення, професійної культури особистості (Т. Захарова, І. Кулешова, З. Акманова); інтегративний результат взаємодії культур (Д. Біджієв, О. Пустобаєва, О. М. Рассоха, В. М. Худяков); взаємодію особистісних і професійних якостей (З. Заріпова); систему засвоєних об’єктів загальної математичної культури (В. Снєгурова, С. Розанова, Г. Булдик).

Г. Зинченко у праці «Математична культура як інноваційна складова професійної компетентності майбутнього вчителя математики» трактує дане поняття як інтегративне особистісне утворення, яке має достатній запас математичних знань, переконань, навичок і норм діяльності [23]. До компонентів математичної культури авторка віднесла математичний тезаурус, ситуацію, філософію математики, засоби математики у професійно-педагогічній діяльності, рефлексію і готовність до творчого саморозвитку [23].

М. Козяр під математичною культурою розуміє інтегральне утворення особистості фахівця, в основі якого лежить математичне пізнання, математична мова й мислення, які відображають технологію професійної діяльності; при цьому були виділені когнітивний, мотиваційно-ціннісний, операційно-діяльнісний компоненти математичної культури [28].

На думку М. Третяк, [60] індивідуальна математична культура – це складна система взаємнозалежних, взаємнообумовлених якостей особистості, елементами яких виступають математичні знання, уміння та навички, уподобання, естетичні уподобання і навіть деякі частинні (по відношенню до математичної) культури, наприклад, культура математичного мовлення, графічна, знаково-символьна культура, культура мислення, комунікаційна математична культура тощо.

В. Полонський [49] до складових математичної культури також відносить математичну грамотність (термінологічну грамотність, обчислювальну, графічну культури) та навички математичного моделювання. Математичне моделювання він додав тому, що, на його думку, ключове завдання математичної освіти – навчити учнів інтерпретувати будь-які події чи ситуації мовою символів та розв’язувати її математичними засобами, зокрема і моделюванням.

В. Пелагейченко зауважує, що математична культура – це не тільки система набутих знань, умінь і навичок, які складають загальну культуру учня, вміння вільно ними оперувати у практичній діяльності, а й складна система, що утворюється в результаті взаємодії культур, яка свідчить про:

– рівень математичного розвитку (знання, самоосвіту, мовну культуру);

– рівень сформованості математичного мислення;

– вміння грамотно пояснити всі виконані дії;

– наявність уявлень про специфічні математичні поняття та операції, можливості математики для сучасної науки і практики;

– розуміння внутрішніх зав'язків між різними розділами математики [48].

Основними компонентами математичної культури вона вважає математичні знання та вміння, математичну самоосвіту, мову, цілісний науковий світогляд, математичне мислення.

На думку науковця, формування математичної культури – це цілеспрямований організований процес навчання, під час якого учні оволодівають математичними знаннями, уміннями, навичками; набувають досвід математичної, пізнавальної, комунікативної, творчої, емоційно-вольової діяльності, що необхідна для їх успішного навчання і виховання, для самостійного опанування новими математичними знаннями і вміннями у майбутній професійній діяльності [48].

Однією із основних складових математичної культури є математична грамотність, в основі формування якої лежать математичні здібності [23].

Фахівці з розвинутими інтелектуальними, зокрема математичними здібностями, потрібні суспільству завжди, оскільки вільне володіння математичними методами необхідно у всіх галузях народного господарства. Тому підвищення рівнів розвитку математичної освіти, формування творчої особистості з дослідницьким мисленням – важливі завдання, що стоять перед сучасною освітою, зокрема профільної школи.

Проблема здібностей – одна із найбільш складних і найменш розроблених у психології.

Проблемі здібностей приділяли увагу І. Бех, Л. Виготський, С. Рубінштейн, В. Шадріков, В.Дружинін та багато інших відомих психологів.

Завдяки їх розробкам створено низка класифікацій здібностей особистості. Науковці виділили природні, тобто біологічно обумовлені здібності, і специфічні здібності (історичного та культурного походження).

Деякі психологи [47; 53] вважають, що здібності людей пов'язані з соціальними умовами у суспільстві. Свою думку вони обґрунтовують, спираючись на дослідження Дж. Брунера, М. Коула, С. Скрібнера; А. Лурії.

У психології не має єдиного погляду до тлумачення поняття «здібності». Так, Б. Теплові вважає здібності індивідуально-психологічними особливостями, які відрізняють одну людину від іншої [47].

У психологічному словнику здібності тлумачяться як якість, вміння, досвід, майстерність, талант [66].

С. Максименко у підручнику із загальної психології наводить таке означення:

«Здібності − це своєрідні властивості людини, її інтелекту, що виявляються в навчальній, трудовій, науковій та іншій діяльності і є необхідною умовою її успіху» [22, с. 376].

Найбільш точним і повним, на наш погляд, є останнє означення.

За своїм спрямуванням здібності бувають загальними (дозволяють добре оволодіти різною діяльністю) та спеціальними (найкращий результат досягається в якій-небудь одній галузі). За видом діяльності та сферою розвитку здібності бувають [22]:

- інтелектуальними (розумовими) (високий результат досягається у пізнавальній діяльності);
- академічними (навчальними) (посилюють інтерес до учіння та забезпечують високий результат у навчанні з будь-якого предмету);
- технічними (високі результати досягаються у технічному напрямі);
- науково-дослідницькими (характеризують схильність до проведення прикладних та наукових досліджень);
- творчими здібностями (творчість простежується у будь-яких видах діяльності та навчальних дисциплінах);

– комунікативними (соціально-етичними) (забезпечена успішність спілкування у різних системах).

Для того щоб учень проявив математичні здібності, у нього повинні бути інтелектуальні, академічні, науково-дослідницькі та творчі здібності.

Для розвитку творчих здібностей в учнів, необхідно щоб у них були наявні задатки (індивідуальні здібності) – «природжені, успадковані або набуті зачатки яких-небудь рис, здібностей або властивостей» [1].

Для розвитку математичних здібностей треба враховувати індивідуальні особливості учнів та застосовувати системний підхід до вивчення математики.

На думку В. Бевз, математичні здібності – це здатність учня утворювати на математичному матеріалі узагальнені, згорнуті, гнучкі й обернені асоціації та їх системи і відносить їх до індивідуально-психологічних особливостей, які забезпечують високу продуктивну математичну діяльність, з використанням нестандартних шляхів і методів, в результаті якої створюється порівняно новий (або якісно новий) продукт розумової математичної діяльності [7].

До математичних здібностей В. Бевз віднесла [7]:

1) здібності формалізувати математичний матеріал, відділяти форми від змісту, абстрагувати від конкретних кількісних відношень і просторових форм та оперувати формальними структурами відношень і зв’язків;

2) здібності до узагальнювання математичного матеріалу, виокремлення головного, відволікання від неістотного, бачення загального у зовні різному;

3) здібності оперувати числовою та знаковою символікою;

4) здібності послідовно, правильно розчленовувати логічне міркування, коли потрібно довести, обґрунтувати, зробити висновок;

5) здібності до скорочування міркувань, мислення згорнутими структурами;

6) здібності переходу з прямого на обернений хід думки;

7) гнучкість мислення, здібності переключатися від однієї операції до іншої, звільнятися від впливу шаблонів і трафаретів, які сковують (ця особливість мислення є дуже важливою під час творчої роботи математика);

8) математична пам’ять (пам’ять на узагальнення, формалізовані структури, логічні схеми);

9) здібності до просторових уявлень і уяви, які необхідні в геометрії.

Р. Павелків нагадує, що на рівень розвитку здібностей впливають:

1) якості знань і умінь, міри їх об’єднання в єдине ціле;

2) природні задатки людини, якості природні механізми елементарної психічної діяльності;

3) «тренованість» мозкових структур, які беруть участь у здійсненні пізнавальних і психомоторних процесів [47].

Але, головним фактором у розвитку математичних здібностей є зацікавленість школяра математикою. Якщо в учня відсутній інтерес до математики, то навіть гарні здібності не зможуть забезпечити успішне оволодіння цією наукою. Крім того, розвитку математичних здібностей сприяє систематична робота, врахування індивідуальних особливостей учнів.

Для розвитку математичних здібностей в учнів, які їх не мають, В. Бевз пропонує вчителю математики використовувати у навчальному процесі рівневу диференціацію з урахуванням психологічних особливостей учнів. Виконання посильних завдань вселяє в учня впевненість у своїх силах [7].

Також для успішного навчання учню треба мати гарно розвинену пам’ять. При вивченні математики виробляється особливий вид пам’яті, яка спрямована на узагальнення, створення логічних схем, формалізованих структур, розвиток просторових уявлень.

Для розвитку пам’яті Р. Павелків пропонує поділити усі прийоми запам’ятовування на два типи: мнемотехніку (основа методу – вербально-логічне мислення) та ейдетику (в основі – конкретно-образне мислення) [47].

У процесі розвитку математичних здібностей вагоме місце належіть розвинутому мисленню, тобто, необхідно, щоб у процесі навчання математики була задіяна не лише пам'ять, а й ефективно працювало мислення.

Мислення − це психічний процес пошуку і відкриття істотно нового, воно тісно пов'язано з мовленням. Мислення виникає під час практичної діяльності з чуттєвого пізнання і далеко виходить за його межі [47]. Із цього визначення витікає, що процес мислення в навчальній діяльності − це процес пізнання.

Математичні здібності відносяться до складових творчих здібностей.

Творчі здібності, творче мислення, дослідницькі здібності розвиваються під час дослідницької діяльності [7]. Дослідницьким здібностям притаманно:

– нешаблонність мислення (вміння самостійно встановлювати об'єкт дослідження конкретної ситуації, аналізувати її);

– критичність мислення (вміння знаходити невідповідності, невирішені питання, на їх основі поставити проблему; обрати раціональний спосіб її розв'язання; оцінити реальність отриманих результатів);

– самостійність мислення та здатність до самоорганізації (вміння самостійно приймати рішення, знаходити та використовувати нові дані);

– багатоплановість мислення (вміння досліджувати реальні ситуації з використанням математичного апарату; вміння аналізувати, порівнювати та встановлювати закономірності, взаємозв'язки);

– прогностичність мислення (наявність математичної інтуїції, здатність передбачати кроки виконання, кінцевий результат) [7].

Н. Кінащук визначила такі складові творчого мислення [25]:

− нестандартність (оперативність, гнучкість, оригінальність мислення, уява, фантазія);

− дивергентність (широта, продуктивність, узагальненість та варіативність мислення);

− евристичність мислення (інтуїтивність, особистісний стиль мислення і діяльності, незаалгоритмізованість, здатність мислити згорнутими структурами та прогнозувати можливі результати діяльності на її початку);

– ефективність (швидкість, конвергентність, інтелектуальна чутливість, здатність до інтелектуального самозбагачення та до мобілізації власних творчих можливостей);

– творча активність (творча ініціатива, здатність до самомотивації, самоорганізації та до мобілізації власних творчих можливостей).

У процесі дослідницької діяльності в учнів, на думку С. Ракова, формується дослідницька компетентність. Учні, в яких вона сформована [52]:

– формулюють математичні задачі, значущі для суспільства;

– будують аналітичні та комп’ютерні моделі задач;

– висувають гіпотези та емпірично перевіряють їх справедливість, використовуючи методи індукції, аналогії, узагальнення та власний досвід досліджень;

– дедуктивно доводять справедливість математичних гіпотез або спростовують їх за допомогою контрприкладів;

– інтерпретують результати, які отримали за допомогою формальних методів, математичною мовою;

– систематизують отримані результати: досліджують межі застосування отриманих результатів, встановлюють зв’язки з попередніми результатами, модифікують вихідну задачу, шукають аналогії в інших розділах математики, інформатики тощо

Сформована дослідницька компетентність свідчить про сформованість математичної культури у учнів.

Отже, формування математичної культури в учнів пов’язано з розвитком у них творчих здібностей, пам’яті, мислення, дослідницької діяльності.

1.2. Аналіз шкільних програм з алгебри і початків аналізу на прикладну спрямованість

Метою навчання алгебри і початків аналізу на профільному рівні є забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою [46]. Для реалізації цієї мети в навчально-виховний процес запроваджують компетентнісний підхід шляхом формування предметних і ключових компетентностей.

Кінцевим результатом вивчення математики є сформована математична компетентність, завдяки якої учень може застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях, нести відповідальність за свої дії, брати повноцінну участь в житті суспільства.

Значні вимоги до володіння математикою у розв’язуванні практичних задач ставить сучасний ринок праці: отримати якісну професійну освіту, продовжити освіту на наступних етапах. Тому головне завдання курсу математики – забезпечити умови для досягнення кожним учнем практичної компетентності, яка передбачає виконання таких завдань[46]:

– формування в учнів наукового світогляду, уявлень про роль математичних методів у пізнанні навколишньої дійсності; школярі повинні усвідомити, що математичні знання є невід’ємною складовою загальної культури людини, необхідною умовою повноцінного життя в сучасному суспільстві;

– оволодіння учнями мовою математики, системою математичних знань, навичками та уміннями, потрібними у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності;

– розвивати логічне мислення та інтуїцію учнів, просторову уяву, пам’ять, увагу, алгоритмічну, інформаційну та графічну культури;

– формувати позитивні риси особистості –ініціативність та творчість, пізнавальну самостійність та інтерес, потребу в самоосвіті, здатність адаптуватися до умов, що змінюються;

– формувати життєві компетентності учнів – наполегливість, волю, культуру думки і поведінки, обґрунтованість суджень, відповідальність за доручену справу тощо;

– формувати загальнолюдські духовні цінності особистості; виховувати національну самосвідомість, повагу до національної культури і традицій України.

Практична компетентність – важливий показник якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона свідчить про готовність старшокласників до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.

Реалізація прикладної спрямованості курсу алгебри і початків аналізу відбувається завдяки систематичному використанню методу математичного моделювання. При реалізації практичної спрямованості в процесі навчання курсу алгебри і початків аналізу вчителя математики:

– створюють запас математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, вивчаються у суміжних предметах;

– формують в учнів знання та вміння для дослідження цих математичних моделей;

– навчають учнів будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних явищ і процесів.

Практичну спрямованість курсу математики забезпечують міжпредметні зв’язки математики з іншими предметами, особливо з природничими.

За діючою програмою курс «Алгебра і початки аналізу» у 10 класі передбачає вивчення тем «Функції, многочлени, рівняння і нерівності», «Степенева функція», «Тригонометричні функції», «Тригонометричні рівняння і нерівності», «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування», в 11 класі вивчають теми «Показникова та логарифмічна функції», «Інтеграл та його застосування», «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей», «Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація».

Програмою передбачено набуття учнями умінь використовувати математичні знання при розв'язанні задач прикладного змісту на застосування похідної, показникової та логарифмічної функцій, інтегралу, демонструвати вміння розв'язувати рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей з параметрами за описами реальних ситуацій, розв'язувати задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь [46].

Під час повторення загальнофункціональних понять учням 10 класу пропонується розв'язування задач на повторення означень функцій, на визначення залежностей реальних процесів та явищ. Вибрані залежності задаються не тільки аналітично, а й графічно з урахуванням наочності. Для кращого розуміння теми прикладні задачі вибираються з цікавим і зрозумілим змістом. Наприклад, учням пропонується визначити висоту яблуні віком 3 роки, 10 років, 20 років, якщо задано формула залежності висоти яблуні від її віку. А також визначити у якому віці її висота буде 13м. Такі задачі дозволяють учням пригадати способи задання функцій, практичне використання геометричних прогресій. На знаходження максимального (мінімального) значення функцій учням пропонують, наприклад, задачі на екологічну тему: «Вивчаючи екологічний стан річок вчені встановили залежність швидкості течії річки v (в м/с) від відносної глибини h (в м) русла (відношення глибини занурення даної точки до повної глибини річкового русла): $\gamma = -0{,}225h^2 * 0{,}130h + 0{,}958$. Треба визначити відносну глибину русла річки, для якої швидкість течії найбільша, та найбільшу швидкість течії річки». Отже, перший розділ курсу «Алгебра і початки аналізу» передбачає прикладну спрямованість.

У другому розділі учні вивчають степеневі функції. Під час вивчення теми учні розв'язують задачі прикладного змісту на дослідження різних природних процесів, зокрема біологічних, хімічних, фізичних. Наприклад, задачі на розмноження бактерій, радіоактивний розпад, швидкість зростання чисельності населення, швидкість розповсюдження епідемій, на визначення залежності ємності легенів людини від її віку у роках, залежності середнього росту дитини від її віку тощо. Задачі такої тематики допоможуть учням глибше усвідомити властивості степеневих функцій, засвоїти поняття, пов'язані з ними та оправдати очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів, визначені навчальною програмою з математики. Отже другий розділ програми, також, спрямований на використання прикладних задач, на формування математичної культури учнів.

Можливість максимального використання прикладних задач надається програмою під час вивчення теми «Похідна та її застосування». Програмою передбачено набуття учнями вмінь розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин. З цією метою учні обчислюють швидкість приросту бактерій в певний час, швидкість розчинення пігулки в воді, розкладання хімічних речовин тощо. Задачі такої тематики дозволяють учням краще зрозуміти правила знаходження похідної, її використання у житті. За допомогою похідної старшокласники досліджують функції на монотонність, на визначення інтервалів зростання / убивання. Так, на етапі повторення понять зростаючої та спадної функції на проміжку, учні досліджують графік зміни тиску крові вздовж судинного русла, визначаючи залежність тиску крові від товщини сосудів, ділянки з найбільшим і найменшим тиском; графік залежності висоти ялинки від її віку, визначаючи збільшується чи зменшується висота ялинки з її віком. При розв'язанні цих задач передбачається використання наочності, яка допомагає старшокласникам краще зрозуміти та засвоїти навчальний матеріал. Тобто, учні аналізують готові графіки залежностей: графік залежності тиску від товщини судин, графік залежності реакції організму на введені лікувальні препарати тощо. Таким чином, старшокласники набувають вміння застосовувати похідну для знаходження проміжків монотонності функції

При введенні понять екстремальні точки (точки максимуму і мінімуму функції) та екстремуми функції (максимум і мінімум функції) учні обчислюють максимальний розмір популяції бактерій, максимальну реакцію організму на введені ліки тощо.

Під час дослідження функцій за загальною схемою учням пропонують розв’язати прикладні задачі такого типу: «Концентрація сахарози (моль/л) в момент часу *t* (хв) задана формулою $f(t) = e^{-0{,}0035}$, де $t \geq 0$. Дослідить функцію $f(t)$ і побудуйте її графік. Визначте за який час концентрація досягне половини свого початкового значення. Підтвердить результат графічно».

Метою вивчення теми «Інтеграл та його застосування» за програмою 11 - го класу є формування уявлень про роль інтеграла під час досліджень реальних процесів, формування в учнів навичок знаходження величин за швидкістю їх змінювання, обчислення площ геометричних фігур, вмінь досліджувати найпростіші реальні процеси за допомогою інтеграла та диференціальних рівнянь. Необхідні вміння та навички учні набувають при розв’язуванні, наприклад, таких задач: «Початкова чисельність популяції дорівнює 90 особин, вона зростає зі швидкістю ю $W(t) = 20t$ особин в день. Знайти закон зміни чисельності P популяції в залежності від часу t (час виражено у днях). Використовуючи основну властивість первісної учні одержують $P(t) = \cdot 20 * t^2/2 + C = 10t^2 + C$. З врахуванням того, що $P(0) = 90$, отримуємо $C=90$, тоді закон зміни чисельності популяції від часу можна записати формулою $P(t) = 10t^2 + 90$.

Дана задача розкриває учням смисл довільної сталої C у загальному вигляді первісної. З метою закріплення поняття первісної, засвоєння її властивостей, правил знаходження, учням пропонують, наприклад, такі задачі: «Концентрація лікарського препарату зменшується в організмі зі швидкістю $w(t)=-100\ e^{-t}$, де t – час, виражений у годинах. Знайти закон зміни його кількості у крові хворого, якщо початкова кількість дорівнює 200 одиниць». Або можна запропонувати задачу на швидкість поширення епідемії, популяції комах тощо. Після введення поняття інтеграла учням пропонують задачі на його використання. Учні обчислюють приріст бактерій, зміну концентрації речовини за певний проміжок часу. Під час розв’язування прикладних задач, які приводять до поняття диференціальних рівнянь учням пропонують знайти закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо відомо, що через одну годину після введення 10 мг препарату, його маса зменшилась у два рази. Після розгляду такої прикладної задачі (її математичною моделлю є найпростіше диференціальне рівняння), учням пропонують задачі, що приводять до диференціального рівняння показникового зростання чи спадання: швидкість розмноження бактерій пропорційна їх чисельності в даний момент часу. Чисельність бактерій подвоюється протягом 3 годин. Знайти залежність чисельності бактерій від часу. Математичною моделлю таких задач слугує рівняння $f\,'(x) = k\,f\,(x)$, де k – деяка константа. Вивчення елементів комбінаторики та теорії ймовірностей також передбачають розв’язання прикладних задач, оскільки теорія ймовірностей виникла у зв’язку з практичними потребами і знайшла широке застосування в різних галузях науки, виробництва та економіки. Отже, тематика комбінаторних задач надзвичайно різноманітна.

Аналіз посібників «Алгебра і початки аналізу» авторського колективу під керівництвом А. Мерзляк (рівень стандарту і профільний рівень [40; 41] показав, що задачі прикладного змісту використовуються вчителями математики під час вивчення теми «Ділення многочленів. Теорема Безу». Задачі № 6.18, 6.19 на с. 47 [40] подані для повторення матеріалу курсу попередніх класів (задача на виконання сумісного виробничого завдання двома людьми та на заповнення басейну двома трубами одночасно). Більше прикладних задач у першому розділі не передбачено. Під час вивчення похідної учні розв’язують лише задачі на рух тіла вздовж прямої. Так, задача № 20.9 с. 117 [41] учням пропонується розв’язати задачу на знаходження імпульсу матеріальної точки в даний момент часу, якщо відома її маса та задана формула, яка виражає закон руху по прямій. Аналогічну задачу учні розв’язують на знаходження кінетичної енергії матеріальної точки (№ 20.9. с. 118) [41]. Під час повторення матеріалу за 10 клас учні також розв’язують задачі на рух тіла по прямій (№ 26.36 с. 139) [41], Пояснюючи тему «Паралельне проектування» вчитель наводить приклади з повсякденного життя (проектування птаха, літака, шкільної парти, автомобіля тощо) (с. 169–171, [41] Задачі прикладного змісту в даній темі відсутні.

Вивчаючи теми «Перпендикулярність прямої та площини», «Кут між прямою та площиною», «Двогранний кут. Кут між площинами» учням також наводять приклади із повсякденного життя [41, с. с.180–182, 188, 194, 198, 201]. Задач прикладного змісту, які дозволили б старшокласникам закріпити отримані математичні знання на практиці, в посібнику не виявлені. Теж стосується і посібників для 11 класу [42; 43]. Учні згадують задачі на прямолінійний рух матеріальної точки (№ 10.9, 10.10, с. 56–57 [42], № 10.11, 10.12 с. 98 [43]), визначають скільки різних паролів можна утворити, використовуючи 26 латинських букв для захисту інформації на комп'ютері (задача 2, с. 71–72 [42], с. 128 [43]). На теорію ймовірностей учням запропонована низка задач (№№ 12.1. – 12.3, 12.9, 12.10, 12.23, с. 73–74 [42]; №№ 13.1. – 13.7, 13.24, 13.34, с. 129–130 [43]) прикладного змісту. Використані прикладні задачі і при вивченні теми «Перестановки. Розміщення Комбінації» для профільного рівня і стандарту задачі однакові. Наприклад, учні розбирають скількома способами Зоя, Оля та Ян можуть вишикуватися в чергу у шкільному буфеті або скількома способами можуть вишикуватися 5 машин у колону. Учні розподіляють золоті, срібні та бронзові медалі серед 32 команд футболістів (задача 2, с. 75[42], с. 134 [43]), складають денний розклад уроків для учнів 9 класу (№ 13.6, с. 77 [42], с. # 14.6, с. 138 [43]) та вирішують інші житійні проблеми, використовуючи теорію ймовірностей і комбінаторику. Отже, авторський колектив під керівництвом А. Мерзляка частково використовує задачі прикладного змісту для учнів 11 класу.

Аналіз навчального посібника «Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія : рівень стандарту» авторів Г. Бевз та В. Бевз [6] на прикладну спрямованість показав, автори приділи значну увагу цьому питанню, починаючи з першої теми «Числові функції». Учням пояснюють сфери застосування числових функцій (у медицині, фізиці, економіці, сільському господарстві), пояснюють, що за допомогою числових функцій моделюють і досліджують різноманітні процеси (тривалість поїздки автомобілем до пункту призначення, вартість використаної електроенергії, зміну температури в кімнаті, час скачування файлу тощо). Отримані знання учні закріплюють за допомогою задач прикладного змісту: аналізують графік руху двох електропоїздів (№ 12, с. 15).розраховують споживання електроенергії (№ 22, с. 16), прикладний зміст мають задачі №№ 25, 27, 28, 41, 43. При вивченні наступних двох тем прикладні задачі пропонуються учням на повторення : № 128 (екологічна проблема «цвітінні» води), № 165 (на відсотки – підвищення / зниження цін на еко-товари), № 211 (розрахунок концентрації солі). Наприкінці вивчення теми учням запропоновано творчі завдання прикладного змісту: вони розкривають різні способи задання функцій на конкретних прикладах, що стосуються фінансів, екології, здорового способу життя тощо; з'ясовують, якими функціями можна описати процеси, що відбуваються у довкіллі. Вивчення кожної теми починається з наведення прикладів із життя, наприклад, періодичність функції автор пояснює за допомогою кардіограми; вивчення нового матеріалу закріплюється задачами прикладного змісту (№ 248, с. 58; 254,с. 59; 315, с. 71; 366, с. 84; 384, с. 85 та інші). Учні визначають у які моменти часу сила електричного струму, який живить міську освітлювальну мережу, досягає мінімального або максимального значення і коли його значення дорівнює нулю (№ 410, с. 92), обчислюють швидкість розмноження популяції коників, які наносять шкоду сільськогосподарським культурам (№ 508, с. 108). Багато задач прикладного змісту подано на похідну та її використання (№№ 524, 530, 531 с. 118, №№ 572, с. 126; 613, 621, с. 132 та ін.). Отже, автори пояснюють матеріал на прикладах із повсякденного життя та пропонують задачі прикладного змісту для його закріплення.

Аналіз посібника «Алгебра і початки аналізу : профільний рівень» авторського колективу під керівництвом О. Істер [24] показав, що учням запропоновані задачі на переведення даних системи навігації літака із футів у кілометри (1.37, с. 11), обчислення вартості пляшечки шампуню під час акції (№2.36, с. 22), витрати на бензин для автівки таксі (№3.46, с.31), побудову графіку руху м'яча (№ 4.19, с. 41), на обчислення податку на прибуток підприємства (№ 4.42, с. 43), гумового пилу, який потрапляє у повітря (№ 7.39, с. 73), відсоткової ставки банку (№8.32, с. 81, 9.39, с. 92), на знаходження висоти баку і площі його основи (№ 9.36, с. 93), на визначення різниці між найбільшою і найменшою середньодобовими температурами у зазначений період по графіку середньодобової температури повітря в Одесі (№ 9.53, с. 93). Під час вивчення похідної та її застосування учням пропонують стандартні задачі на обчислення швидкості, прискорення тіла, яке рухається прямолінійно (№ 35.9, 35,10, 35.15, 35.16,35.21, с. 354–355); на знаходження найменшої висоти, на яку треба розташувати спостерігача, щоб він бачив горизонт на відстані не менше ніж 4 кілометри (№ 39.29, с. 391). Автори добре виклали практичний зміст найбільшого або найменшого значення функції, використавши прикладні задачі на обчислення розміру прямокутної ділянки, яку треба огородити з трьох сторін парканом (приклад 3, с. 401), на знаходження об’єму коробки (приклад 5, с. 402) та інші. Отже, кожний розділ даного посібника містить задачі прикладного змісту.

Аналіз підручника «Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) О. Істера [25; 26] показав, що автор намагався викласти теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвавши його малюнками та прикладами застосування математики в повсякденному житті, тобто учням запропоновано задачі прикладного змісту. Наприклад, при вивченні функцій учні знаходять функцію залежності вартості обладнання від терміну експлуатації (задача 3, с. 7), визначають формулу залежності температури води від часу (задача 6, с. 9), будують графік падіння тіла (№ 1.18, с. 13), руху м’яча (№ 2.22.с. 23). Задачі прикладного змісту подані у рубриці «Життєва математика», яка пропонує задачі на визначення відсотків вкладу, заробітної плати в залежності від відпрацьованих днів, втрати води в організмі учениці, небезпечної для її здоров’ята інші задачі. Задачі прикладного змісту подаються наприкінці кожного параграфу в 10 та 11 класах. При вивченні показникової функції в 11 класі [26] автор окремим пунктом виокремив «Застосування показникової функції до розв’язання прикладних задач, у якому учням подана функція, яка описує різні фізичні процеси, розібрані задачі на розпад ізотопу плутонія, на визначення тиску повітря на висоті (задачі 4, 8, с.

12). Задачі № 1.16–1.19 на с. 13–14 закріплюють вивчений матеріал. Отже, прикладна спрямованість курсу математики у навчальних посібниках О. Істера простежується яскраво.

Отже, аналіз змісту програми на прикладну спрямованість показав, що можливості використання прикладних задач при вивченні курсу «Алгебра і початки аналізу» високі. Однак, графа «Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів» передбачає лише формування вміння розв’язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин та застосування похідної до розв’язування задач прикладного змісту, тобто при вивченні п’ятої теми у 10 класі. На наш погляд, цього недостатньо для кращого розуміння тем, запропонованих в курсі «Алгебра і початки аналізу. 10 клас». У 11 класі від учнів очікуються вміння застосовувати показникову та логарифмічну функції, інтеграл до розв’язування прикладних задач, демонструвати вміння розв’язувати задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь.

Навчальний посібник даного курсу зовсім не має задач прикладного змісту (авторський колектив під керівництвом А. Мерзляка). Яскрава спрямованість на розв’язання задач прикладного змісту простежується в посібниках О. Істер та Г. Бевз «Алгебра і початки аналізу» профільного та стандартного рівня (10, 11 класи). Кожна тема передбачає розв’язання прикладних задач.

Таким чином, аналіз програми і навчального посібника на практичну спрямованість підтвердив актуальність і значущість обраної теми.

1.3. Прикладні задачі як засіб підвищення математичної культури старшокласників

Вперше означення прикладної математики дав радянський педагог-математик В. Фірсов – це застосування математичних методів та алгоритмів у найрізноманітніших сферах людської діяльності [58]. Згодом воно вдосконалювалось іншими вченими.

Математичне вирішення прикладних задач володіє серйозною специфікою. Перш за все, тут принципово не можна досягти у доведенні того ж рівня, що в чисто математичних дослідженнях, тому, що математична модель реального об'єкта не здатна повно описати його риси. Крім того, до розв'язків прикладних задач виставляються такі вимоги, які в чисто математичних дослідженнях вважаються другорядними, а саме: прикладна задача повинна бути вирішена не тільки правильно, але і своєчасно, економно по затрачених зусиллях, вирішення повинно бути доступним для існуючих обчислювальних засобів і доступним для фактичного використання, точність рішення повинна відповідати задачі тощо.

Найкраще виконання всіх цих вимог математики І. Блехман, А. Мишкіс, Я. Пановко умовно назвали оптимальністю вирішення. Виходячи з цього, вони запропонували визначення прикладної математики як науки про оптимальні, практично сприйнятні методи вирішення математичних задач, які виникають поза математикою [9]. Таким чином, прикладна математика – це математика, опосередкована практикою, це наче складова дисципліна як біохімія чи теплотехніка.

Представляється привабливою і точка зору, висловлена В. Ачканом: «Прикладна математика – це наука про математичні моделі; найбільш докладніше можна сказати – про будову, дослідження, інтерпретації і оптимізації математичних моделей» [2].

У сучасній науці термін «прикладна математика» включає в себе крім класичних галузей ще й інші, що мають важливе значення в практичному застосуванні. Наприклад, така галузь як теорія чисел широко використовується в криптографії. Промислова математика використовується для розв'язку промислових задач. Завдяки розвитку сучасних числових математичних методів та програмного забезпечення виникли обчислювальна математика, обчислювальна наука та обчислювальна інженерія. Їх використовують для імітації явищ та розв'язку наукових та інженерних задач. Ці дисципліни відносять до міждисциплінарних.

Деякі математики розрізняють «прикладну математику», яка займається математичними методами, від «застосування математики» в рамках науки і інженерії. Біолог, який використовує моделі популяції і застосовує відомі методи математики не займається прикладною математикою, а скоріше використовує її; однак, математичні біологи поставили деякі задачі, які в свою чергу стимулювали розвиток чистої математики. Так, Анрі Пуанкаре та Володимир Арнольд заперечують існування «прикладної математики». З їх точки зору є лише «застосуванням математики». Отже, не існує чітких відмінностей між прикладною математикою і застосуванням математики.

Прикладна математика розв’язує прикладні задачі.

У педагогічній літературі поняття прикладної задачі трактується по-різному, а саме як:

– задача, що потребує перекладу з природної мови на математичну [15];

– задача, яка близька за формулюванням і методами розв’язування до задач, що виникають на практиці [2];

– сюжетна задача, сформульована у вигляді задачі-проблеми [43].

– це задача, що виникла поза математикою, але розв’язується математичними засобами [9].

Як стверджує З. Слєпкань, прикладними задачами в математиці називають ті, умови яких містять нематематичні поняття [54]. За допомогою прикладних задач частково реалізується практична спрямованість навчання математики. Практична спрямованість навчання математики – це спрямованість змісту і методів навчання на розв’язування задач і вправ прикладного змісту, на формування в учнів навичок самостійної діяльності математичного характеру. У процесі навчання прикладна і практична спрямованість звичайно функціонують спільно. Прикладна спрямованість навчання математики формує в учнів розуміння математики як методу пізнання та перетворення оточуючого світу, який має розглядатися не тільки областю застосувань математики, а й невичерпним джерелом нових математичних ідей.

Як бачимо, прикладна задача повинна задовольняти таким умовам:

– питання задачі потрібно формулювати так, як воно зазвичай формується у житті;

– розв'язок задачі повинний мати практичну значимість;

– дані та шукані величини задачі мають бути реальними, взятими з життя.

У нашому розумінні сутність прикладної спрямованості шкільного курсу математики полягає в орієнтації цілей, змісту і засобів навчання математики у напрямку:

– здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зав'язків математики з практикою;

– набуття учнями в процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності.

Остання теза передбачає включення в навчання математики таких специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних проблем, зокрема для розв'язання прикладних задач, під якими розуміються задачі, що виникають за межами математики, але розв'язуються з використанням математичного апарату. Часто, поряд з прикладною спрямованістю шкільного курсу математики, говорять про практичну спрямованість навчання математики. У нашому розумінні сутність практичної спрямованості навчання математики полягає в спрямованості цілей, змісту, засобів і методів навчання на формування в учнів вмінь і навичок розв'язування математичних задач. Зрозуміло, що в реальному процесі навчання прикладна і практична спрямованості мають функціонувати спільно, доповнюючи одна одну.

Алгебра і початки аналізу – навчальна дисципліна шкільного курсу математики, яка вивчаються у 10-11 класах. Враховуючи сутність прикладної математики, можна стверджувати [34]:

– прикладна спрямованість шкільного курсу математики – це орієнтація цілей, змісту і засобів навчання цього предмета у напрямку:

– здійснення цілеспрямованих змістових і методологічних зав’язків математики з практикою;

– набуття учнями під час вивчення даного предмета характерних для математичної діяльності знань, умінь і навичок, які будуть використовуватись ними в повсякденному житті, в майбутній професійній діяльності;

– практична спрямованість навчання шкільного курсу математики – це спрямованість цілей, змісту, засобів і методів навчання на розв’язання математичних задач і вправ алгебраїчними методами та методами математичного аналізу.

Кожна прикладна задача виконує різні функції, що за певних умов виступають явно або приховано. Так, одні прикладні задачі можуть ілюструвати принцип оптимізації трудової діяльності, тобто отримувати найкращий результат з найменшими затратами, інші – розвивати здібності учнів до технічної творчості за допомогою розв’язання геометричних задач на побудову тощо.

Розв’язування прикладних задач дозволяє ознайомити учнів з роботою підприємств і галузей народного господарства, що дозволяє учням обрати майбутню професію. Наприклад, власник автомобіля марки «А» вирішив застрахував своє авто на суму 10000 грн. Страховий тариф становить 0,5%. Після випадку ДТП страхова компанія визначила розмір збитків в частці 120%. Визначити страховий платіж і страхове відшкодування. Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань, збагачують їх теоретичними знаннями з технічних та інших дисциплін. Як бачимо, прикладна задача показує зв’язок математики з життям, її розв’язання підвищує загальнонаукову грамотність учнів, задача підвищує інтерес до математики, формує математичну культуру. Задачі прикладного змісту переконують учнів у потребі вивчення теоретичного матеріалу і показують, що математичні абстракції виникають із задач, поставлених реальним життям. Спочатку учнів зацікавлює розв’язування окремих задач, потім вивчення окремих тем, а з часом і всієїнавчальної дисципліни. Тому систематичне виховання учнівських інтересів є неодмінною умовою ефективності кожного окремого уроку і всієї навчально-виховної роботи. Одночасно учні набувають корисних навичок роботи з довідниками, навчаються самостійно знаходити потрібну інформацію в додатковій літературі.

Таким чином, задачі прикладного характеру виконують [43]:

– освітню функцію, бо їх використання спрямоване на формування у школярів системи знань, умінь та навичок на різних етапах навчання;

– розвиваючу функцію, бо робота з ними розвиває вміння осмислювати зміст понять, застосовувати здобуті знання на практиці, аналізувати результати, розширювати кругозір, робити відповідні узагальнення, порівняння, висновки;

– виховну функцію, бо міжпредметні зв’язки на уроках математики можуть здійснюватися насамперед через ці задачі. Крім того практичні задачі допомагають висвітити міжпредметні зв’язки, які в свою чергу обумовлюють поглиблене і розширене сприйняття учнями фактів, свідоме засвоєння теорії, формування цілісної картини природи, що також сприяє формуванню математичної культури;

– контрольну функцію, бо дозволяє встановити рівень навченості, рівень загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і всього класу.

В процесі використання прикладних задач з метою формування математичної культури необхідною дотримуватися певних вимог. Однією з них є залучення учнів до навчальної діяльності, тобто постійне включення старшокласників до різної навчально-пізнавальної діяльності практичної спрямованості. Задачі прикладного змісту повинні задовольняти таким методичним вимогам [15]:

– наявність практичного змісту (учні повинні бачити практичну цінність і значущість набутих математичних знань);

– відповідати шкільним програмам і чинним підручникам з курсу алгебри і початків аналізу;

– показувати практичне використання набутих математичних знань у різних галузях народного господарства (екології, будівництві, сільському господарстві тощо);

– прикладні задачі повинні викликати пізнавальний інтерес учнів;

– термінологія прикладних задач повинна бути зрозуміла учням;

– прикладні задачі повинні містити реальні числові дані.

За таких умов використання прикладних задач дасть потрібний педагогічний ефект.

Ефективність формування математичної культури старшокласників засобом прикладних задач, на думку М. Філімонової, залежить від методів та етапів їх розв’язання. Основним методом вона вважає метод математичного моделювання, а найбільш ефективним засобом – прикладні задачі. Процес розв’язування прикладної задачі передбачає [62]:

– переклад прикладної задачі з природної мови на математичну (першій етап моделювання);

– розв’язування отриманої математичної задачі (другий етап моделювання);

– аналіз отриманих результатів (в процесі аналізу результати математичної задачі перекладаються знову на природну мову (третій етап моделювання)).

Для учнів найбільш складним, на її думку, є першій етап. Автор пов’язує це з тим, що учні ще не набули вмінь декодувати інформацію, закладену в умову задачі, не навчилися абстрагувати неістотні властивості об’єктів, які досліджуються в задачі, аналізувати зв’язки між об’єктами, формалізувати запитання задачі тощо [62]. У зв’язку з цим, щоб підвищити пізнавальну діяльність старшокласників, на першому етапі доцільно використовувати евристичні запитання, стосовно абстрагування від властивостей об’єкту, несуттєвих для побудови математичної моделі прикладної задачі; допомогти старшокласникам з’ясувати відмінності між об’єктом і його моделлю; перекласти умову прикладної задачі на математичну мову.

На другому етапі запропонувати учням джерела для отримання додаткової інформації для розв'язання задачі (ілюстративні креслення, графіки, ескізи, які допоможуть знайти розв'язання задачі; математичні задачі-двійники, Інтернет тощо); допомогти учням довести знайдений розв'язок прикладної задачі до числового значення або розрахункової формули.

На третьому етапі учні знаходять розв'язок прикладної задачі, перевіряють його правильність, оцінюють ступені точності отриманого розв'язку [62].

Для підвищення пізнавальної активності старшокласників в процесі формування математичної культури засобом прикладних задач доцільно використовувати також дидактичні ігри з розподілом ролей, які відповідають різним професіям, і завданнями, які імітують вирішення певних виробничих чи побутових проблем, пошуково-дослідницьку діяльність тощо [43].

Отже, прикладна математика – це застосування математичних методів та алгоритмів у найрізноманітніших сферах людської діяльності. У своєму дослідженні під прикладною задачею будемо розуміти таку задачу, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, що виникають на практиці. Розв'язання прикладної задачі складається з трьох етапів: створення математичної моделі, дослідження математичної моделі і інтерпретації розв'язків. У процесі моделювання прикладних задач учні набувають умінь і навичок, які вони будуть використовувати в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності. Прикладні задачі виконують освітню, розвиваючу та виховну функції

РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ЯК ЗАСОБУ ПІДВИЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ СТАРШОКЛАСНИКІВ

2.1. Дослідження рівнів сформованості математичної культури у старшокласників

Для перевірки впливу задач прикладного змісту на підвищення рівня математичної культури старшокласників був проведений педагогічний експеримент, який складався із трьох послідовних етапів: констатувального, формувального, контрольного. Метою констатувального етапу було виявлення початкового рівня сформованості математичної культури старшокласників, метою формувального етапу було підвищення рівня математичної культури старшокласників засобом розв'язання прикладних задач. Метою контрольного етапу було перевірка ефективності проведеної роботи з підвищення рівня математичної культури старшокласників засобом прикладних задач.

Для досягнення мети констатувального етапу дослідження були поставлені такі завдання:

– визначити та обґрунтувати показники, критерії та рівні сформованості математичної культури старшокласників;

– підібрати діагностичний матеріал для виявлення рівня сформованості математичної культури;

– виявити рівень сформованості математичної культури старшокласників;

– провести анкетування вчителів з метою виявлення засобів підвищення математичної культури старшокласників.

Враховуючи те, що основним критерієм сформованості математичної культури старшокласників є просування від низького рівня до високого, то нам треба визначити показники сформованості математичної культури старшокласника, скласти характеристики кожного рівня, виявити критерії, за допомогою яких віднесемо учня до того чи іншого рівня, перекласти якісні показники сформованості математичної культури в кількісні.

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури та навчальних програм, за показники рівня сформованості математичної культури старшокласників ми взяли: обсяг і якість математичних знань і умінь; обсяг і якість вмінь математичної самоосвіти; володіння мовною математичною культурою.

Для якісного оцінювання рівнів сформованості математичної культури старшокласників ми виділили наступні рівні: низький, середній, достатній та високий. Перехід на новий рівень означає якісний стрибок в оволодінні знаннями, вміннями і навичками математичної культури.

Для кількісного аналізу результатів кожному рівню поставили у відповідність бали за 12-бальною системою: високому рівню 12, 11 та 10 балів; достатньому – 9, 8 та 7 балів; середньому рівню – 6, 5 та 4 бали; низькому – 3, 2 та 1.

Критерії та показники сформованості математичної культури старшокласників представлені у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Критеріально-рівнева таблиця визначення сформованості рівнів математичної культури старшокласників

Критерії Рівні (бали)	Обсяг і якість математичних знань та вмінь	Обсяг і якість вмінь математичної самоосвіти	Володіння мовною математичною культурою
Низький (1, 2, 3)	Учень має поверхові, безсистемні, неповні знання. У нього сформовані деякі вміння, в оперуванні яких учень допускає помилки. Він може розпізнати один із декількох запропонованих математичних об'єктів,	Учень не прагне до самовдосконалення. Самоосвіту сприймає як обтяжливий обов'язок, тобто вона викликає негативне ставлення. Елементарні завдання виконує за допомогою вчителя.	Учень читає числа, математичні вирази, формули, але його мовні засоби сумбурні, їх важко зрозуміти, вони часто переплутані.

Продовження таблиці 2.1.

	виділивши його серед інших.		
Середній (4, 5, 6)	Учень розуміє сутність основних положень предмету. Знання його неповні. Ілюструє означення математичних понять, формулює теореми і правила виконання математичних дій.	Епізодично займається самовдосконаленням, яке відбувається за вимогами вчителя. Завдання обов'язкового рівня учень виконує за зразком з частковим поясненням.	У оперуванні мовними засобами допускає помилки, неточності, але намагається виправити їх самостійно. Може записати математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки.
Достатній (7, 8, 9)	Учень має достатні знання, володіє матеріалом, визначеним програмою, розв'язує завдання, передбачені програмою.	Має навички самоос-віти. Самостійно виправляє вказані помилки, самостійно виконує завдання, пояснюючи їх. .	Учень аргументує математичні міркування, обґрунтовує математичні твердження, розв'язує завдання, майже без помилок
Високий (10, 11, 12)	Учень має знання, вміння й навички, які повністю відповідають вимогам навчальної програми. Вміє раціонально вибрати спосіб розв'язування математичної проблеми, узагальнювати й систе-матизувати набуті знання, може розв'язу-вати нестандартні задачі та вправи.	Учень прагне до самовдосконалення і відповідальності. Здатний самостійно знаходити потрібну інформацію і використовувати набуті знання та вміння в нестандартних ситуаціях.	Учень вільно і впевнено користується мовними засобами, може висловити відповідні математичні міркування та переконливо аргументувати їх. Математична мова побудована грамотно.

Діагностичний матеріал, який був використаний для виявлення рівнів сформованості математичної культури старшокласників поданий у додатку А. Учням була запропонована контрольна робота та тести. Контрольну роботу ми оцінювали за критеріями визначення сформованості математичної культури за 12-бальною системою: високий рівень (12, 11 та 10 балів) – учень правильно і самостійно розв'язав задачу; достатній рівень (9, 8 та 7 балів) – учень розв'язав нераціонально задачу; середній рівень (6, 5 та 4 бали) – задача розв'язана за готовим алгоритмом; низький рівень (3, 2 та 1) – задача розв'язана за допомогою вчителя.

В експерименті взяли участь учні 10 (експериментальний клас) та 11 (контрольний клас) класів ЗОШ № 3 м. Глухова Сумської області.

Обсяг і якість математичних знань і умінь учнів експериментального і контрольного класів ми розглядали як один із критеріїв сформованості математичної культури. Для його визначення учням була запропонована контрольна робота (додаток А).

Аналіз виконання завдання показав, що учні контрольного та експериментального класів справилися, в основному, з простими завданнями, які оцінювалися одним балом. При обчисленні похідної 41% учнів КК та 47% ЕК зробили помилки. З побудовою графіка функції не справилися 47% учнів КК та 52,8% – ЕК. Прикладну задачу розв'язало лише 5,9% учнів експериментального та контрольного класів.

Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального і контрольного класів на констатувальному етапі дослідження за першим критерієм представлені у таблиці 2.2. і діаграмі на рис. 2.1.

Таблиця.2.2

Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального і контрольного класів за обсягом і якістю математичних знань та вмінь на констатувальному етапі

Клас	Рівень сформованості							
	Низький		Середній		Достатній		Високий	
	кількість	%	кількість	%	кількість	%	кількість	%
ЕК, 17 учнів	6	35,3	7	41,2	3	17,7	1	5,8
КК, 17 учнів	4	23,5	8	47,2	4	23,5	1	5,8

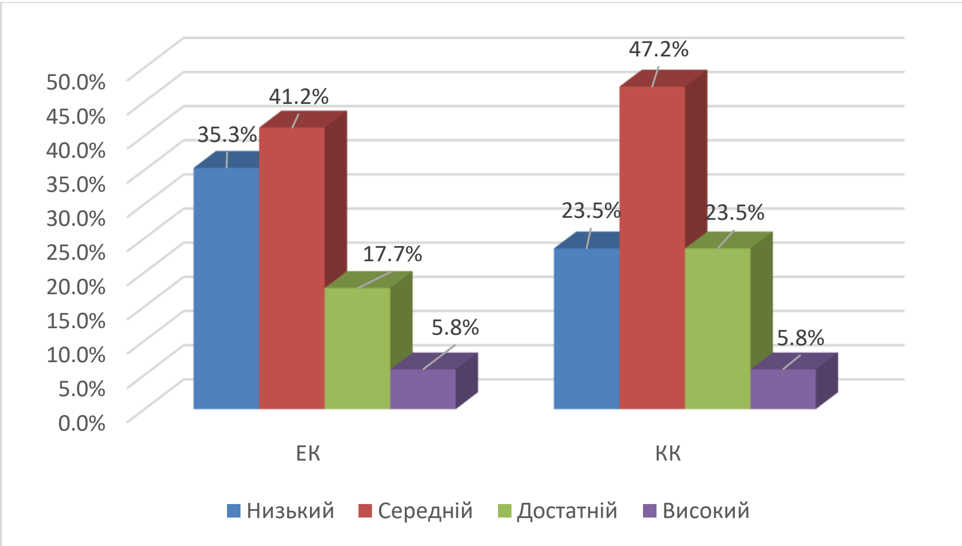


Рис. 2.1. ***Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального і контрольного класів за обсягом і якістю математичних знань та вмінь на констатувальному етапі***

Дані таблиці 2.2 та діаграми на рис. 2.1. свідчать про те, що рівні сформованості математичної культури в обох класах знаходяться на середньому рівні (41,2% – ЕК, 47,2% – КК). Низький рівень виявлений у 35,3% учнів експериментального та 23,5% – контрольного. На достатньому рівні сформованості перебуває 17,7% учнів експериментального класу та 23,5% – контрольного. Високий рівень сформованості математичної культури показало лише 5,8% учнів обох класів.

Отже, одержані дані свідчать про те, що за обсягом та якістю сформованості математичних знань і умінь, контрольний та експериментальний клас майже не відрізняються.

Щоб визначити обсяг і якість вмінь математичної самоосвіти ми використали низку методів: аналіз контрольних робіт, рефератів, бесіду (додаток Б). Обсяг і якість вмінь математичної самоосвіти старшокласників ми визначили, використавши результати всіх методів і узагальнивши оцінки. Учням запропонували написати реферат на одну із запропонованих тем з математичної проблеми.

Ця робота оцінювалася за 12-бальною системою. За критерії були взяті: глибина математичних знань учнів, вміння використовувати спеціальну, наукову та методичну літературу; лаконічність викладу своїх думок у письмовій формі тощо. Інші роботи також оцінювалися за 12-бальною системою, а сформованість вмінь математичної самоосвіти визначалася середньоарифметичним показником даних робіт.

Більшість учнів ЕК та КК обрала теми рефератів «Похідна та її застосування», «Похідна функції. Правила диференціювання. Вправи». Матеріал для написання рефератів був взятий із навчального посібника, наукову і методичну літературу учні не використовували. Таких учнів було 47,2% в ЕК та 41,2% – в КК. На достатньому і високому рівнях (23,5% і 5,8% відповідно) були написані реферати «Використання практичних задач у банківській сфері», «Використання задач прикладного змісту у будівництві». Учні навели багато прикладів використання прикладних задач у даних сферах, була використана спеціальна література. У висновках учні лаконічно виклали свої думки щодо використання прикладних задач.

Із проведеної з учнями бесіди ми дізналися, що інтерес до вивчення математики проявляють 17,7% учнів ЕК та 23,5% учнів КК. Цим учням цікаво будувати графіки функцій, вони намагаються дізнатися як буде виглядати та чи інша функція. Такою їм цікаво брати похідні, вони ознайомилися додатково з їх застосуванням в різних сферах. Інформацію вони отримують із статей журналів

«Математика в школі», із енциклопедій тощо. Набуті математичні знання ці учні використовували, коли треба було розрахувати кількість шпалер для стіни під час ремонту кімнати. Деякі з них розраховували батькам відсотки від депозитів. 35,3% учнів ЕК та 23,5% учнів КК особливо не цікавляться математикою, вони намагаються зрозуміти пояснення вчителя на уроці, вивчити домашнє завдання. Навести приклади використання математичних знань у житті вони не змогли.

Проведений нами аналіз контрольних та самостійних робіт показав, що кращі відмітки учні мають з теми «Тригонометричні рівняння і нерівності». Учні ЕК дану тему засвоїли з такими результатами: 17,7% учнів мають високий рівень, 23,5% – достатній, 41,2% – середній, 17,6% – низький), учні КК мають наступні результати: 17,7% – високий рівень, 23,5% – достатній, 47,2% – середній, 11,6% – низький. Гірші оцінки вони мають з теми «Функції, многочлени, рівняння і нерівності», «Степеневі функції». За цими темами 41,2% учнів контрольного та 47,2% – експериментального класів мають низький рівень.

Результати дослідження рівнів розвитку математичної культури старшокласників за другим критерієм подані у таблиці 2.3 та діаграмі 2.2.

Таблиця 2.3

Рівні розвитку математичної культури старшокласників за обсягом та якістю сформованості вмінь математичної самоосвіти

Клас, 25 учнів	Рівень сформованості							
	Низький		Середній		Достатній		Високий	
	кількість	%	кількість	%	кількість	%	кількість	%
ЕК	7	41,2	6	35,3	3	17,7	1	5,8
КК	5	29,5	7	41,2	4	23,5	1	5,8

Дані таблиці 2.3 та діаграми на рис. 2.2. свідчать про те, що за обсягом та якістю сформованості вмінь математичної самоосвіти, ЕК і КК практично не відрізняються, вони також знаходяться на середньому рівні (41,2% – КК, 35,3%

– ЕК).

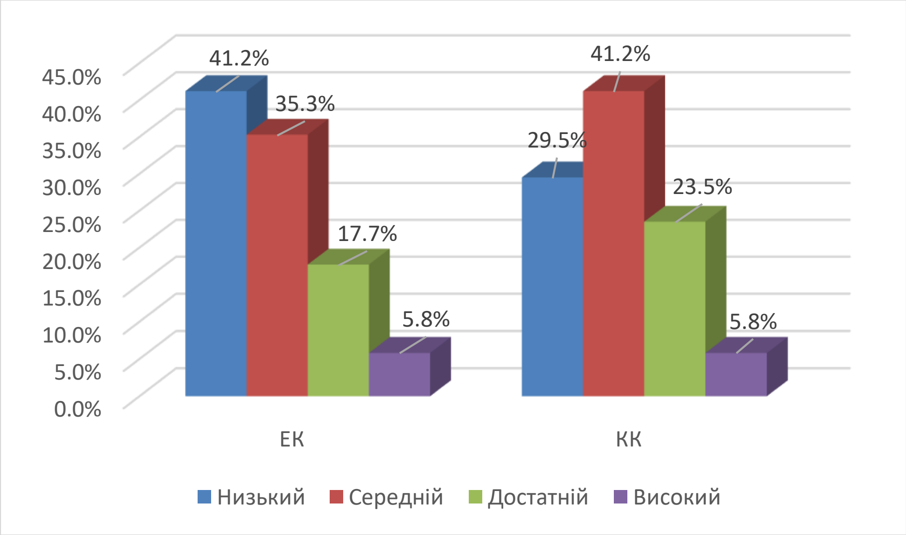


Рис. 2.2. ***Рівні сформованості математичної культури учнів ЕК і КК за обсягом та якістю сформованості вмінь математичної самоосвіти на констатувальному етапі***

Низький рівень виявлено у 41,2% учнів ЕК та 29,5% – контрольного класу. Достатній рівень за даним критерієм показало 17,7% учнів ЕК та 23,5% – КК, високий рівень виявлено у 5,8% старшокласників.

Для визначення рівня сформованості математичної культури старшокласників за третім критерієм (володіння мовною математичною культурою) ми підібрали завдання на вміння записувати і читати математичні записи (додаток В), врахували і якість написання учнями рефератів. Роботи ми оцінювали за 12-бальною системою, а середньоарифметичний показник визначив нам рівень оволодіння старшокласниками математичною мовою.

Аналіз виконання завдання показав, що 47,2% учнів ЕК та 41,2% учнів КК зробили помилки при читанні математичних формул (завдання № 1). В основному були отримані такі відповіді «ігрек дорівнює один плюс 3 поділити на модуль трьох відняти три». Правильно прочитали запис лише по 11,6% учнів експериментального та контрольного класів. З другим завданням також половина учнів зробила помилки («модуль мінус сімнадцять дорівнює сімнадцяти»), тобто учні прочитали формули, але не сформулювали властивості модуля. При виконанні третього завдання 23,5% учнів не змогли записати правильно формулу для виразу «При *x*, що наближається до *a*, функція *f(x)* має границю, яка дорівнює *b*»

Аналіз рефератів показав, що біля половини учнів випробували труднощі при написанні математичних термінів, фрази були короткі «відсели слідує» і далі йде формула без пояснення як вона була отримана. Чітко і лаконічно викладали свої думки лише 11,7% учнів.

Отримані результати за даним критерієм занесені до таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Рівні сформованості математичної культури ЕК та КК за володінням мовною математичною культурою на констатувальному етапі

Клас, 25 учнів	Рівень сформованості							
	Низький		Середній		Достатній		Високий	
	кількість	%	кількість	%	кількість	%	кількість	%
ЕК	5	29,5	7	41,2	4	23,5	1	5,8
КК-1	4	23,5	8	47,2	3	17,6	2	11,7

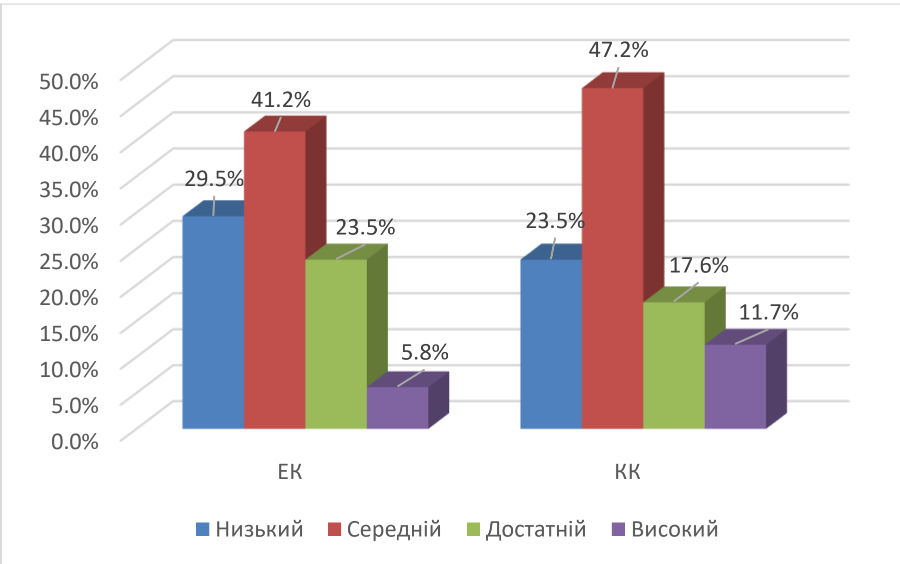


Рис. 2.3. ***Рівні сформованості математичної культури ЕК та КК за володінням мовною математичною культурою на констатувальному етапі***

Дані таблиці 2.4 та діаграми на рис. 2.3. свідчать про те, що за рівнем володіння мовною математичною культурою експериментальний та контрольний класи знаходяться на середньому рівні (41,2% – ЕК, 47,2% – КК), низький рівень виявлений у 29,5% учнів ЕК та 23,5% учнів КК. Достатній та високий рівень показало 23,5% учнів та 5,8% учнів ЕК і 17,6% та 11,6% учнів КК.

Зведені результати рівнів сформованості математичної культури старшокласників подані у таблиці 2.5 та діаграмі на рис. 2.4.

Таблиця 2. 5

Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального та контрольного класів на констатувальному етапі дослідження

Клас, 25 учнів	Рівень сформованості			
	Низький	Середній	Достатній	Високий
	%	%	%	%
ЕК	35,4	39,2	19,6	5,8
КК	25,5	45,3	21,5	7,7

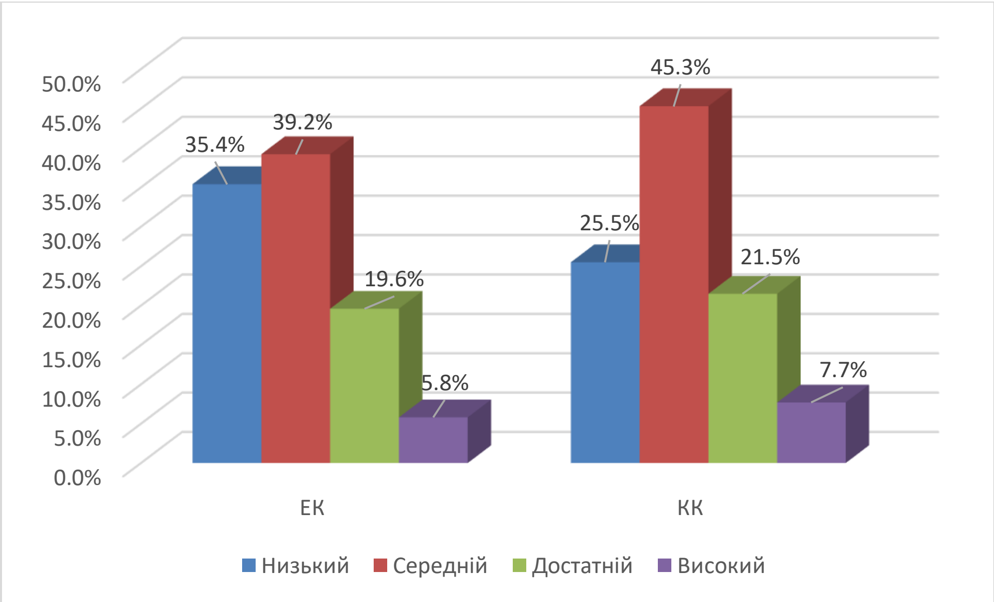


Рис. 2.3. ***Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального та контрольного класів на констатувальному етапі дослідження***

Дані таблиці 2.5 та діаграми на рис. 2.4. свідчать про те, що рівні сформованості математичної культури учнів експериментального та контрольного класів знаходяться на середньому рівні (39,2% – ЕК, 45,3% – КК), на низькому рівні перебуває 35,4% учнів ЕК та 25,5% учнів КК. Достатній та високий рівні показало 19,6% та 5,8% учнів ЕК і 21,5% та 7,7% учнів КК..

Наступним кроком констатувального етапу було анкетування вчителів математики з метою з'ясування які засоби вони використовують для формування математичної культури. Педагогам була запропонована анкета (додаток Д). В анкетуванні взяло участь 5 вчителів математики.

Проаналізуємо відповіді вчителів.

Стаж роботи вчителів – від 3 років до 30 років. Сутність поняття «математична культура» вчителі розуміють вірно. На дане запитання були отримані такі відповіді: «це сформований інтерес учнів до математичного пізнання, готовність набувати й удосконалювати знання, уміння та навички з області математики», «це наявність в учня значного об'єму математичних знань, умінь й навичок, уміння лаконічно, точно, переконливо висловлювати математичні міркування, удосконалювати свої математичні знання».

60% вчителів вважають, що формувати математичну культуру необхідно, 40% – вважають, що математика у житті не всім буде потрібно, тому не варто загострювати увагу на цьому питанні. Отже, погляди педагогів на формування математичної культури учнів розділилися: 60% висловили думку за необхідність формування математичної культури, решта 40% мають інші погляди. У цих педагогів невеликий стаж роботи, і вони вважають, що не варто примушувати учнів до вивчення математики, якщо у них не має до неї природних здібностей.

Із наступного запитання ми дізналися, що для формування математичної культури вчителі використовують різні методи: як традиційні (розповідь, пояснення) так і не традиційні: пошуково-дослідницька, проєктна діяльність, інтерактивні методи навчання тощо.

Із засобів педагоги назвали розв'язання задач, вправ за заздалегідь підготовленим алгоритмом (40%), написання рефератів, доповідей (20%), ситуаційні задачі (20%), прикладні задачі (20%), конспекти, посібники, інтернет (60%). Як бачимо, прикладні задачі з метою формування математичної культури використовують лише 20%. Задачі прикладного змісту вчителі використовують при викладанні стереометрії, похідної та її застосування степеневої функції тощо. Як бачимо, під час викладання основних тем програми з математики за 10 клас вчителі використовують прикладні задачі. Але постійно ці задачі використовують 20% педагогів, решта – використовують епізодично.

Із відповідей на останнє запитання анкети ми дізналися, що основні труднощі використання прикладних задач в процесе формування математичної культури учнів виникають при доборі задач, бракує дидактичного матеріалу.

Отже, проведене анкетування вчителів виявило, що 60% з них вважають необхідним формувати математичну культуру учнів засобом прикладних задач. Але постійно їх використовує лише 20%, решта педагогів застосовує задачі прикладного змісту не системно. Причина полягає у відсутності дидактичного матеріалу прикладної спрямованості.

Анкетування вчителів, отримані результати діагностування учнів старших класів на констатувальному етапі дослідження дають підстави для проведення формувального етапу дослідження з метою підвищення рівнів сформованості математичної культури учнів експериментального класу засобом прикладних задач.

2.2. Система роботи з підвищення математичної культури старшокласників засобом прикладних задач з алгебри і початків аналізу

З метою підвищення математичної культури учнів експериментального класу засобом прикладних задач ми розробили методику їх використання з наступною її апробацією.

При розробці методики проведення уроків ми врахували, що учням цікаво буде розв’язувати прикладні задачі, якщо вони зустрічали описувану ситуацію в реальному житті, в побуті, при вивченні інших предметів.

Першою темою, яку вивчають учні 10-го класу, це функції, многочлени, рівняння і нерівності. Перед вивченням цієї теми ми повторили загальнофункціональні поняття, які учні вивчали в базовій школі. Розв'язування прикладних задач дало можливість повторити означення функції, учні підготувалися до сприйняття означення числової функції, пригадали основні способи задання функції, їх властивості. З метою пригадування властивостей функцій ми розглядали залежності, які мають місце в біології, хімії, екології, медицині тощо. Але, для формування математичної культури (розширення обсягу знань учнів) ми спочатку вибрали прості залежності, які були зрозумілі старшокласникам. Обрану залежність ми задавали не тільки аналітично, а й графічно з урахуванням наочності, властивостей залежності. Після того як учні виявили властивості залежності, провели їх аналіз, вони узагальнювали їх для всього виду функцій.

Прикладні задачі ми давали учням з метою активізації пізнавальної діяльності, при поясненні та закріпленні нового матеріалу, як домашнє завдання.

При розв'язанні прикладних задач на залежності хіміко-біологічних, медичних, екологічних та інших ми враховували їх особливості, а саме: функція, яка описує певний процес, задана на множині невід'ємних чисел і набуває невід'ємні значення. У зв'язку з цим, треба вносити певні обмеження, які пов'язані з тим, що неможливо проілюструвати всі властивості даного виду функції. Крім того, деякі властивості функцій можна розглядати лише в абстрактному вигляді.

Для повторення загальнофункціональних понять ми розв'язували з учнями такі задачі [55, с. 20]:

Задача 1. У процесі розвитку деяких риб від 2 до 6 років можна простежити лінійну залежність ваги риби w (в кг) від її віку t (у роках): $w = at$, де a - параметр, який визначається у процесі спостережень і залежить від виду риби. У цьому ж періоді росту риби її довжина L (в м) також лінійно залежить від віку t : L = b t , де b - параметр. Відомо, що даний вид риби у віці одного року важив 0,24 кг і мав довжину 12 см. Вивести формулу залежності ваги цієї риби від її довжини.

Розв'язання. З формул лінійної залежності ваги w та довжини L риби від часу t виразимо час t : t =w/a; t = L/b. Прирівнявши праві частини останніх рівнянь w/a = L/b і зробивші відповідні перетворення, отримуємо залежність ваги риби w від її довжини L: $w = \frac{a}{b} L$. Для визначення значень параметрів a і b треба розв'язати рівняння: 0,24 = a -1 і 0,12 = b -1. Таким чином, a = 0,24, b=0,12, w=2L.

Відповідь. w = 2L –формула залежності ваги риби від її довжини.

Задача 2. У таблиці 2.6. представлено середній зріст x_i в см і середня вага y_i в кг різних порід собак:

Таблиця 2.6.

Середній зріст x_i в см і середня вага y_i в кг різних порід собак

Порода	Тойтер'єр	Пікінес	Карликов	Мопс	Цверг-	Франц.	Фокстер'є	Бассет-	Пудель	Кокер-
Зріст, *xi*	22	23	26	29	31	33	34	36	37	40
Вага, *yi*	3	4	6	7	9	10	11	12	12	14

Використовуючи дані таблиці, побудуйте графік залежності ваги y_i собаки від її зросту x_i. Визначить цю залежність за допомогою методу лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду.

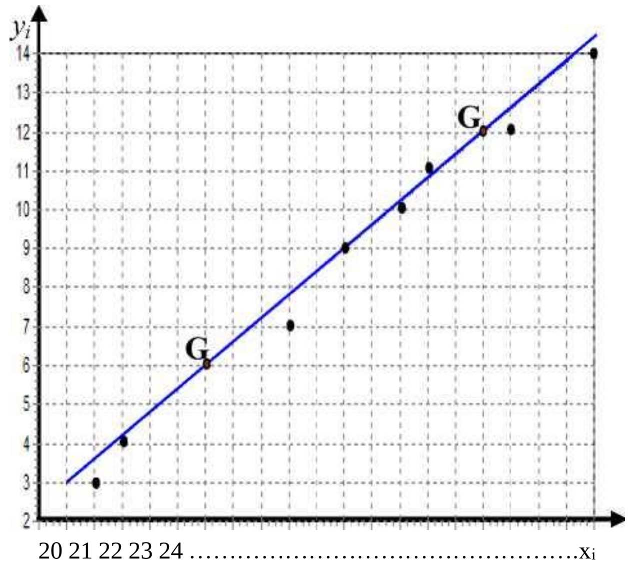


Рис. 2.4. ***Графік залежності ваги y_i собаки від її зросту x_i.***

Розв'язання. 1) У прямокутній системі координат відмітимо точки (x_i; y_i) . Вони розташувались вздовж умовної прямої. Щоб визначити її рівняння знайдемо координати середньої точки G_1 для перших п'яти точок цієї послідовності та координати середньої точки G_2 для інших п'яти точок.

$\overline{x_i}$ = (22+23+26+29+31) / 5 = 26,

$\overline{y_i}$ = (3+4+6+7+9) / 5 = 6.

Аналогічно знаходимо x_2 = 36, y_2 = 12. Як бачимо, шукана пряма проходить через точки G_1(26; 6) , G_2 (36;12). Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки A(x_1; y_1) , B(x_2; y_2) :

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ отримаємо рівняння $\frac{x-26}{10} = \frac{y-6}{6}$ Звідки, після певних перетворень, отримаємо формулу залежності ваги собаки певної породи від її зросту $y = 0{,}6x$ -9,6.

Відповідь. $y = 0{,}6x - 9{,}6$ - *формула залежності ваги собаки певної породи від її зросту.*

Дану задачу ми розв'язали методом лінійного вирівнювання множини точок статистичного ряду.

Задача 3. Корінь кульбаби займає площу біля 10 м^2. За рік одна кульбаба дає біля 100 летючих насінин. Скільки квадратних кілометрів площі займуть нащадки однієї кульбаби за 6 років за умови, що вона розмножується без перешкод у геометричній прогресії? Відомо, що площа поверхні суші земної кулі складає 148 млн. кв. км. Чи вистачить цим рослинам на сьомий рік місця на поверхні земної кулі?

Розв'язання. Нехай S_0 = 10 м^2 – початкова площа, яку займає одна кульбаба. Тоді S_1, S_2,..., Sn – площі, які займуть нащадки однієї кульбаби через n років. При цьому $S_1 = S_0 * 10^2$, $S_2 = S_1 * 10^2 = S_0 * 10^4$, $S_3 = S_2 * 10^2 = S_0 * 10^6$,..., $Sn = S_{n\text{-}1} * 10^2 = S_0 * 10^{2n}$. Отже, $S_6 = 10 * 10^{12} = 10^{13}$ (м^2). Оскільки площа поверхні суші земної кулі складає 148 $*10^6$ км^2 = 1,48 $* 10^{14}$м^2, то на сьомий рік на поверхні суші місця для цих рослин не вистачить, тому що $S_7 = 10^{15}$ м^2.

Відповідь. За згаданих умов на сьомий рік місця на поверхні суші земної кулі для кульбаби не вистачить.

Розв'язуючи цю задачу учні згадали показникові функції $S(n) = S_0 * 10^{2n}$. Але, можна було розв'язати цю задачу використавши формулу n-го члена геометричної прогресії $bn = b1 * q^{n-1}$, де $b_1 = 10^2$ (насінин), $q = 100$. Тоді $b_7 = 10^2 * 100^6 = 10^{14}$ (насінин), а $S_7 = S_0 * b_7 = 10 * 10^{14} = 10^{15}$(м^2).

Таким чином, задачі такого типу дозволили розширити свої математичні знання, підвищити зацікавленість математикою, зрозуміти процеси, що відбуваються у природі.

Наступною темою було вивчення степеневої, показникової, логарифмічної функцій.

Учням було пояснено, що у різних природних процесах часто зустрічаються залежності між змінними величинами, які можна описати показниковою або логарифмічною функціями з основою $a = e$. Наприклад, $N = N_o e^{kt}$, де N – кількість бактерій в будь-який час t, N_0 – початкова кількість бактерій в момент часу $t = 0$, k – константа швидкості розмноження бактерій, вона визначається експериментально. За тим же законом розмножуються кролики, які дуже швидко заполонили Австралію.

Процеси новоутворення і розпаду математично описують за допомогою залежності $P = P_0 e^{kt}$, де P – кількість речовини, що утворилася або розклалася на момент часу t , P_0 – початкова кількість речовини, k – стала.

Учні дізналися, що за тим же законом відбувається радіоактивний розпад, зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі людини, який виводиться з нього природним шляхом.

Крім цього, учні дізналися, що за допомогою показникової функції можна визначити зростання народонаселення, приріст деревини, залежність врожайності від кількості внесених добрив тощо. А логарифмічна функція допомагає:

– описувати залежності ємності легенів V людини від її віку:

$V(x) = 110(\ln x - 2) / x$, де x – вік людини у роках (від 10 до 100 років);

– залежність маси W ссавця від споживаних ним калорій M на одиницю маси щодня $\lg W = (1{,}8 - \lg M) / 0{,}225$.

Степеневу залежність можна використовувати для:

– визначення ступеня забруднення важкими металами землі, наприклад, свинцем вздовж доріг (у мг/м^2 за рік):

$C = 0{,}012Ae^{-0{,}11k} + 0{,}37\sqrt[3]{A}$, де A – кількість транспортних засобів за добу і k – відстань від краю дороги в метрах;

– визначення максимальної кількості опадів I (у мм/рік) від їх тривалості t (у роках): $I = 13{,}1\, t^{-0{,}56}$ та ін.

Розв'язання прикладних задач на ці функції допомогло учням глибше усвідомити їх властивості, засвоїватати поняття, пов'язані з цими функціями.

За час формувального етапу нами були розв'язані наступні задачі для введення поняття *показникової функції.*

Задача 4. Лісник оцінив, що запас деревини на ділянці лісу складає 10000 кубометрів. Визначте скільки деревини буде на цій ділянці через 10 років, якщо середній річний приріст складає 2,5 %?

Після ознайомлення учнів з умовою задачі, ми запропонували їм такий хід дослідження:

– Познач через D_0 початковий запас деревини на ділянці лісу, а D_n – запас деревини через n років. Визначте, яким буде запас деревини через один рік? Виразіть D_1 через D_0 .

– Визнач чому буде дорівнювати запас деревини два роки? Виразіть D_2

через D_1 та D_0 .

– Розрахуй запас деревини через три роки. Виразіть D_3 через D_2 та D_0

– Визначте D_n через D_{n-1} . Виразіть D_n як функцію від D_0 і n .

– Підстав в останню формулу значення D_0 з умови задачі. Що ви отримали? ($D(n)$ = $10000\text{-}1{,}025^n$),

В результаті дослідження учні отримали математичну модель даного процесу. Розрахувавши її значення $D(10) = 10000*1{,}025^{10} = 12800$(м^3), вони отримали відповідь на питання задачі.

Задачі на цю тематику для самостійного розв'язання подані у додатку М.

Тема «Похідна» має важливе практичне значення для людини. Людині час від часу треба знайти найкращий спосіб розв'язання певної повсякденної задачі. На допомогу приходить математика. Велике значення мають задачі на знаходження на екстремуми, тобто завданням на відшукання найбільшого і найменшого значення, найкращого, найбільш вигідного, найбільш економного тощо. Такі задачі вирішують інженери-технологи, які намагаються організувати виробництво так, щоб випуск продукції був найбільший; конструктори планують свій прилад так, щоб його маса була найменшою; економісти розв'язують транспортні задачі. Отже, засвоєння похідної дуже важливо для майбутніх професій учнів, для формування математичної культури учнів.

На уроках математики, перед введенням поняття похідної, ми розглянули класичні задачі, що привели до даного поняття. Це задача механіки, в якій визначається миттєва швидкість і геометрична задача, в якій визначається положення дотичної до кривої в певній точці. При розв'язуванні цих задач ми проводили ті ж самі міркування, що і при розв'язуванні задач, в яких визначали швидкість зростання популяції та швидкість хімічної реакції.

З метою узагальнення спільного способу розв'язання різних задач, ми запропонували учням використовувати наступну таблицю (табл. 2.7).

У таблиці 2.7. прикладна задача на находження похідної розв'язується за чотири кроки:

1. Надають незалежній змінній x приріст Δx;

2. Знаходять приріст залежної змінної Δy;
3. Складають відношення Δy /Δ, яке показує з якою середньою швидкістю змінюється функція;
4. Знаходять вираз $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, який виражає швидкість зміни функції заданого значення аргументу x .

Таблиця 2.7.

Алгоритм розв'язання прикладних задач на знаходження похідної біологічного або хімічного змісту

Функція	Приріст аргументу	Приріст функції	Середня швидкість зміни функції	Миттєва швидкість зміни функції
1. $P=P(t)$ - чисельність популяції в момент часу t; [особин]	Δt	$\Delta P =$ $= P(t + \Delta t) - P(t)$	$V_{ср} = \Delta P/\Delta t$ $= \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$	$V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{ср}$ швидкість зростання популяції

Продовження таблиці 2.7.

2. $C = C(t)$ – концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t; [моль/л]	Δt	$\Delta C =$ $= C(t + \Delta t) - C(t)$	$V_{ср} = \Delta C/\Delta t$ $= \frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}$	$V_{р} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{ср}$ швидкість хімічної реакції.

Ми підібрали низку прикладних задач на знаходження похідної, яка має біологічний або хімічний зміст. Розв'язання цих задач дає учням можливість краще зрозуміти зв'язок математики з природничими процесами та явищами, а також з медициною. Наводимо приклади цих задач.

Задача 5. У біомасі міститься N бактерій, які змінюються за законом $N(t) = 450 + 52t + 2t^2$. Визначити скільки бактерій було в біомасі у момент часу $t = 0$? Яка швидкість приросту бактерій буде в момент часу $t = 3{,}5$ хв?

Розв'язання. Підставимо значення $t = 0$ в рівняння, отримуємо, що у біомасі в початковий момент часу було 450 бактерій. Для відповіді на друге запитання, використаємо правило знаходження похідної, враховуючи, що швидкість приросту числа бактерій це похідна від чисельності популяції, тобто

$v(t) = N'(t)$. Надаємо t прирістΔ t. Знаходимо приріст залежної змінної ΔN : $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = 450 + 52(t + \Delta t) + 2(t + \Delta t)^2 - (450 + 52t + 2t^2) = 52\Delta t + 4t\Delta\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \Delta t\,(52 + 4t + 2\Delta t)$.

Складаємо відношення $\Delta N(t) / \Delta t$:

$\Delta N(t) / \Delta t\,' = 52 + 4t + 2\Delta t$.

Знаходимо границю цього відношення, при $\Delta t \to 0$: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (52+4t + 2\Delta t) = 52+4t$.

Ця границя виражає швидкість приросту числа бактерій в момент часу t. Тому, при t = 3,5 хв, маємо v = 66 бакт/хв.

Відповідь. 450 бактерій; 66 бакт/хв.

Задача 6. Розчинення пігулки у воді відбувається за законом $m = m_0 e^{-kt}$, де

m_0 – початкова маса на момент часу $t = 0$,

m – нерозчинена маса на момент часу t ;

k – стала розчинення при заданих зовнішніх умовах.

Треба визначити швидкість розчинення.

Розв'язання. Визначимо, яка маса пігулки розчинилась на момент часу t:

$M = m_0 - m = m_0(1 - e^{-kt})$. Враховуючи, що швидкість розчинення - це похідна від M, знаходимо $M' = m_0\,(-e^{-kt})\,(-k) = km_0\, e^{-kt} = km$.

Відповідь. km – швидкість розчинення пігулки у воді.

Прикладні задачі ми використовувати також при навчанні учнів досліджувати функції на екстремум. Функція в цьому випадку відіграла роль математичної моделі прикладної задачі, яку використовували для знаходження найбільшого і найменшого значень функції; під час дослідження функції за загальною схемою, з наступною побудовою її графіку; для обчислення наближеного значення функції. Тобто, розв'язуючі прикладну задачу, учні складали її математичну модуль.

При ознайомленні учнів з поняттям зростаючої і спадної функції ми спочатку повторили означення, які були їм відомі з курсу алгебри базової школи. Потім розглянули з ними питання зростання і спадання функції у точці, сформулювали означення монотонної функції на проміжку, довели ознаки монотонності функції в точці та на проміжку.

При повторенні відомих учням означень, було запропоновано розв'язати задачі:

Задача 7 На рисунку 2.5. зображено як змінюється тиск крові вздовж судинного русла. Визначити залежність тиску крові від товщини ділянки судинної системи; на якій ділянці тиск має найбільше значення, а на якій найменше.

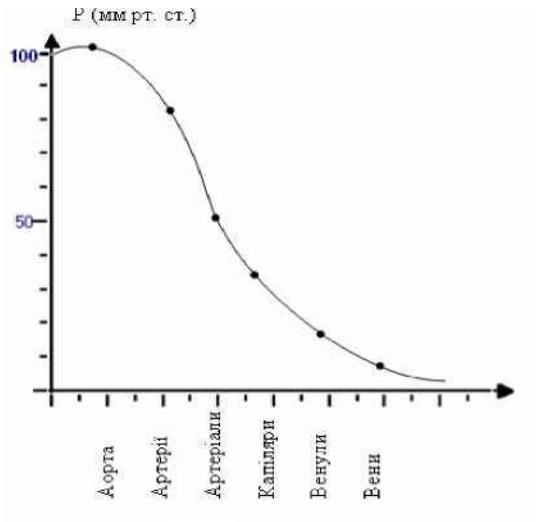


Рис. 2.5. ***Зміна тиску крові вздовж судинного русла***

Учні аналізують графік, пригадують поняття спадної функції на проміжку та алгоритм дослідження функції на монотонність.

При ознайомленні учнів з поняттями зростаючої та спадної функції в точці ми також використовували прикладні задачі. Це допомогло їм глибше усвідомити поняття зростаючої функції в точці і швидше запам'ятати означення, яке подано в підручнику. Під час пояснення зростаючої функції ми навели учням такий приклад:

На рисунку 2.6. зображений графік залежності висоти h ялинки від її віку t (у роках).

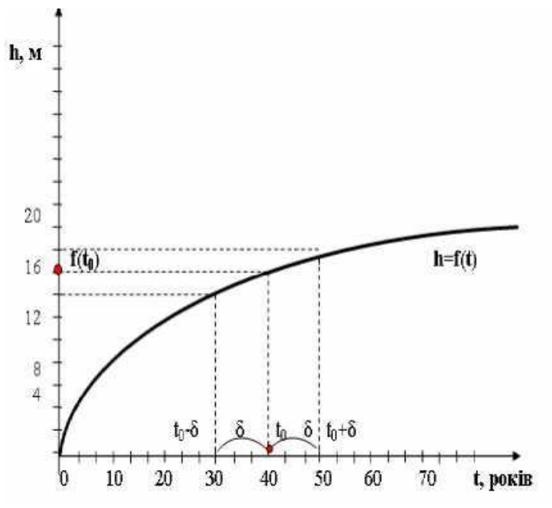


Рис. 2.6. ***Залежність висоти ялинки від її віку (у роках)***

Функцію $h = f(x)$ вважають зростаючою у точці t_0, оскільки існує інтервал (t_0 - $\delta;$ t_0

$+ \delta)$, $\delta > 0$, який знаходиться в проміжку $<a, b>$, причому $f(t) < f(t_0)$ для будь- якого t з інтервалу $(t_0 - \delta; t_0)$ і $f(t) > f(t_0)$ для будь-якого t з інтервалу $(t_0; t_0 + \delta)$.

Розповідаючи учням про ознаки зростання і спадання функцій ми використовували практичні проблемні ситуації, що були створені наступними прикладними задачами

Задача 8. Епідемія депресії, яка виникла у країні Меланхолії, розповсюджується так, що відсоток захворілих (p) залежить від часу t (в добах) наступним чином, $p = 0{,}005(12t^2 - t^3)$, де $0 < t < 12$. Визначте:

– скільки відсотків мешканців захворіють до кінця наступного дня;

– скільки діб відсоток захворілих буде збільшуватись;

– через скільки діб епідемія почне спадати?

Розв'язання. Для того, щоб дати відповідь на перше запитання, знаходимо значення функції для $t = 2$: $p(2) = 0{,}005(12\text{-}22 - 2^3) = 0{,}2 = 20(\%)$. Отже, до кінця наступного дня захворіє 20% мешканців.

Щоб дати відповідь на наступне запитання, знаходимо похідну функції: $p'(t) = 0{,}005(24t - 3t^2) = 0{,}015t\,(8 - t)$. Оскільки час $t > 0$, то на відрізку [0;12] існує єдина точка, в якій похідна набуває нульового значення. Вона розбиває проміжок [0;12] на два проміжки [0;8) та (8;12] . На першому проміжку $p'(t) > 0$, значить функція на ньому зростає, а на другому проміжку $p'(t) < 0$, значить функція на ньому спадає.

Спираючись на достатні ознаки зростання (спадання) функції на проміжку, одержуємо висновок, що 8 діб захворюваність буде збільшуватись, а починаючи з 9-ї доби епідемія почне спадати.

Відповідь. 20%; 8 діб; з 9-ї доби.

У процесі формування математичної культури учнів, ми підібрали прикладні задачі, які показали їм практичне використання похідної з метою дослідження функції на екстремум.

Задача 9. У живильне середовище внесена популяція, що налічує 1000 бактерій. Бактерії розмножуються за законом $p\ (t)\ =\ 1000+\frac{1000t}{100+t^2}$,

де t – час, який вимірюється в годинах.

Треба знайти до якого максимального розміру розмножаться бактерії.

Розв'язання. Знаходимо похідну функції

$p'\ (t)\ =\ \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$, розв'язуємо рівняння $p'\ (t)\ =\ 0,$ з ясуємо, що точки $t_0 = \pm\ 10$ – стаціонарні. За умовою час $t\ >\ 0$, значить на всій області визначення функція має одну стаціонарну точку $t\ =\ 10$, при переході через яку знак похідної змінюється з «+» на «-». Враховуючи достатні умови існування екстремуму в точці, робимо висновок, що в точці $t_0 = 10$ функція має максимальне значення, тобто ця точка максимуму функції. Виходячи з цього, максимальний розмір популяції бактерій дорівнює p (10) = 1050 бактерій.

Відповідь. 1050 бактерій.

Текст даної задачі ми використали для створення проблемної ситуації під час актуалізації знань учнів при вивчені теми «Достатня умова існування екстремуму в точці». Коли учні вже були ознайомлені з достатньою ознакою екстремуму і правилом дослідження функції на екстремум, ми розв'язали цю задачу і запропонували самостійно розв'язати подібну задачу:

Задача 10. При введені ліків в організм людини може спостерігатися підвищення кров'яного тиску, зменшення температури тіла, зміна пульсу чи інші фізіологічні показники. Припустимо, в організм ввели дозу призначених ліків (x), реакція організму на них визначається функцією $y = f\,(x) = x^2(a - x)$, де a - додатна стала. Треба визначити, при якому значенні x реакція організму буде максимальною?

Розроблені нами уроки з метою формування математичної культури засобом прикладних задач подані у:

– додатку Е; тема уроку «Границя функції в точці. Похідна функції. Похідні найпростіших функцій». Прикладна задача на розмноження бактерій розв'язана при поясненні матеріалу, задача на знаходження швидкості зростання популяції комах задана для самостійного розв'язання вдома.

– додатку Ж; тема уроку: «Фізичний, хімічний та геометричний зміст похідної». Прикладна задача на розчинення пігулки у воді використана на етапі вивчення нового матеріалу; для самостійного розв'язання запропоновані задачі на визначення швидкості хімічної реакції та швидкості та прискорення зміщення у відповідь на м'язове подразнення;

– додатку К; тема уроку; «Застосування похідної до дослідження функцій і побудови їх графіків». Прикладна задача використана на повторення властивості степені логарифма, кутового коефіцієнта; для самостійного розв'язання вдома.

Отже, використання задач прикладного змісту дозволило учням удосконалити культуру усного мовлення та математичних записів, набути умінь використовувати математичні знання на практиці,

2.3. Перевірка ефективності проведеної роботи

Для перевірки ефективності використання прикладних задач як засобу формування математичної культури учнів був проведений контрольний етап педагогічного експерименту. Завданнями контрольного етапу були:

– проведення повторного анкетування вчителів математики з метою з'ясування змін у їх поглядах на використання прикладних задач в процесі формування математичної культури старшокласників;

– повторне діагностування учнів експериментального та контрольного класів за критеріями, показниками, рівнями сформованості математичної культури, діагностичним матеріалом констатувального етапу дослідження;

– порівняння результатів контрольного етапу дослідження з констатувальним з метою з'ясування ефективності використання прикладних задач у формуванні математичної культури.

Першим кроком контрольного етапу дослідження було повторне анкетування вчителів математики з метою з'ясування змін у їх поглядах на засоби формування математичної культури старшокласників.

Проаналізуємо деякі відповіді педагогів. Із відповідей вчителів на запитання «Як Ви вважаєте, чи варто формувати математичну культуру учнів?» ми з'ясували, що позитивну відповідь дало 80% респондентів, що на 20% більше в порівнянні з констатувальним етапом дослідження. Отже, майже всі педагоги впевнені у необхідності формування математичної культури старшокласників.

Змінилися погляди вчителів і на засоби формування математичної культури. На 30% педагогів більше стали використовувати прикладні задачі в даному процесі. Задачі прикладного змісту систематично використовують 60% вчителів, на окремих темах, тобто епізодично, 40%; 80% педагогів звертають увагу на формування мовної культури учнів, навчають логічно і точно формулювати математичні міркування, що на 30% більше в порівнянні з першим етапом; на 20% більше педагогів стало задавати реферати на математичну тематику, на 30% збільшилась кількість вчителів, які стали залучати старшокласників до складання прикладних задач.

Отже, повторно проведене анкетування показало, що на 30% збільшилась кількість вчителів, які систематично використовують прикладні задачі у процесі формування математичної культури старшокласників.

Наступним кроком контрольного етапу дослідження було повторне діагностування учнів експериментального та контрольного класів.

З метою визначення як змінився рівень сформованості математичної культури за обсягом і якістю математичних знань та вмінь була проведена контрольна робота (додаток Н). В контрольну роботу ми включили три прикладних задачі, для розв'язання яких учні повинні були добре засвоїти знаходження похідної, моделювання прикладної задачі.

Аналіз виконання контрольної роботи показав, що учні експериментального класу справилися з роботою набагато краще, ніж учні контрольного класу. 23,5% учнів ЕК та 11, 7% школярів контрольного класу розв'язали прикладну задачу на визначення швидкості розчинення пігулки у воді, 41,2% учнів експериментального та 17,7% – контрольного класу успішно розв'язали задачу на швидкість зростання популяції комах, 41,2% учнів ЕК

(11,7% – КК) розв’язали задачу на обчислення радію на планеті в наш час. Скласти дотичну до графіка функції змогло 70,8% учнів ЕК та 47,2% школярів КК. При виконанні п’ятого завдання 11,6% учнів ЕК та 41,2% учнів КК допустили помилку у побудові графіка функції. З третім завданням на знаходження найбільшого та найменшого значення функції справилося 47,2% учнів ЕК та 17,6% школярів КК.

Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального і контрольного класів за обсягом і якістю математичних знань та вмінь на контрольному етапі дослідження представлені у таблиці 2.8. та діаграмі на рис. 2.7.

Таблиця 2.8

Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального і контрольного класів за обсягом і якістю математичних знань та вмінь на контрольному етапі

Клас	Рівень сформованості							
	Низький		Середній		Достатній		Високий	
	кількість	%	кількість	%	кількість	%	кількість	%
ЕК, 25 учнів	2	11,7	4	23,4	6	35,4	5	29,5
КК, 25 учнів	5	29,4	6	35,4	4	23,5	2	11,7

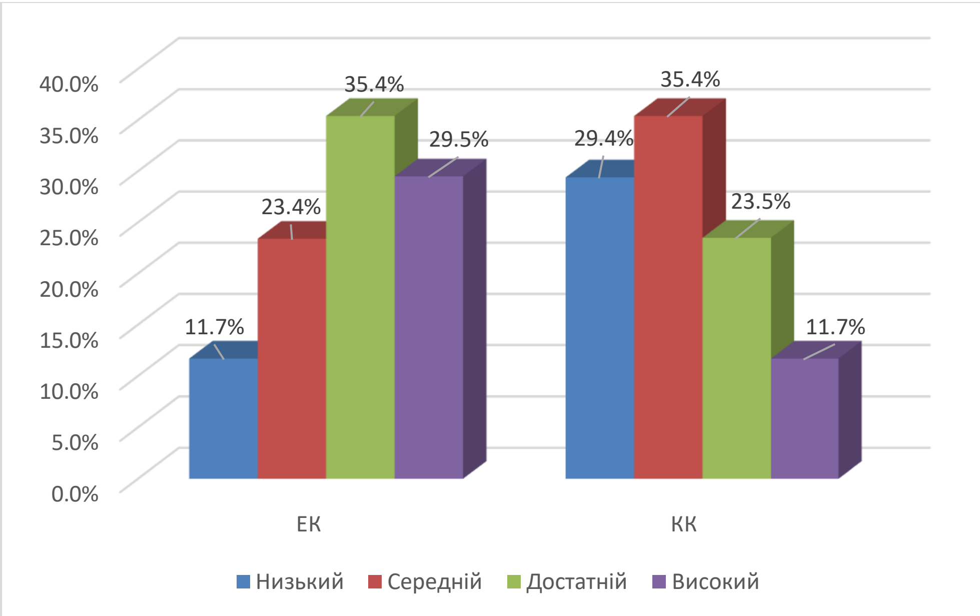


Рис. 2.7 ***Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального і контрольного класів за обсягом і якістю математичних знань та вмінь на контрольному етапі***

Дані таблиці 2.8 та діаграми на рис. 2.7. свідчать про те, що учні експериментального класу досягли високого та достатнього рівня сформованості математичної культури за даним критерієм (29,5%; 35,4% відповідно). На середньому рівні перебуває 23,4%, на низькому рівні залишилося 11,7% учнів експериментального класу. Учні контрольного класу залишилися на середньому рівні (35,4%). Високий рівень математичної культури за даним критерієм показало 11,7% школярів, достатній – 23,5%, на низькому залишилося 29,4% учнів контрольного класу.

Отже, одержані дані свідчать про те, що рівень математичної культури за обсягом і якістю сформованості математичних знань і умінь у учнів експериментального класу значно вищий, ніж у учнів контрольного класу.

Для з'ясування змін у рівнях сформованості за другим критерієм (обсягом і якістю вмінь математичної самоосвіти) ми повторно запропонували учням написати реферат на одну із запропонованих тем та провели з ними бесіду (додаток Б).

64,9% учнів ЕК та 17,7% старшокласників із контрольного класу обрали теми для рефератів «Похідна та її застосування», «Використання прикладних задач в екології». Реферати написані на високому та достатньому рівнях. Матеріал для написання рефератів вони взяли із методичних посібників, Інтернету, пізнавальної та спеціальної літератури. Учні навели багато прикладів використання прикладних задач у даних сферах. У висновках вони математично грамотно і лаконічно виклали свої думки щодо використання прикладних задач та похідної в екології, медицині, будівництві тощо. На середньому рівні написали 35,3% учнів ЕГ та 47,2% школярів контрольного класу, на низькому – 5,8% учнів ЕК та 29,5% школярів із контрольного класу. Отже, рівень сформованості обсягу та якості умінь математичної освіти в учнів експериментального класу значно вище, ніж у учнів контрольного класу.

Із повторно проведеної з учнями бесіди ми дізналися, що інтерес до вивчення математики у учнів експериментального класу значно підвищився і складає 47,2%, учням сподобалося розв'язувати прикладні задачі. 11,7% учнів навіть роблять спробу скласти власні прикладні задачі на використання похідної у будівництві, медицині, екології. 17,6% учнів намагалися розрахувати з якою швидкістю розростаються бур'яни на грядках, 5,8% – з якою швидкістю розмножуються миші та скільки їх стане навесні, якщо не насипати їм отрути восени. Кількість учнів експериментального класу, яких математика не цікавить знизилась до 11,6%. У контрольному класі положення, майже, не змінилося:

29,5% учнів не цікавляться математикою, обмежують свої знання тими, що дає вчитель на уроці. Навести приклади використання математичних знань у житті вони також не змогли.

Проведений нами аналіз контрольної та самостійної роботи з теми «Похідна та її застосування» показав, що роботи учнів ЕК оцінені наступним чином: 29,5% учнів мають високий рівень, 41,2% – достатній, 23,5% – середній, 5,8% – низький). Учні КК мають наступні результати: 5,8% – високий рівень, 17,6% – достатній, 47,2% – середній, 29,4% – низький. Результати дослідження рівнів сформованості математичної культури старшокласників за другим критерієм подані у таблиці 2.9 та діаграмі 2.8.

Таблиця 2.9

Рівні розвитку математичної культури старшокласників за обсягом та якістю сформованості вмінь математичної самоосвіти на контрольному етапі

Клас, 25 учнів	Рівень сформованості							
	Низький		Середній		Достатній		Високий	
	кількість	%	кількість	%	кількість	%	кількість	%
ЕК	1	5,8	7	41,2	5	29,5	4	23,5
КК	5	29,5	6	35,3	4	23,5	2	11,7

За даними таблиці 2.9 та діаграми на рис. 2.8. можна зробити висновок про те, що рівень сформованості математичної культури старшокласників за обсягом та якістю вмінь математичної самоосвіти в учнів експериментального класу значно вище, ніж в контрольному. Високий рівень сформованості математичної культури за даним критерієм показало 23,5% учнів ЕК та 11,8% школярів КК, на достатньому рівні знаходяться 29,5 старшокласників із ЕК і 23,5% учнів із контрольного класу; середній рівень показало 41,2% школярів експериментального класу та 35,3% старшокласників контрольного класу; на низькому рівні перебуває 5,8% учнів ЕК та 29,5% школярів КК.

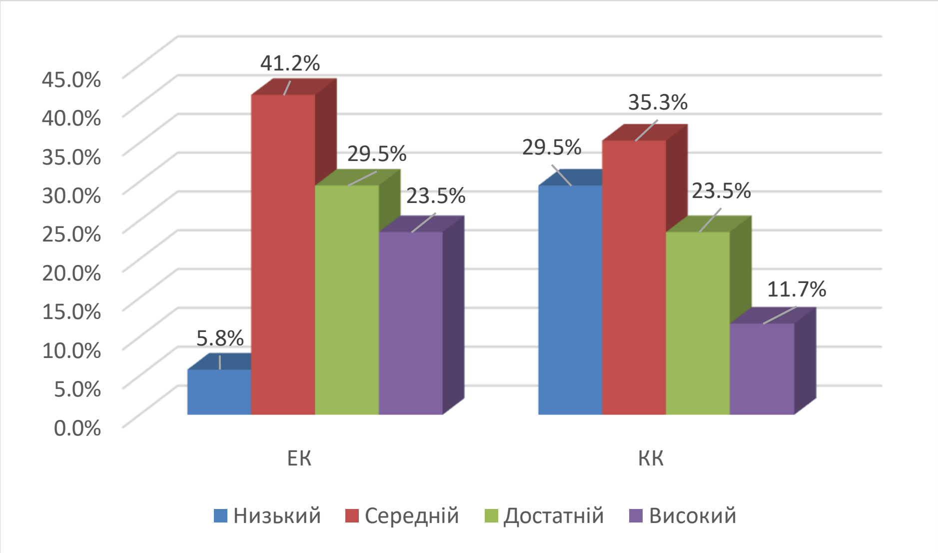


Рис. 2.8. ***Рівні сформованості математичної культури учнів ЕК і КК за обсягом та якістю сформованості вмінь математичної самоосвіти на контрольному етапі***

Для з’ясування як змінилися рівні сформованості математичної культури старшокласників за володінням мовною математичною культуро ми повторно запропонували їм завдання на вміння записувати і читати математичні записи, також врахували якість написання рефератів.

Аналіз повторного виконання завдання показав, учні експериментального класу набули вміння читати та записувати математичні записи, на високому і достатньому рівні з завданням справилось 41,2% учнів, у контрольному класі лише 17,7%. Учням контрольного класу важко далося виконання другого та третього завдання, учні експериментального класу зробили незначні помилки при виконанні 1а завдання.

Аналіз рефератів та письмових контрольних та самостійних робіт на володіння учнями мовною математичною культурою показав, що в учнів експериментального класу цей показник також покращився. 47,2% учнів ЕК та 17,7% старшокласників КК виявили вміння вільно і впевнено користуватися мовними засобами, переконливо аргументувати математичні думки, роботи виконані грамотно, акуратно. 23,5%старшокласників ЕК та 41,2% – КК в оперуванні мовними засобами допускали помилки, намагалися їх виправити, що привело до неакуратного оформлення реферату. 5,8% школярів експериментального класу та 23,5% старшокласників із контрольного класу не оволоділи мовною математичною культурою. Речення побудовані сумбурно, важко зрозуміти, що вони хотіли виразити, що довести. Роботи оформлені неакуратно, багато помилок.

Результати повторного діагностування за третім критерієм занесені до таблиці 2.10 та представлені діаграмою на рис.2.9.

Таблиця 2.10

Рівні сформованості математичної культури ЕК та КК за володінням мовною математичною культурою на контрольному етапі

Клас, 25 учнів	Рівень сформованості							
	Низький		Середній		Достатній		Високий	
	кількість	%	кількість	%	кількість	%	кількість	%
ЕК	1	5,8	7	41,2	5	29,5	4	23,5
КК-1	4	23,5	8	47,2	3	17,6	2	11,7

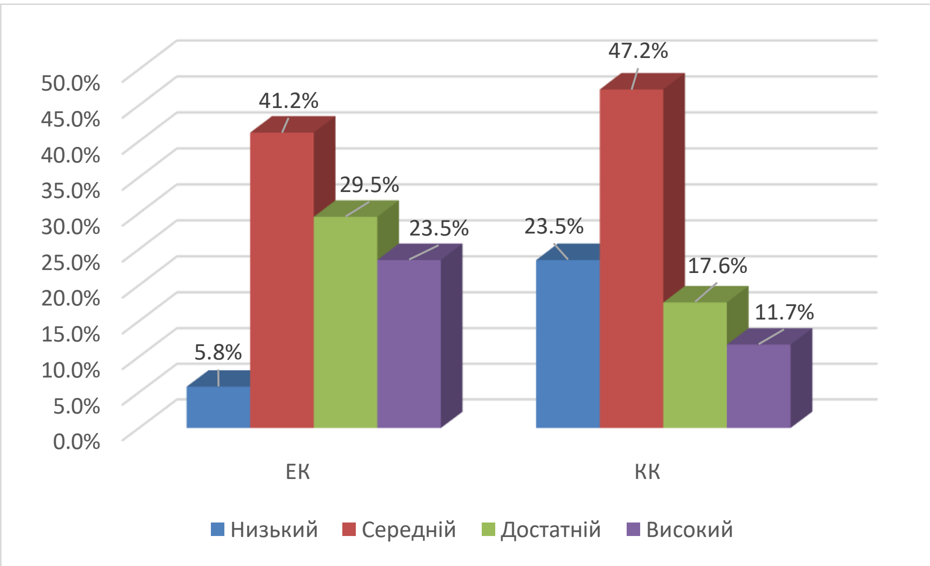


Рис. 2.9. ***Рівні сформованості математичної культури ЕК та КК за володінням мовною математичною культурою на контрольному етапі***

Дані таблиці 2.10 та діаграми на рис. 2.9. свідчать про те, що за рівнем володіння мовною математичною культурою експериментальний та контрольний класи залишилися на середньому рівні (41,2% – ЕК, 47,2% – КК), низький рівень у експериментальному класі знизився до 5,8%, в контрольному класі – до 11,7%. Достатній та високий рівень підвищилися до 29,5% та 23,5% відповідно в експериментальному класі та до 17,6% і 11,6% – в контрольному класі.

Зведені результати рівнів сформованості математичної культури старшокласників на контрольному етапі дослідження подані у таблиці 2.11 та діаграмі на рис. 2.10.

Таблиця 2. 11

Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального та контрольного класів на контрольному етапі дослідження

Клас, 25 учнів	Рівень сформованості			
	Низький	Середній	Достатній	Високий
	%	%	%	%
ЕК	7,8	35,3	31,5	25,5
КК	25,5	41,3	21,5	11,7

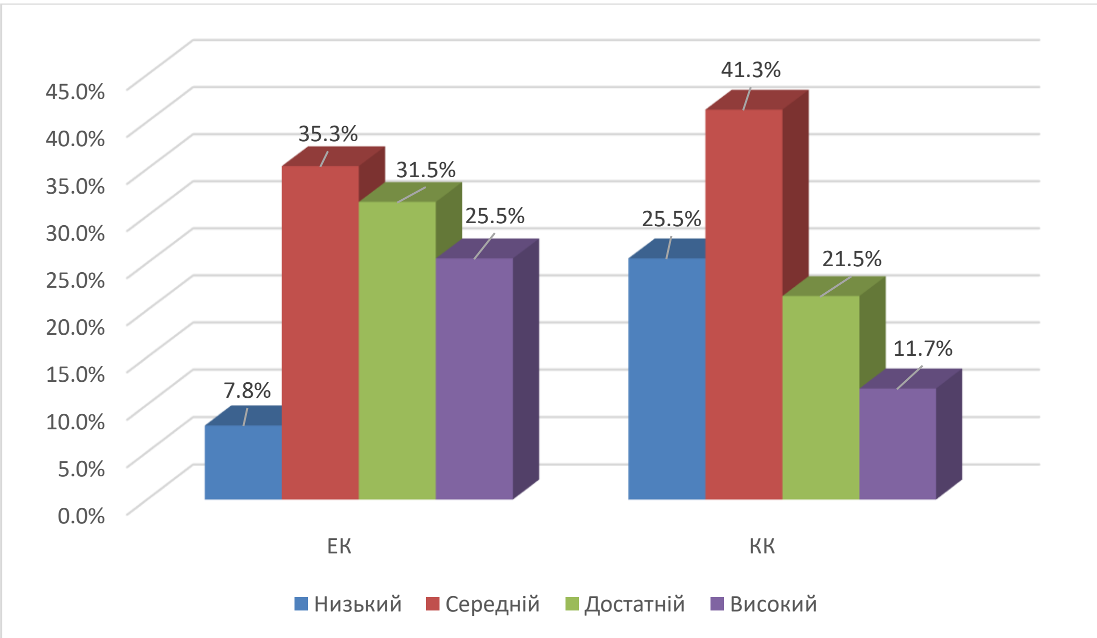


Рис. 2.10. ***Рівні сформованості математичної культури учнів експериментального та контрольного класів на контрольному етапі дослідження***

Дані таблиці 2.11 та діаграми на рис. 2.10. свідчать про те, що позитивні зміни у рівнях сформованості математичної культури відбулися в обох групах, але залишився на середньому рівні (35,3% – ЕК, 39,3% – КК), низький рівень знизився до 7,8% в ЕК та до 27,5% – в КК.; високий рівень у учнів експериментального класу підвищився до 25,5%, у контрольному класі – до 11,7%, достатній рівень підвищився в ЕК до 31,5% , в КК – до 21,5%.

Як бачимо позитивні зміни відбулися в обох класах. Простежимо динаміку змін, що відбулися у рівнях сформованості математичної культури учнів експериментального і контрольного класів за час проведення експерименту (рис. 2.11).

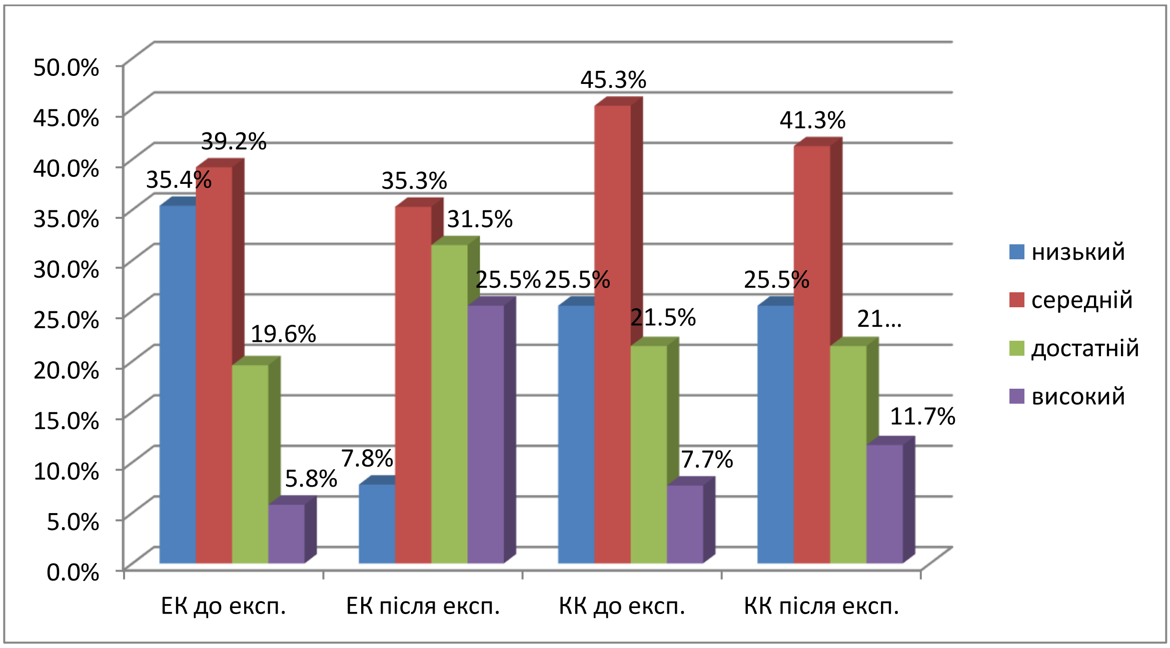


Рис. 2.11. ***Динаміка змін що відбулася в рівнях сформованості математичної культури учнів ЕК та КК за час проведення експерименту***

Проаналізуємо дані діаграми на рис. 2.11.

Низький рівень сформованості математичної культури учнів експериментального класу знизився на 9,9% (контрольного – залишився без змін – 25,5%); середній рівень зменшився на 3,9% (в контрольному класі – зменшився на 4%), кількість учнів експериментального класу, які підвищили свій рівень математичної культури до достатнього збільшилась на 11,9% (контрольного – на 4%), кількість учнів ЕК з високим рівнем збільшилась на

19,7%, в контрольному класі – на 4%.

Отже, в експериментальному класі за час проведення експерименту відбулися суттєві зміни, в контрольному – незначні. Це свідчить про ефективність використання прикладних задач як засобу формування математичної культури старшокласників.

2.4. Рекомендації вчителям щодо формування математичної культури старшокласників засобом прикладних задач

З метою підвищення ефективності формування математичної культури старшокласників розроблено методичні рекомендації щодо підвищення математичної культури старшокласників засобом прикладних задач.

1. Використовуйте задачі прикладного змісту з метою:

   – збільшення обсягу та покращення якості математичних знань;

   – залучення старшокласників для математичної самоосвіти;

   – для покращення мовної математичної культури.

2. Повторюйте загальнофункціональні поняття з учнями 10 класу, використовуючи прикладні задачі на визначення залежностей реальних процесів та явищ. Залежності задавайте аналітично та графічно, використовуйте при цьому наочність
3. Підбирайте прикладні задачі цікаві за змістом і зрозумілі учням. Наприклад, запропонуйте старшокласникам визначити висоту дубу віком 5; 15; 20 років задавши формулу залежності висоти дубу від його віку. Можна запропонувати визначити у якому віці висота дубу буде 12 м.
4. Пропонуйте учням прикладні задачі на екологічну тему під час дослідження функцій. Наприклад, «Досліджуючи екологічний стан притоки річки, вченими було встановлено залежність швидкості течії притоки v (в м/с) від її відносної глибини h (в м): $\gamma = -0{,}225h^2 * 0{,}130h + 0{,}958$. Знайдіть відносну глибину притоки річки, для якої швидкість течії найбільша, та найбільшу швидкість течії притоки річки».
5. Впроваджуйте в курс «Алгебри і початки аналізу» прикладні задачі, що допоможуть учням зрозуміти різні природні процеси (біологічні, хімічні, фізичні) та набути умінь і навичок використовувати математичні знання у повсякденному житті. Наприклад, задачі на розмноження бактерій, радіоактивний розпад, швидкість зростання чисельності населення,

швидкість розповсюдження епідемій, на визначення залежності ємності легенів людини від її віку у роках, залежності середнього росту дитини від її віку тощо. Такі задачі допомагають старшокласникам краще зрозуміти властивості степеневих функцій, засвоїти поняття, пов’язані з ними.

6. Використовуйте задачі на обчислення швидкості приросту бактерій в певний час, швидкості розчинення пігулки в організмі людини, розкладання хімічної речовини під час вивчення похідної та її застосування. Задачі допоможуть старшокласникам глибше засвоїти правила знаходження похідної, її використання в повсякденному житті.
7. Досліджуючи функцію на монотонність, на визначення інтервалів зростання або спадання, запропонуйте учням дослідити графік зміни тиску крові вздовж судинного русла, визначити залежність тиску крові від товщини сосудів, вказати ділянки з найбільшим і найменшим тиском. Також учням можна запропонувати графік залежності висоти яблуні від її віку з метою визначення залежності її висоти від віку.
8. Пропонуйте школярам прикладні задачі на обчислення максимального розміру популяції бактерій, максимальної реакції організму на введені ліки під час введення понять точки максимуму і мінімуму функції та екстремуму функції (максимум і мінімум функції).
9. Під час дослідження функцій за загальною схемою учням пропонують розв’язати прикладні задачі такого типу: «Концентрація сахарози (моль/л) в момент часу t (хв) задана формулою $f(t)$ = $e^{-0,0035}$, де $t \geq 0$. Дослідить функцію $f(t)$ і побудуйте її графік. Визначте за який час концентрація досягне половини свого початкового значення. Підтвердить результат графічно».
10. Розкривайте учням 11-го класу смисл довільної сталої C у загальному вигляді первісної за допомогою прикладних задач на знаходження закону зміни чисельності певної популяції в залежності від часу
11. Закріплюйте властивості первісної, правил її знаходження за допомогою таких задач прикладного змісту: «Концентрація лікарського препарату

зменшується в організмі зі швидкістю $w(t)=-100\ e^{-t}$, де t – час, виражений у годинах. Знайти закон зміни його кількості у крові хворого, якщо початкова кількість дорівнює 200 одиниць». Або запропонуйте старшокласникам визначити швидкість поширення епідемії, популяції комах тощо.

12. Пропонуйте учням задачі на використання інтегралу: визначити приріст бактерій, зміну концентрації речовини за деякий час.
13. Навчайте учнів складати математичні моделі реальних процесів. З цією метою розв'язуйте з ними прикладні задачі, які приводять до поняття диференціальних рівнянь. Наприклад, задачі на знаходження закону зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо відомо, що через одну годину після введення 10 мг препарату, його маса зменшилась у два рази. Математичною моделлю даної задачі є найпростіше диференціальне рівняння.
14. Складайте математичні моделі з учнями для задач, які приводять до диференціального рівняння показникового зростання чи спадання. Наприклад, розберіть з ними таку задачу: «Швидкість розмноження мікроорганізмів пропорційна їх чисельності. Їх чисельність подвоюється на протязі 2 годин. Знайдіть залежність чисельності мікроорганізмів від часу». Математична модель для такої задачі має вигляд $f\,'(x) = k\,f\,(x)$, де k – деяка константа.
15. Ознайомлюйте учнів з елементами комбінаторики та теорії ймовірностей на прикладі задач прикладного змісту, оскільки теорія ймовірностей виникла у зв'язку з практичними потребами і застосовується в різних галузях науки, виробництва та економіки.
16. Використовуйте наступні прикладні задачі на введення поняття показникової, логарифмічної, степеневої функцій:

   – Населення району складає 50 000 чоловік. Щорічний приріст населення становить 1%. Визначте, як буде змінюватись чисельність населення протягом 20 років за умови, що значення приросту буде сталим.

– У пробірку потрапила одна бактерія, яка почала швидко розмножуватись шляхом ділення навпіл через кожні дві години. Скільки бактерій буде у пробірці через 12 годин? Через який час у пробірці буде 500000 бактерій?
– Населення міста щорічно збільшується на 3%. У скільки разів воно збільшиться за рік? за 25 років?
– У 2000 році на Землі проживало наближено 7 мільярдів чоловік. У кінці 90-х років приріст населення складав 1,8 % на рік. Якою буде чисельність населення планети при збереженні темпу росту у: а) 2030 році; б) 2100 році?
– При радіоактивному розпаді за добу розпадається 1,5% урану. Скільки урану залишиться до кінця 3-ї доби, якщо на початку її було 20 грамів?
– Період піврозпаду радію становить 1620 років. Скільки радію залишиться: через 3240 років; 4860 років? Визначте, скільки відсотків складає існуюча нині на Землі кількість радію від тієї кількості, яка була на Землі на початку нашої ери?

17. Використовуйте задачі, подані у додатку Л даного дослідження для введення похідної та її застосування.
18. Використовуйте задачі №№ 1-10, подані у п. 2.2. даного дослідження при введенні понять похідної, її застосування, загальнофункціональних понять тощо.
19. Пропонуйте учням розв'язувати прикладні задачі на знаходження похідної біологічного або хімічного змісту за складеним алгоритмом:

Таблиця 2.12

Алгоритм розв'язання прикладних задач на знаходження похідної біологічного або хімічного змісту

Функція	Приріст аргументу	Приріст функції	Середня швидкість зміни функції	Миттєва швидкість зміни функції
1. $P=P\ (t)$ - чисельність популяції в момент часу t;	$\Delta\ t$	$\Delta P =$ $= P\ (t + \Delta t) - P\ (t)$	$V_{\text{ср}} = \Delta P/\Delta\ t$ $=\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$	$V=\lim\limits_{\Delta t\to 0} V_{\text{ср}}$ швидкість зростання популяції

[особин]				

Продовження таблиці 2.12.

2. $C = C(t)$ – концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t; [моль/л]	Δt	$\Delta C =$ $= C(t + \Delta t) - C(t)$	$V_{ср} = \Delta C/\Delta t$ $= \frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}$	$V_р = \lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{ср}$ швидкість хімічної реакції.

20. Використовуйте задачі прикладного змісту систематично.
21. Підбирайте задачі з цікавим і зрозумілим для учнів змістом.
22. Залучайте учнів для складання прикладних задач.

ВИСНОВКИ

Теоретичний аналіз літературних джерел виявив актуальність проблеми використання прикладних задач з алгебри і початків аналізу як засобу підвищення математичної культури старших учнів.

Була виявлена сутність поняття «математична культура». Науковці розуміють під даним поняттям складну систему взаємнозалежних, взаємнообумовлених якостей особистості, компонентами яких виступають математичні знання, математичні уміння та навички, уподобання, естетичні уподобання, а також культура математичного мовлення, графічна, знаково-символьна культура, культура мислення, комунікаційна математична культура тощо. Виходячи з цього визначення у старшокласників потребують підвищення рівні математичного розвитку (знання, самоосвіта, мовна культура), сформованості математичного мислення, вчити їх грамотно пояснювати всі виконані дії, формувати вміння використовувати набуті знання практично.

З'ясовано, що для розвитку математичної культури необхідно розвивати математичні здібності – своєрідні властивості людини, її інтелекту, що виявляються в навчальній, трудовій, науковій та інших видах діяльності і слугують необхідною умовою її успіху. Розвиток творчих здібностей потребує розвитку пам'яті, мислення, проведення дослідницької діяльності, яка розвиває перелічені психічні процеси.

На основі аналізу програми з математики за 10-11 класи встановлено, що програма передбачає розв'язання прикладних задач при вивченні тем «Функції, многочлени, рівняння, нерівності», «Степенева функція», «Похідна та її застосування», «Показникова та логарифмічна функції», «Інтеграл та його застосування», «Рівняння, нерівності та їх системи».

На основі аналізу навчальних посібників з курсу «Алгебра і початки аналізу та геометрія» стандартного і профільного рівнів встановлено, що автори Г. Бевз та О. Істер найбільш повно розкрили прикладну спрямованість математики і за стандартним рівнем, і за профільним. У навчальних посібниках авторського колективу під керівництвом А. Мерзляка бракує задач прикладного змісту.

Обґрунтовано роль прикладних задач як засобу підвищення математичної культури старшокласників. Прикладна задача – це така задача, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, які виникають на практиці. Етапи розв'язання прикладної задачі: створення математичної моделі, її дослідження та інтерпретації отриманого результату. Моделювання прикладних задач формує в старшокласників уміння грамотно, лаконічно висловлюватися, здобувати потрібну інформацію, підвищувати математичну самоосвіту, вміння використовувати набуті знання та уміння в житті, тобто у них сформується математична культура .

З метою перевірки ефективності використання прикладних задач як засобу формування математичної культури учнів під час проходження педагогічної практики був проведений педагогічний експеримент, який складався з трьох етапів: констатувального, формувального, контрольного. Експеримент проводився на базі ЗОШ № 3 м. Глухова Сумської області. В експерименті взяли участь учні 10-го та 11-ого класів (всього 34 старшокласника), учителі математики.

Для проведення констатувального етапу дослідження визначені критерії, показники, розроблені рівні сформованості математичної культури, підібрано діагностичний матеріал.

Результати констатувального етапу засвідчили середній рівень сформованості математичної культури учнів експериментального (39,2%) та контрольного (45,3%) класів. Високий і достатній рівні мають 19,6% і 5,8% учнів експериментального класу та 21,5% і 7,7% – контрольного класу. На низькому рівні математична культура сформована у 25,5% старшокласників контрольного та 35,4% експериментального класів. Анкетування вчителів показало, що систематично прикладні задачі як засіб виховання математичної культури використовують лише 20% педагогів, решта – використовують епізодично, в основному, при вивченні теми «Застосування похідної».

На формувальному етапі проведена робота з формування математичної культури учнів експериментального класу засобом прикладних задач. Підібрані задачі для повторення загальнофункціональних понять, які сприяли розширенню обсягу математичних знань учнів, підвищенню зацікавленості математикою, зрозумінню процесів, що відбуваються у природі. Підібрана низка задач на визначення поняття похідної, на її фізичний та хімічний зміст; розроблено алгоритм розв'язання прикладних задач на знаходження похідної біологічного або хімічного змісту.

Ефективність використання прикладних задач у процесі формування математичної культури учнів була перевірена контрольним етапом експерименту. Повторне діагностування дало такі результати: низький рівень сформованості математичної культури учнів експериментального класу знизився на 9,9% (контрольного – залишився без змін, 25,5%); кількість учнів з середнім рівнем зменшилась на 3,9% (в контрольному класі зменшилась на 4%), до достатнього рівня математичну культуру підвищило на 11,9% більше в порівнянні з констатувальним етапом (в контрольному класі – на 4%); кількість учнів експериментального класу з високим рівнем збільшилась на 19,7%, в контрольному класі – на 4%. Тобто, в експериментальному класі відбулися суттєві зміни, в контрольному – незначні, що підтверджує ефективність використання прикладних задач як засобу формування математичної культури старшокласників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. . Академічний тлумачний словник української мови. URL: http://sum.in.ua/(дата звернення 10. 03.23).
2. Ачкан В. В. Прикладні задачі як засіб підвищення математичної культури учнів у процесі вивчення рівнянь і нерівностей в курсі алгебри та початків аналізу. Математика в школі. 2011. № 2. С. 31–34.
3. Ачкан В. В. Виділення орієнтовних основ діяльності з розв'язування рівнянь та нерівностей як засіб формування математичних компетентностей старшокласників. Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). Бердянськ : БДПУ, 2010. № 3. С. 216–222.
4. Бабанський Ю. К. Педагогіка. 2-ге вид. Київ : Просвітництво, 2018.
5. Бевз Г. П. Прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії. Математика, №№ 25-28, 2000. С. 28–30.
6. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
7. Бевз В.Г., Кузьменко В.У. Розвиток математичних здібностей у школярів. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс - 2011»:* матеріали Всеукраїнської дистанційної науково-методичної конференції з міжнародною участю: У 3-х томах. Суми: Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2011. Том 1. С. 20-21.
8. Бібік Н. М., Єрмаков І. Г., Овчарук О. В. Компетентнісна освіта – від теорії до практики. Київ : Плеяда, 2005. 120 с.
9. Блехман І.І., Мишкіс А.Д., ПановкоЯ.Г. Прикладна математика: логіка, особливості підходів.-Київ.:Наукова думка,1996.
10. Боброва І. І. Методика використання електронних навчально-методичних комплексів як спосіб початку дистанційного навчання. Інформатика та освіта. 2019. № 2. С. 15–17.

11. Бондаренко Т. Практичні роботи на уроках математики. URL : http://klass.ho.ua/index.php?job=10002910. (дата звернення 30.03.20).
12. Булычев В.А. Математическое моделирование при изучении элементов теории вероятности / В.А. Булычев, В.В. Калманович // Математика в школе. − 2009. −№ 3. − С. 23-28
13. Бурда М. І. Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В., шуленко О. П. Концепція Математичної освіти 12-річної школи. URL : www.undip.org.ua › library › kontsept_detail (дата звернення 2.04.20).
14. Вozняк Г. М., Маланюк К. П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя. К. : Рад. шк., 1989. 128 с.
15. Вozняк Г., Возняк О. Прикладні задачі: від теорії до практики. Тернопіль: Мандрівець, 2003. 80 с.
16. Воєвода А. Л. Чи допоможе математика в житті? Математика в рідній школі. 2017. № 9. С. 14-17.
17. Губа Л. А. Нетрадиційні уроки математики. Харків. Основа, 2005. 65 с.
18. Дворнікова Н. Педагогічні умови модернізації навчально-виховного процесу у ВНЗ: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: спец. 13.00.04 «Теорія і методика професійної освіти». Київ: Ін-т вищої освіти АПН України, 2009. 20 с
19. Державна національна програма «Освіта» (Україна XXI століття). URL: ualib.com.ua/br_563. Html. (дата звернення 9.01.19). (дата звернення 23.03.20).
20. Державний стандарт базової і повної загальної освіти. URL : ru.osvita.ua › ... › Середня освіта (дата звернення 3.04.20).
21. Енциклопедія освіти / головний ред. В. Г. Кремень. Київ: Юрінком Інтер, 2008. 1040 с.
22. Загальна психологія: підручник / за заг. ред. академіка С. Д. Максименка. [2-ге вид., переробл. і доп.]. Вінниця: Нова Книга, 2004. 704 с.

23. Зінченко Г. Є. Математична культура як інноваційна складова професійної компетентності майбутнього вчителя математики. Педагогічні науки. Полтава, 2015. № 64. С. 88–90.

24. Істер О.С., О. В. Єргіна. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти. Київ : Генеза, 2018. 448 с.

25. Істер О. С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2018. 384 с

26. Істер О. С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 304 с..

27. .Киякбаева А. Л. Необходимость использования прикладных задач в обучении математике // Молодой ученый. 2015. № 19. С. 9-11. URL : http://moluch.ru/archive/99/22150/13. (дата звернення 29.03.20).

28. Концепція математичної освіти 12-річної школи. URL : https://lib.iitta.gov.ua/711990/1/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%86%D0%B5%D0%BF%D1%86%D1%96%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D1%97%20%D0%BE%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B8.pdf (дата звернення 15.08.23).

29. Красовицький М., Бєлкіна О. Сучасні уроки (інноваційні технології: тренінги, інтерактивні форми навчання, критичне мислення) // Завуч. – 2002. № 35. С. 6.

30. Куприянов Б. В. Современные подходы к определению сущности категории «педагогические условия». Вестн. Костромск. гос. ун-та им. Н. А. Некрасова. 2001. № 2. С. 101–104.

31. Лавінський М., Пінчук О. Математика в економіці // Математика. № 27-28 (471–472). 2008. С. 31–36.

32. Лисенко В. І., Пономаренко Ю. І. Економічні задачі у загальноосвітній школі // Математика. № 21 (225). Червень 2003. С. 13–19.

33. Лернер І. Я. Дидактичні засади методів навчання. Дніпро : Педагогіка, 2011. 186 с.
34. Ліпатнікова І. Г. Зміст математичної освіти в контексті реалізації концепції математичної освіти державного стандарту загальної освіти. Актуальні питання викладання математики, інформатики та інформаційних технологій. 2017. № 1. С. 5–13.
35. Лодатко Є. О. Математична культура як феномен сучасного інформаційного суспільства / Є. О. Лодатко // Рідна школа. – 2004. – № 9. – С. 24-26
36. Математика. Програми для 10 класу. URL : www.mon.gov.ua/ main.php?query= education /average/prog12. (дата зверення 25.03.20).
37. Математика 5-9 класи. URL : https://base.kristti.com.ua/?p=4514 (дата звернення 20.08.23).
38. Математичний словник. Математика, логіка, інтелект. URL : https://formula.co.ua/uk/math-dictionary (дата звернення 20.03. 23).
39. Маркова І. С. Інтерактивні технології на уроках математики. Харків. Вид. гр. «Основа». 2007. 214 с.
40. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2018. 400 с.
41. Мерзляк А. Г. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підручник для 10 кл. закладів загальноосвітної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 256 с.
42. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія 2019. 208 с.
43. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія : профільний рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти /

А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.

44. Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами II Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 18 жовтня 2018 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2018. 221 с.
45. Методика використання прикладних задач у шкільному курсі математики. Методичний посібник. / уклад. А. П. Королюк. Рівне: РОІППО, 2018. 30 с.
46. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx. (дата звернення 3.04.23).
47. Найдьонова О. О., Канакіна Л. П. Педагогічні функції прикладних задач // Математика. 2004. № 3, січень. С. 12.
48. Павелків Р.В. Вікова психологія: підручник для студ. вищ. навч. закл. Київ: Кондор, 2011. 469 с.
49. Пелагейченко В.О. Формування математичної культури учнів на уроках математики засобами проектної діяльності. URL : http://mathematicculture.blogspot.com/p/blog-page_78.html (дата звернення 21.05.23).48
50. Полонский В. М. Понятийно-терминологический аппарат педагогики. Педагогика. 2017. С. 17.
51. Пометун О., ПироженкоЛ. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання, Київ «Видавництво А.С.К.», 2004. 192 с.
52. Пометун О. Технологія інтерактивного навчання як інноваційне педагогічне явище // Рідна школа. 2006. Червень. С. 50-52.
53. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія. Харків : Факт, 2005. 360 с.
54. Скипченко О. В., Долинська Л.В. Загальна психологія. Київ : Каравела. URL : https://pidru4niki.com/14410703/psihologiya/klasifikatsiya_vidchuttiv (дата звернення 25.04.23).

55. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К. : Зодіак – ЕКО, 2000. 512 с.
56. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
57. Старостіна А. Є., Винокурова С. З. Формування математичних понять у шкільному курсі математики. Навчання та виховання: методика та практика 2017/2018 навчального року. Київ : Товариство з обмеженою відповідальністю «Центр розвитку наукового співробітництва», 2017. С. 99–103.
58. Стерневська Т. Математичне моделювання // Математика. 2006, № 11. с. 7–11.
59. Теорія та методика навчання математики: загальна методика: навч. посібник / за ред. Є. А. Суховієнко, З. П. Самігулліна, С. А. Севостьянова, Є. М. Ерентраут. Тернопіль : Вид-во «Освіта», 2010. 65 с.
60. Ткач, Ю. М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: навчально-методичний посібник / Ю. М. Ткач. - Х. : Ранок, 2011. 176 с.\
61. Третяк М.В. До питання про математичну культуру / М.В. Третяк // Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики». До 80-річчя з дня народження доктора педагогічних наук, професора З.І. Слєпкань. Тези доповідей. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 352 с.
62. Тур Г. І. Математична культура особистості в структурі філософського та психолого-педагогічного знання. Проблеми сучасної педагогічної освіти. Педагогіка і психологія. 2018. Вип. 38(2). С. 98–105.
63. Філімонова М. О., Швець В. О. Математичне моделювання в курсі математики основної школи: зміст і вимоги до підготовки учнів // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. Вип. 34. Донецьк: Вид-во ДонНу, 2010. С. 72–76.

64. Фіцула М. М. Педагогіка : Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. К. : Академія, 2000. 544 с.
65. Формування життєвих вмінь та навичок учнів на уроках математики шляхом використання прикладних задач. URL : http://schoolv.ucoz.ru/publ/formuvannja_zhittevikh_vmin_ta_navichok_uchniv_na_urok akh_matematiki_shljakhom_vikoristannja_prikladnikh_zadach/1-1-0-1. (дата звернення 23.03.20).
66. Холін Ю. В. Завтрашній українець: розумник чи неук? Пріоритети реформування середньої освіти / Ю. В. Холін // Научно-популярный журнал UNIVERSITATES [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://universitates.univer.kharkov.ua/arhiv/2002_4/holin/holin.html
67. Шапар В. Сусасний психологічний словник. Харків : Прапор, 2007. 640 с.
68. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики // Дидактика математики : проблеми і дослідження : міжнародний збірник наукових робіт. Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. № 32. С. 16-23.
69. Шкурак В. Квадратична функція та її графік // Математика. 2005. № 40. С. 19- 23.

Додаток А

Діагностичний матеріал для виявлення рівня сформованості математичної культури старшокласників за обсягом і якістю математичних знань та вмінь

Контрольна робота

1° (1 бал). Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^6$: 2) $f(x) = 5\cos x$;

3) ф(x) = $3x^{-2}$; 4) ф(x) = ctgx.

2° (2 бали). Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x\sin x$; ------------------------ 2) $g(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$.

3° (2 бали). Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^2 - 6x + 1$ на проміжку [0: 4].

4 (2 бали). Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x$ в точці з абсцисою $x_п = 2$.

5 (2 бали). Дослідіть функцію $y = 2x^3 + 3x^2$ та побудуйте її графік.

6 (3 бали). Вантаж масою 0,4 кг коливається на пружині. Його швидкість змінюється за законом $V = V_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, де t - час з моменту початку коливань, T=2T=2 с. - період коливань, V_0 = 0,3 (м/с). Кінетична енергія E вантажу вимірюється в джоулях і визначається формулою $E=2\frac{mv^2}{2}$, де m - маса вантажу в кілограмах, v - швидкість вантажу в м/с. Знайдіть кінетичну енергію вантажу через 3 секунди після початку коливань. Відповідь дайте у джоулях.

Додаток Б

Діагностичний матеріал для виявлення рівня сформованості математичної культури старшокласників за обсягом і якістю вмінь математичної самоосвіти

Оберіть одну із запропонованих тем і напишіть реферат.

Теми для написання рефератів:

1. Використання практичних задач у банківській сфері.
2. Використання задач прикладного змісту у будівництві.
3. Використання прикладних задач в екології.
4. Похідна та її застосування.
5. Історія розвитку поняття інтеграл.
6. Похідна функції. Правила диференціювання. Вправи.
7. Загадки піраміди
8. Графічний підхід до вирішення деяких тригонометричних рівнянь
9. Алгоритми вирішення тригонометричних рівнянь і систем рівнянь.
10. Золота пропорція.

Бесіда з учнями

Мета: з’ясувати чи спрямовані дії старшокласників на отримання нових знань, удосконалення набутих знань шляхом самоосвіти

1. Чи цікаво тобі вивчати математику?
2. Які теми для тебе цікаві?
3. З яких джерел ти отримуєш цікаву для тебе інформацію з математики?
4. Чи є у тебе навики використати набуту інформацію?
5. Чи доводилося тобі використовувати набуті математичні знання у житті? Де саме?

Аналіз контрольних та самостійних робіт з тем:

1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності.
2. Степенева функція.
3. Тригонометричні функції.
4. Тригонометричні рівняння і нерівності.

Додаток В

Діагностичний матеріал для виявлення рівня сформованості математичної культури старшокласників за володінням мовною математичною культурою

1. Завдання на виявлення вмінь учнів записувати і читати математичні записі

1. Прочитайте математичну запис:

а) $y = \frac{1+x}{|x|-3}$. б) $\lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$. в) $v(t) = s'(t)$,

2. Сформулюйте означення і властивості модуля дійсного числа, користуючись малюнками:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad |a| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b| \qquad |0| = 0. \quad |-17| = 17;$$

3. Записати формулою речення:

а) Прискорення матеріальної точки в момент часу t дорівнює похідній другого порядку від закону руху

б) При x, що наближається до a, функція f(x) має границю, яка дорівнює b.

в) Скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ cos φ.

2. Аналіз рефератів

3. Аналіз контрольних та самостійних робіт учнів

Додаток Д

Анкета для вчителів

Мета: з’ясувати якими засобами педагоги формують математичну культуру старшокласників

Будь ласка, дайте відверті відповіді на поставлені нижче запитання. Дані потрібні для написання науково-дослідної роботи

1. Який у Вас стаж роботи? _________________
2. Як Ви розумієте поняття «математична культура»? _____________________
____
3. Як Ви вважаєте, чи варто формувати математичну культуру учнів? ____
4. Якими методами Ви формуєте математичну культуру старшокласників?
____
____
5. Які засоби Ви використовуєте для формування математичної культури учнів? ____
6. Чи використовуєте Ви прикладні задачі як засіб формування математичної культури? ____
7. При викладанні яких тем Ви розв’язуєте задачі прикладного змісту? _____
____
8. Як часто Ви використовуєте прикладні задачі з метою формування математичної культури учнів? _______________________________________
9. Які труднощі виникають у Вас у процесі формування математичної культури засобом прикладних задач? ________________________________
____
____

Дякую за співпрацю!

Додаток Е

План-конспект

уроку з алгебри і початків аналізу

Тема: Границя функції в точці. Похідна функції. Похідні найпростіших функцій.

Мета уроку:

– ознайомитися з поняттям границі функції в точці, похідної, таблицею похідних найпростіших функцій;

– виховувати зацікавленість математикою, уважне ставлення до оточуючих, самосвідомість, математичну культуру;

– розвивати логічне мислення, увагу, пам’ять.

Обладнання: класна дошка, плакати, персональний комп’ютер, мультимедійний проектор, екран.

Тип уроку: комбінований

План уроку:

№ п/п	Етапи уроку	Час, хв	Організаційно-методичні вказівки
1	Організаційна частина	2	
2	Оголошення теми і мети уроку	2	
3	Перевірка домашнього завдання. Актуалізація опорних знань учнів.	11	Фронтальне опитування
4	Вивчення нового матеріалу	15	Розповідь вчителя
5	Сприймання і осмислення, узагальнення і систематизація учнями нових знань	7	Розв’язання вправ
6	Підведення підсумків	5	бесіда
7	Домашнє завдання	3	Пояснення вчителя

Хід уроку

І. Організаційна частина (2хв.)

Привітання, перевірка присутності учнів, готовності класу до заняття (наявність підручників, зошитів, тощо).

ІІ. Оголошення теми і мети уроку (2 хв.)

Тема сьогоднішнього уроку: «Границя функції в точці. Похідна функції. Похідні найпростіших функцій». На уроці ми ознайомимося з поняттям границі функції в точці, похідної, ознайомимося з таблицею похідних найпростіших функцій, навчимося знаходити похідні найпростіших функцій.

ІІІ. Перевірка домашнього завдання. (11хв.)

1. Перевірити наявність виконаних домашніх завдань та відповісти на запитання, що виникли в учнів при виконанні домашніх завдань.

Фронтальне опитування

2. Сформулюйте означення і властивості модуля дійсного числа, користуючись малюнками:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad |a| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b| \qquad |0| = 0. \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad |-17| = 17;$$

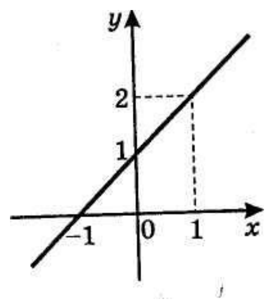
3. Усне розв’язування рівнянь і нерівностей з модулем за таблицею 2 для усних обчислень.

Таблиця 2

	1	2	3	4
1	|x| = 5	|x| = 0	|x| = -5	|x| = x
2	|x| = -x	|x-3| = 2	|x + 2| = 3	|x-1|+|x+1| = 0
3	|x| < 2	|x| > 0	|x| > -1	|x| > 3
4	|x-1| < 2	|x+1| < 2	|x - 1| > 3	|x + 3| > 1

IV. Вивчення нового матеріалу (15 хв.)

Сприймання поняття границі функції. (розповідь вчителя)



Побудуємо графік функції $f(x) = x + 1$ (рис. 1). Якщо х наближається до 1, то значення у наближається до 2.

Рис. 1

Говорять, що границя функції $f(x)$ при x, що наближається до 1, дорівнює 2 і записується: $\lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$. Розглянемо другий приклад. Побудуємо графік функції $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ розглянемо поведінку цієї функції при x, близьких до 1.

Функція $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ визначена при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ і графік являє собою пряму $y = x + 1$ з виколотою точкою х = 1 (рис. 2), бо функція

$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ не визначена в точці х = 1.

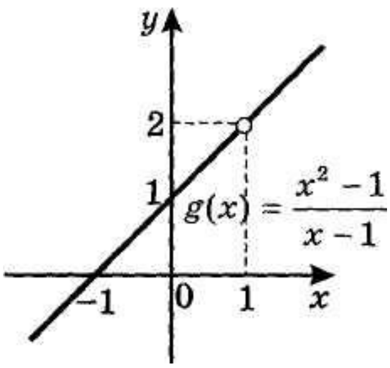


Рис.2

Якщо x наближається до 1 (зліва чи справа), то y наближається до 2 (відповідно знизу чи зверху).

Отже, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Розглянемо третій приклад. Побудуємо графік функції $h(x) = \begin{cases} x+1, \text{ якщо } x \geq 1, \\ x, \text{ якщо } x < 1. \end{cases}$

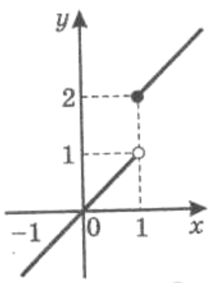


Рис. 3

(рис. 3) і розглянемо поведінку функції при x, що наближається до 1.

При $x \to 1$ (що наближається до 1) границі функції $h(x)$ не існує, оскільки не існує єдиного числа, до якого наближається функція при x, що прямує до 1. (Якщо x наближається до 1 зліва, то $h(x)$ наближається до 1; якщо ж x наближається до 1 справа, то $h(x)$ наближається до 2).

Таким чином:

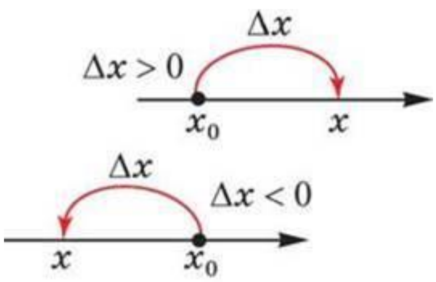
Якщо при значеннях x, що прямують до деякого числа a, значення функції $f(x)$ прямують до єдиного значення b, то говорять, що при x, що наближається до a, функція $f(x)$ має границю, яка дорівнює b, і це записується так: $\lim f(x) = b$ або $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Сприймання поняття похідної (розповідь вчителя)

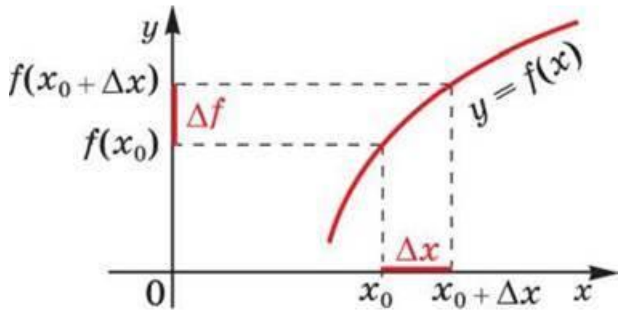
На практиці нас часто цікавить не значення якоїсь величини, а її приріст. Приріст величини позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта). Розглянемо поняття приросту для функції.

Спочатку розглянемо поняття приросту аргументу. Нехай x_0 - деяке фіксоване значення аргументу, а x- деяке довільне його значення. Різницю $x - x_0$ називають приростом аргументу (незалежної змінної) у точці x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»). Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідси $x = x_0 + \Delta x$.

Зауважимо, що значення Δx може бути як додатним, так і від'ємним. Зрозуміло, що коли $\Delta x > 0$, то $x > x_0$, а коли $\Delta x < 0$, то $x < x_0$ (мал. 2).



Мал 2



Мал. 3

Розглянемо значення функції *f(x)* у точках *x* та x_0, тобто *f(x)* та $f(x_0)$.

Значення функції *f (x)* змінилося при переході від точки x_0 до точки x на значення $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

Різницю $f(x) - f(x_0)$ називають приростом функції в точці x_0 і позначають Δf (читають: «дельта еф»). Оскільки $x = x_0 + \Delta x$, *то* $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, звідки $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$ (мал. 3).

Приклад 1. Знайти приріст функції $f(x) = 3x - 2$ в точці $x_0 = 1$, що відповідає приросту аргументу $\Delta x = 0,1$.

Розв'язання. $f(x_0) = f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Оскільки $x_0 + f(x = 1 + 0,1 = 1,1$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(1,1) = 3 \cdot 1,1 - 2 = 1,3$. Тоді $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1,3 - 1 = 0,3$. Відповідь. *0,3*.

Для функції поняття похідної є одним з найважливіших понять математичного аналізу. За допомогою похідної можна досліджувати властивості функцій, знаходити їх найбільше і найменше значення на проміжку тощо. Похідну застосовують у фізиці, економіці, інших науках.

Границю відношення приросту функції Δf у точці x_0 до приросту аргументу Δx, коли $\Delta x \to 0$, називають похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0. Похідну позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «*f штрих у точці* x_0») або так: $y'(x_0)$ (читають: «*y штрих у точці* x_0»). Означення похідної у вигляді формули можна записати так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо врахувати, що

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \text{ то}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцію $y = f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають диференційовною в цій точці. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що функція диференційована на цьому проміжку. Дію знаходження похідної називають диференціюванням функції.

Знайти похідну функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням можна за таким алгоритмом:

1) знайти приріст функції $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, що відповідає приросту аргументу Δx;

2) знайти відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ та спростити його;

3) знайти границю $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = x^2$ у точці x_0 - 7.

Розв’язання.

$$1)\ \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (7 + \Delta x)^2 - 7^2 =$$
$$= 49 + 14\Delta x + (\Delta x)^2 - 49 = 14\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$2)\ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{14\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(14 + \Delta x)}{\Delta x} = 14 + \Delta x.$$

$$3)\ f'(7) = \lim_{\Delta x \to 0} (14 + \Delta x) = 14.$$

Відповідь. $f'(7) = 14$.

Приклад 3. Чи має функція $f(x)=\begin{cases} x^2-3, \text{ якщо } x \leqslant 1, \\ 2x-4, \text{ якщо } x>1 \end{cases}$

похідну у точці $x_0 = 1$? У разі позитивної відповіді, знайти $f'(1)$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = (1) = 1^2 - 3 = -2$. Оскільки функцію $f(x)$ для різних значень аргументу задано різними формулами: для $x \leq 1$ - однією формулою, а для $x > 1$ - іншою, і дати відповідь про існування похідної потрібно саме в точці $x_0 = 1$, то під час розв'язування задачі треба розглянути два випадки $\Delta x < 0$ і $\Delta x > 0$.

Якщо

$$\Delta x < 0, \text{ то } \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 3 - (-2) =$$
$$= 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 + 2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тоді

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

Якщо

$$\Delta x > 0, \text{ то } \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(1 + \Delta x) - 4 - (-2) =$$
$$= 2 + 2\Delta x - 4 + 2 = 2\Delta x. \text{ Тоді } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

Отже, в обох випадках

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2,$$ тобто $f'(1)$ *існує і* $f'(1) = 2$.

Відповідь. *Має;* $f'(1) = 2$.

Похідні найпростіших функцій

Оскільки для кожного значення x_0 значення $f'(x_0)$ або єдине, або взагалі не існує, будемо розглядати похідну $f'(x)$ як функцію від x.

Для деяких функцій можна знайти формули їх похідних. Це дозволить знаходити похідну функції в точці не за означенням, а за формулою.

Знайдемо формули похідних деяких найпростіших функцій за означенням, замінивши в запропонованому вище алгоритмі x_0 на x.

Приклад 3. Нехай $f(x) = C$, де C - число. Тоді за алгоритмом:

$$1)\ \Delta f(x) = C - C = 0; \quad 2)\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0; \quad 3)\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0.$$

Отже, $C' = 0$.

Приклад 4. Нехай $f(x) = x$. Тоді:

$$1)\ \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x;$$

$$2)\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1; \qquad 3)\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Отже, $x' = 1$.

Приклад 5. Нехай $f(x) = x^2$. Тоді:

$$1)\ \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$2)\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

$$3)\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, $(x^2)' = 2x$.

Аналогічно можна знайти похідні й інших функцій шкільного курсу математики.

Радимо запам'ятати похідні функцій, які найчастіше використовують у курсі алгебри і початків аналізу:

$$C' = 0 \qquad x' = 1 \qquad (x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2 \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Зверніть увагу, що похідна функції - це також функція, а похідна функції в точці - це число. Отже, тепер, знаючи формули похідних, похідні функцій в точках можна обчислювати значно простіше, ніж за означенням. Для цього достатньо у формулу похідної функції підставити дану точку і виконати обчислення.

Приклад 6. Дано функцію $f(x) = x^3$. Знайти f'(-1), f'(2).

Розв'язання. Відомо, що похідною функції $f(x) = x^3$ є функція $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$ і $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Відповідь. $f'(-1) = 3;\ f'(2) = 12$.

Приклад 7. Розв'язати прикладну задачу:

Число N бактерій у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 521 + 21^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент $t = 0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу *3,5 хв*?

Розв'язання. Зрозуміло, що у початковий момент часу $t = 0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту числа бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t) = N'(t)$, то для відповіді на друге питання використаємо правило знаходження похідної.

1) Надамо t приросту Δt.

2) Знайдемо приріст залежної змінної ΔN :

$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = = 450 + 52(t + \Delta t) + 2(t + \Delta t)2 - (450 + 52t + 212) = 52\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \Delta t(52 + 4t + 2\Delta t)$.

3) Складемо відношення

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} : \frac{\Delta N}{\Delta t} = 52 + 4t + 2\Delta t.$$

4) Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} (52 + 4t + 2\Delta t) = 52 + 4t.$$

Ця границя і є швидкістю приросту числа бактерій в момент часу t. Тому, коли $t = 3{,}5$ хв, то $v = 66$ бакт/хв.

Відповідь. 450 бактерій; 66 бакт/хв.

Задачі такого типу розв'язуються не лише за правилом знаходження похідної, а й використовуючи інший прийом розв'язування – диференціювання функції, яка відіграє роль математичної моделі прикладної задачі.

V. Сприймання і осмислення, узагальнення і систематизація учнями нових знань (7хв.)

Розв'язання вправ (*колективне розв'язування задач з викликом учнів до дошки*)

1. Використовуючи графіки функцій (рис. 4), з'ясуйте:

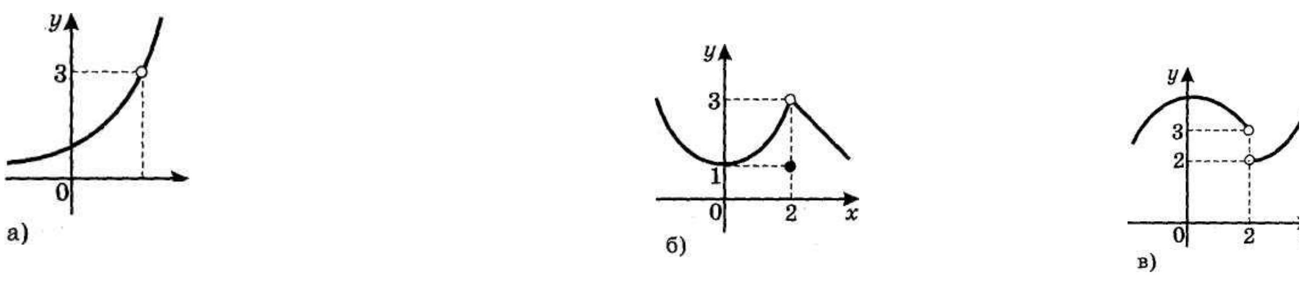


Рис. 4

1) Чи має границю функція в точці *x,* що прямує до 2? Якщо має, то чому дорівнює ця границя?

2) Чи залежить існування границі функції в точці від визначеності функції в цій точці?

3) Якщо функція визначена в точці, то чи завжди границя функції дорівнює значенню функції в цій точці?

2. Користуючись графіком, знайти границі (якщо вони існують):

а) $\lim\limits_{x\to 3} 5x$; б) $\lim\limits_{x\to 2} x$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$;

3. Розв'язання прикладної задачі:

Кількість бактерій N в деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 500 + 54t + 2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент часу $t = 0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу $t = 4$ хв?

IV. Підведення підсумків уроку (5хв.).

Фронтальне опитування, елементи бесіди.

– Що нового ви дізналися сьогодні на уроці?

– Як знайти приріст функції?

– Що таке похідна функції?

– Згадайте алгоритм знаходження похідної.

V. Домашнє завдання (3хв.).

Опрацювати § 14 розділу 3 підручника Г.П. Бевза.

Розв'язати №№ 513, 516, 522, № 415.

Розв'язати прикладну задачу: Розмір популяції комах у момент часу t (в днях) , задається формулою : $p\ (t)\ =9\text{-}10^4\ /\ (t\ +1)$. Знайдіть швидкість зростання популяції у момент $t = 5$ днів.

Додаток Ж

Тема: Фізичний, хімічний та геометричний зміст похідної

Мета уроку:

– навчальна: закріпити поняття похідної; сформувати в учнів поняття про геометричний, хімічний та фізичний зміст похідної; сформувати вміння знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці, знаходити швидкість зміни величини в точці, розв'язувати прикладні задачі.

– виховувати зацікавленість математикою, уважне ставлення до оточуючих, самосвідомість, математичну культуру;

– розвивати логічне мислення, увагу, пам'ять.

Обладнання: опорний конспект, табличка похідних, підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань і вмінь.

План уроку:

№ п/п	Етапи уроку	Час, хв	Організаційно-методичні вказівки
1	Організаційний етап	2	
2	Перевірка домашнього завдання. Актуалізація опорних знань учнів.	12	Тестування, бесіда
3	Оголошення теми і мети уроку	1	
4	Вивчення нового матеріалу	15	Розповідь вчителя, використання наочності
5	Сприймання і осмислення, узагальнення і систематизація учнями нових знань	7	Розв'язання вправ
6	Підведення підсумків	5	Бесіда, рефлексія
7	Домашнє завдання	3	Пояснення вчителя

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП (2 хв)

Привітання, перевірка присутності учнів, готовності класу до заняття (зовнішній вигляд, наявність підручників, зошитів, тощо).

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ (12 хв.)

1. Перевірка завдання, заданого за підручником.

Перевірити наявність виконаних домашніх завдань та відповісти на запитання, що виникли в учнів при виконанні домашніх завдань

2. Виконання тестових завдань із подальшою самоперевіркою і самооцінюванням (колективна робота)

Варіант 1

1) Знайдіть приріст функції f(x) = x - 1, якщо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$.

А. -0,1. Б. 0,1. В. -0,9. Г. 0,9.

2) Знайдіть приріст функції f(x) = 2x + 3 на відрізку [0;0,5].

А. -2. Б. 2. В. 1. Г. -1.

Варіант 2

1) Знайдіть приріст функції f(x) = 1 - x, якщо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$.

А. 0,9. Б. 0,1. В. -0,9. Г. -0,1.

2) Знайдіть приріст функції f(x) = -2x + 3 на відрізку [0;0,5].

А. -2. Б. -1. В. 1. Г. 2.

Відповіді

Варіант 1. 1) Б. 2) В.

Варіант 2. 1) Г. 2) Б.

III. ОГОЛОШЕННЯ ТЕМИ І МЕТИ УРОКУ (1 хв)

Тема сьогоднішнього уроку: «Фізичний та геометричний зміст похідної». На уроці ви закріпити поняття похідної, дізнаєтесь про геометричний та фізичний зміст похідної; навчитися знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці, а також знаходити швидкість зміни величини в точці.

IV. ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ (15 хв.)

Запишіть план вивчення теми у зошит:

1. Означення похідної.

2. Геометричний зміст похідної. Кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці.

3. Фізичний зміст похідної Швидкість та прискорення прямолінійного руху.

4. Хімічний зміст похідної. Концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t ; [моль/л].

5. Яку функцію називають диференційовною в точці? на проміжку?

6. Застосування означення похідної до обґрунтування формул для обчислення похідних деяких функцій (f(x) = c (c – стала); $f(x)=x$; $f(x)=x^2$; $f(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=\sqrt{x}$ тощо).

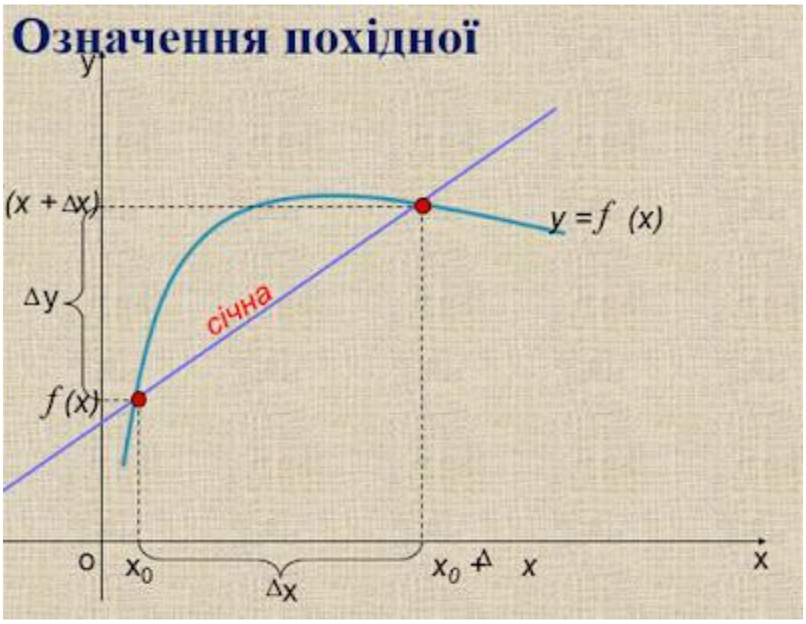
Похідна функції, її геометричний, хімічний і фізичний зміст

Похідною функціїу $y = f(x)$ в точці x_o називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

Функцію, яка має похідну в точці x_o, називають **диференційованою** в цій точці.

Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають диференційованою на цьому проміжку. Операція знаходження похідної називається **диференціюванням.**

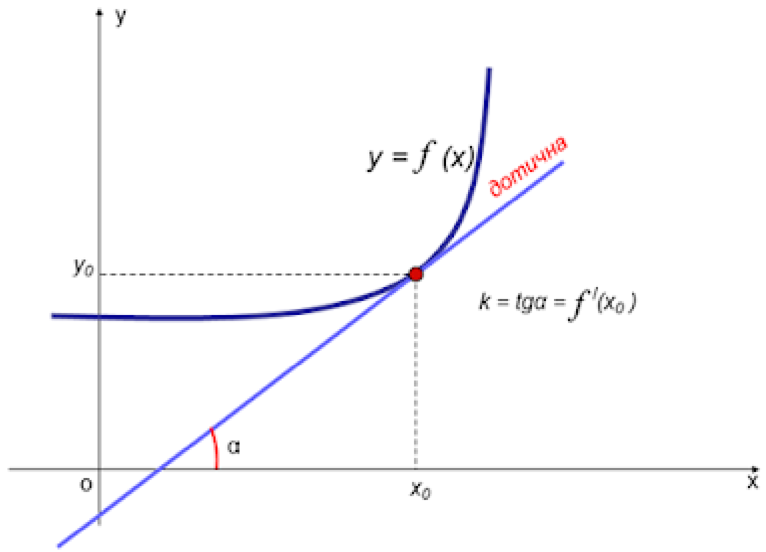


Запишіть у зошит похідні деяких функцій.

№	Функція	Похідна
1	$y = C$, C — стала	$y' = 0$
2	$y = x^p,\ p \in \mathbf{Z}$	$y' = px^{p-1}$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Геометричний зміст похідної:

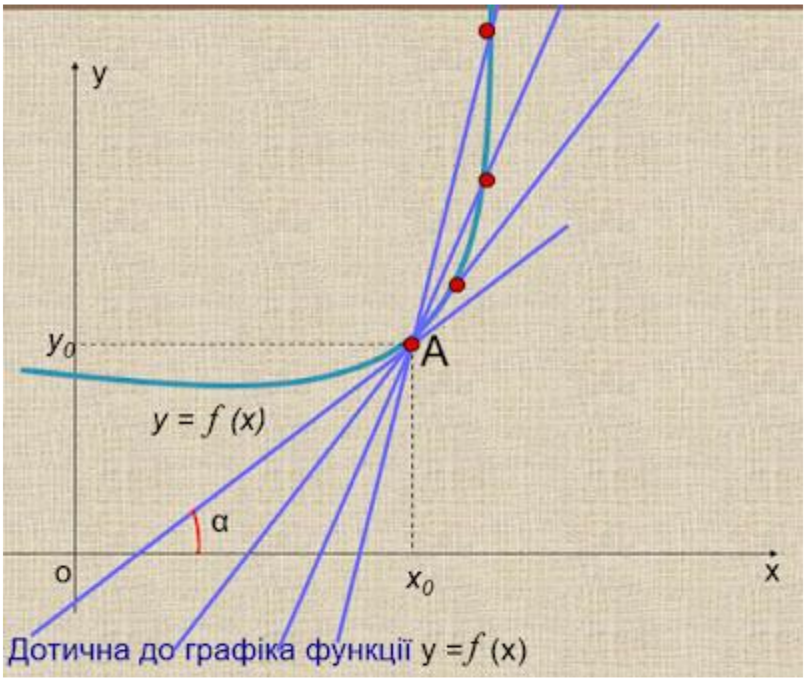
Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної.

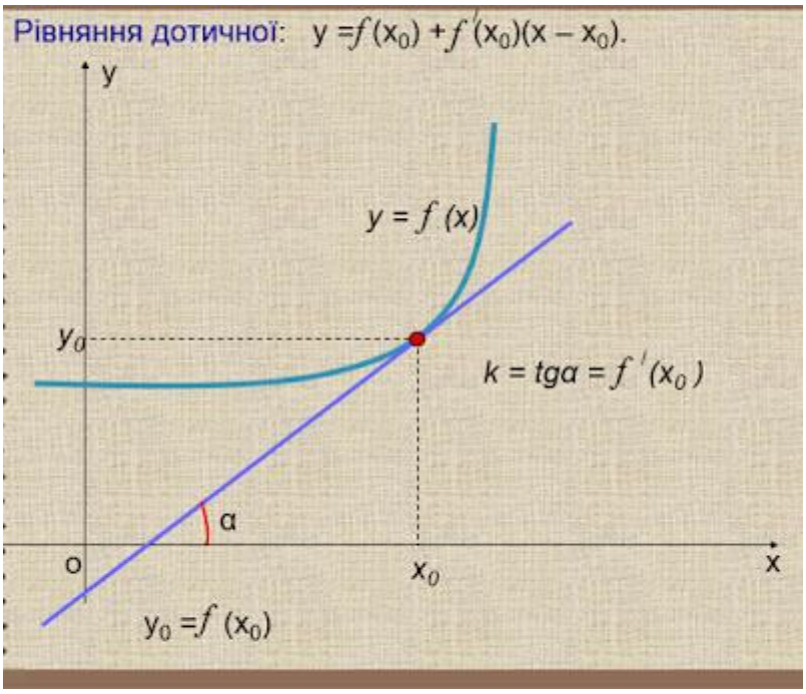


Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0\,;\,y_0)$ дорівнює значенню похідної в точці x_0.

k – кутовий коефіцієнт дотичної

k = tg α, α – кут нахилу дотичної





Отже, значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0:

$$\boxed{f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha}$$

Розглянемо приклад:

Рівняння дотичної до графіка функції y=f(x) в точці з абсцисою x_0 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

Приклад. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=x^3-\frac{1}{2}x^2-4$

у точці з абсцисою $x_0=2$

Обчислюємо значення функції в

точці $f\left(x_0\right)=f(2)=2^2-\frac{1}{2}2^2-4=8-2-4=2$

Знаходимо похідну $f'(x)=3x^2-x$

Знаходимо похідну в точці $f'(2)=3*2^2-2=12-2=10$.

Рівняння дотичної $y=2+10(x-2)=10x-18$.

Похідна функції має такий **геометричний зміст**: похідна функції в заданій точці є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції в цій точці, тобто дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці.

Фізичний зміст похідної

Похідна функції в заданій точці – швидкість зміни функції в заданій точці.

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється по закону s = s(t), то швидкість її руху $v(t)$ в момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$:

$$\boxed{v(t) = s'(t),}$$

прискорення цієї матеріальної точки дорівнює похідній другого порядку від закону руху

$$\boxed{a(t)= s''(t) =v' (t)}$$

Отже, **похідна** функції має такий **фізичний зміст**: похідна функції в заданій точці – швидкість зміни функції в заданій точці.

Приклад. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S=10t-t^2$. (час t вимірюється в секундах, переміщення s - у метрах). В який момент часу точка зупиниться? Точка зупиниться, коли її швидкість буде дорівнювати нулю.

Хімічний зміст похідної. Аналогічно фізичному змісту похідної, хімічний зміст похідної – це швидкість протікання хімічної реакції.

Приклад. Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m = m_0\, e^{-kt}$ де m_0 - початкова маса на момент часу $t = 0$, m - нерозчинена маса на момент часу t ; k - стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте швидкість розчинення.

Розв'язання. Масу лікарської речовини, що розчинилась на момент часу t , запишемо у вигляді $M = m_0 - m = m_0(1 - e^{-kt})$. Використовуючи хімічний зміст похідної, визначимо швидкість розчинення $M' = m_0\,(-e^{-kt})\,(-k) = km_0\, e^{-kt} = km$.

Відповідь. km - швидкість розчинення лікарської речовини.

V. СПРИЙМАННЯ І ОСМИСЛЕННЯ, УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ УЧНЯМИ НОВИХ ЗНАНЬ (7хв)

1. Робота з підручником (групова)

№ 550.

Кутовий коефіцієнт дотичної від'ємний у т. *x=-1, x=0, x=1*; додатний в т. *x=-3, x=-2, x=4, x=5*.

№ 559. а) $y=2x^2$; $y' = 4x|_{x=0} = 0$; $y' = x|_{x=2} = 8$; $y' = x|_{x=-3} = -3$;

б) $y=0,5x^2$; $y' = x|_{x=0} = 0$; $y' = x|_{x=2} = 2$; $y' = x|_{x=-3} = -12$;

в) б) $y=3x^2$; $y' = 6x|_{x=0} = 0$; $y' = x|_{x=2} = 12$; $y' = x|_{x=-3} = -18$.

№ 560. $y=x^3$; $y' = 3x^2$.

x	1	5	10	-1,5
y'	3	75300		6,75

Розв'язати прикладну задачу:

Розкладання деякої хімічної речовини відбувається за законом $m(t) = m_0 e^{-kt}$, *де* $m(t)$ - маса речовини (в г) в момент часу t (в с); m_0 - початкова маса; k - деяка стала. Знайдіть швидкість розпаду в момент $t = 8$ с.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ (5хв.)

Фронтальне опитування, елементи бесіди.

– Що нового ви дізналися сьогодні на уроці?

– Який геометричний зміст похідної?

– Який фізичний зміст похідної?

– Що вам важко було засвоїти?

– Обчислить значення функції y=1/x в точках x=1; x=-4.

– Запишіть рівняння дотичної до графіка функції y=6/x у точці x=3.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ (3хв)

1. Опрацювати § 15 розділу 3 підручника Г.П. Бевза.
2. Розв'язати №№ 563, 569, 571.
3. Маса речовини $m(t)$, яка утворюється при деякій хімічній реакції за час t , визначається формулою $m(t) = a(1 + be^{-kt})$, де a,b,k - деякі сталі. Визначте швидкість реакції і виразіть її як функцію маси m .

4. Зміщення у відповідь на м'язове подразнення (одиничний імпульс) описується рівнянням Релея $y = kte^{-t2/2}$, де $t > 0$. Знайдіть швидкість та

прискорення залежно від часу.

Додаткове завдання.

Функцію задано формулою $f(x) = x^2$.

1) Знайдіть похідну функції $f(x)$.

2) Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ у точці $x_0 = 1$.

Додаток К

Тема: Застосування похідної до дослідження функцій і побудови їх графіків

Мета уроку:

навчальна: формування в учнів уміння застосовувати похідну до дослідження функції і побудови їхніх графіків;

розвивальна: розвивати пам’ять, увагу, логічне мислення; розвивати культуру математичних записів, уміння аналізувати;

виховна: створення комфортних умов для виховання наполегливості, акуратності, працьовитості, уміння розраховувати час роботи, захищати власну позицію, виховувати математичну культуру;

Обладнання: підручник, роздатковий матеріал, презентація.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

План уроку:

№ п/п	Етапи уроку	Час, хв	Організаційно-методичні вказівки
1	Організаційний етап	1	
2	Перевірка домашнього завдання; актуалізація опорних знань.	10	бліцопитування, бесіда
3	Оголошення теми і мети уроку. Мотивація навчальної діяльності.	2	
4	Удосконалення знань, умінь і навичок	17	Розв’язування вправ, групова робота
5	Сприймання і осмислення, узагальнення і систематизація учнями нових знань	7	Самостійна робота
6	Підведення підсумків	5	Фронтальна бесіда, рефлексія
7	Домашнє завдання	3	Пояснення вчителя

Хід уроку

I. Організаційний етап. (1 хв))

Привітання, перевірка присутності учнів, готовності класу до заняття (наявність підручників, зошитів, тощо).

II. Перевірка домашнього завдання; актуалізація опорних знань (10 хв)

Відповісти на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

Завдання середнього і достатнього рівнів складності коментуються з місця, розв'язання, завдання високого рівня один з учнів записує на дошці.

2. *Бліцопитування(слайди 3-5).*

a. Знайдіть точки максимуму і мінімуму функції y=f(x), графік якої зображено на рис. 1. Чи існує похідна в зазначених точках? Якщо існує, то чому дорівнює її значення?

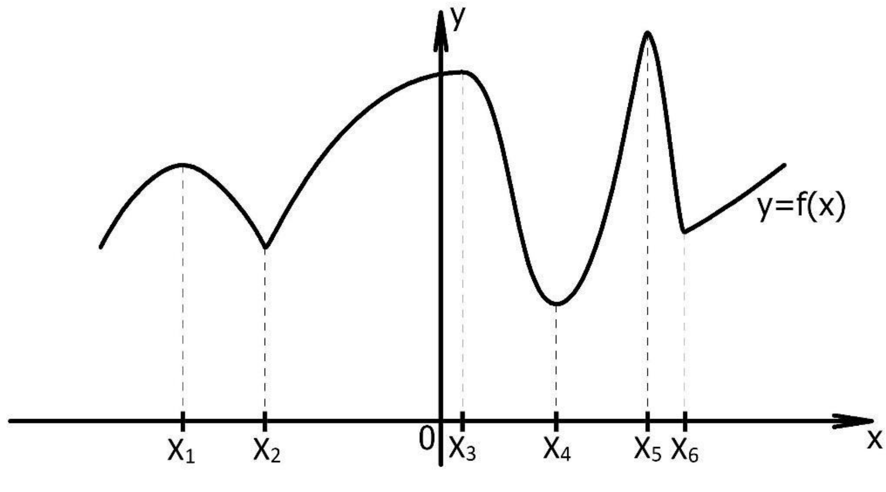


Рис. 1.

b. Відомо, що похідна функції y=f(x), заданої на множині R, має такі знаки, як на рис. 2. Укажіть проміжки зростання і спадання функції(слайд 4).

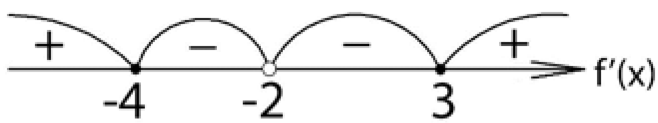


Рис. 2.

c. На рис. 3 зображено графік похідної функції y=f(x), яка визначена на проміжку [-2; 5]. Скільки екстремумів має функція y=f(x)? Назвіть її проміжки монотонності(слайд 5).

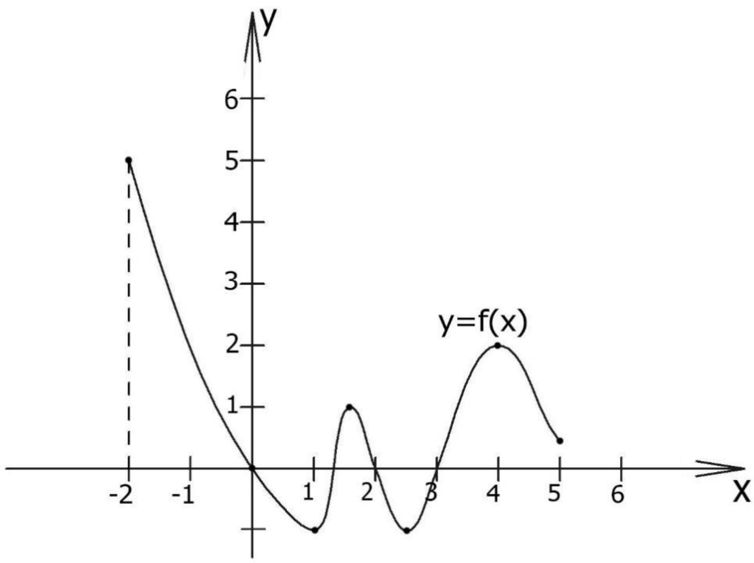


Рис. 3.

3. *Усні вправи(слайд 6).*

Знайти: $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

1) Область визначення функції;

2) Похідну функції;

3) Критичні точки;

4) Визначити проміжки зростання і спадання функції, точки екстремуму.

5) Знайти другу похідну й дослідити функцію на опуклість і точки перегину.

4. Повторення схем:

1) Знаходження критичних точок функції;

2) Знаходження найбільшої і найменшого значень функції на неперервному відрізку;

3) Знаходження проміжків зростання і спадання функції та точок екстремуму;

4) Знаходження точок перегину та дослідження функції y=f(x) на опуклість.

Повторення властивості степеня логарифма, кутового коефіцієнта.

Розв'язати прикладну задачу:

. *Розв'язання прикладної задачі*

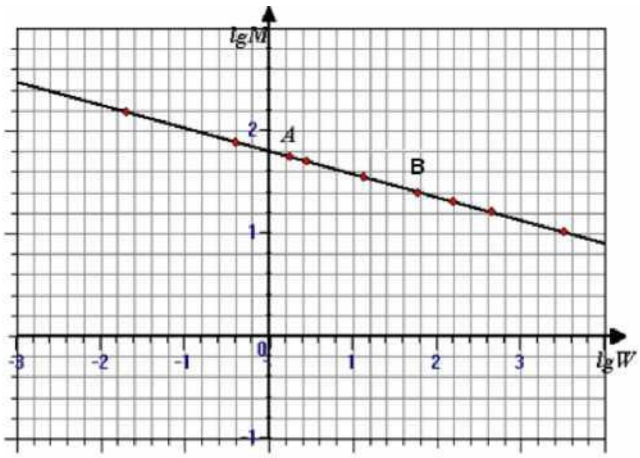
Для різних ссавців і птахів, представлених у наступній таблиці, дані значення їх маси W в кілограмах і число споживаних ними калорій M на одиницю маси щодня. Використовуючи дані таблиці, складіть рівняння залежності між обміном речовин M і масою W.

	миша	морська свинка	курча	кіт	собака	людина	порося	корова	слон
W, кг	0,02	0,4	1,8	2,8	13,6	60	154	440	3311
M ,кал	159	86	55	51	35	25	21	16	12

Розв'язання. Для складання рівняння залежності між обміном речовин M і масою W знаходимо логарифми цих величин для кожного з ссавців і птахів.

	миша	морська свинка	курча	кіт	собака	людина	порося	корова	слон
lg W	-1,699	-0,398	0,255	0,447	1,134	1,778	2,188	2,643	3,520
lg M	2,201	1,934	1,740	1,708	1,544	1,398	1,322	1,204	1,079

Потім побудувати в прямокутній системі координат, вибравши за одиницю вимірювання 1 см, точки з кординатами (lg$W$; lg$M$) (рис. 12).



Отже, як бачимо, всі вони належать одній прямій. Для складання рівняння прямої необхідно розглянути дві з них, наприклад A (0,255; 1,740) і B (1,778; 1,398).

Кутовий коефіцієнт прямої: $k = \frac{\Delta \lg M}{\Delta \lg W} = \frac{1{,}398-1{,}740}{1{,}778-0{,}255} = \frac{-0{,}342}{1{,}523} = -0{,}225.$

Пряма *AB* перетинає вісь ординат у точці 1,8. Отже, $b = 1{,}8 = \lg 63{,}1$.

Використовуючи лінійну залежність $y = kx + b$, можемо записати:

$$\lg M = -0{,}225 \cdot \lg W + \lg 63{,}1.$$

Таким чином, маємо рівняння залежності між обміном речовин *M* і вагою *W*. Визначимо *M* , виконавши необхідні тотожні перетворення:

$$0{,}225 \cdot \lg W = \lg 63{,}1 - \lg M.$$

Використавши властивості степеня логарифма додатного числа і логарифма частки двох додатних чисел, одержуємо

$\lg W^{0,225} = \lg (63{,}1 / M)$. Звідки на основі властивості логарифмів *M* записуємо :

$W^{0,225} = 63,1 / M$, а тому $M = 63{,}1 / W^{0,225}$

Відповідь. $M = 63{,}1 / W^{0,225}$ *– залежність обміну речовин M від маси W.*

ІІІ. Оголошення теми і мети уроку. Мотивація навчальної діяльності (5хв)

Тема сьогодняшнього уроку «Застосування похідної до дослідження функцій і побудови їх графіків». Сьогодні ви навчитеся застосовувати похідну до дослідження функції і побудови їхніх графіків.

Ви вмієте шукати проміжки монотонності й екстремуми функцій, знаходити точки перегину та досліджувати функцію на опуклість, знаходити асимптоти функції. Тепер важливо застосовувати знання на практиці. Практичне застосування в цьому випадку – побудова графіків функцій.

IV. Удосконалення вмінь і навичок. (17хв**)**

Учні отримують загальну схему дослідження функції для побудови її графіка та колективно виконують завдання під керівництвом учителя. Після колективного розв’язування вправ, учні об’єднуються в групи, отримують завдання. Після закінчення часу, визначеного вчителем, представники груп пояснюють дослідження функції, а потім на дошці будують графік.

<u>Розширена схема дослідження функції для побудови її графіка(слайд 7).</u>

1) Знайти область визначення функції.

2) З’ясувати, чи є функція парною або непарною, або періодичною.

а). y(-x)=y(x) – функція парна;

б). y(-x)=-y(x) – функція непарна;

в). y(-x)≠y(x)y(-x)≠-y(x)} – функція ні парна, ні непарна.

3) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат (якщо їх можна знайти).

4) Знайти похідну і критичні точки функції.

5) Знайти проміжки зростання і спадання та точки екстремуму (значення функції в цих точках). Скласти таблицю.

6) Асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні та похідні).

а). y=kx+b – горизонтальна (похила) асимптота;

k=limx→∞ f(x)x ; b=limx→∞ (f(x)-kx) ;

б). x=a – вертикальна асимптота;

7) Знайти другу похідну й дослідити функцію на опуклість і точки перегину (та значення функції в цих точках).

8) Знайти координати додаткових точок графіка функції (якщо необхідно уточнити його поведінку).

9) На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

<u>Колективне виконання завдання під керівництвом учителя (слайд 8).</u>

1. Дослідіть функцію y=x2+4x2-4 та побудуйте її графік.

Розв’язання.

1. Знайти область визначення функції.

D (y)∈(-∞;-2)∪(-2;2)∪(2;+∞)

x2-4≠0;

x2≠4;

x≠±2;

2)З’ясувати, чи функція є парною або непарною, або періодичною.

y(-x)=(-x)2+4(-x)2-4=x2+4x2-4=0 $y(-x)=\frac{(-x)^2+4}{(-x)^2-4}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$ – функція парна, то графік симетричний відносно осі OY.

Функція неперіодична.

2. Точки перетину графіка з осями координат.

OX: y=0, якщо y(x)= $\frac{x^2+4}{x^2-4}$ =0y(x)=x2+4x-4=0;

x2+4=0

x2=-4 – точок перетину з віссю OX немає.

OY: x=0, якщо y(0)=02+402-4=4-4=-1

(0;-1) – точка перетину з віссю OY.

3. Похідна і критичні точки функції.

y'(x)=(x2+4x2-4)'=2x(x2-4)-2x(x2+4)(x2-4)2=2x(x2-4-x2-4)(x2-4)2==2x*(-8)(x2-4)2=-16x(x2-4)2

Похідна існує на всій області визначення функції y(x). Отже, функція y(x) неперервна в кожній точці своєї області визначення.

y'(x)=0, якщо -16x(x2-4)2=0 ;

x≠±2;

x=0 – критична точка.

5) Проміжки зростання і спадання та точки екстремуму (значення функції в цих точках).

Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення (рис. 4).

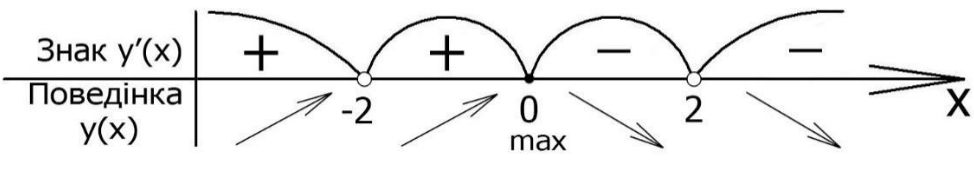


Рис. 4.

Отже, функція зростає, коли:

;

x∈(-∞;-2)∪(-2;0]- функція спадає.

x∈[0;2)∪(2;+∞).

Так, як в критичній точці x=0 похідна змінює знак з "+" на "-", то x=0 – точка максимуму. Точок мінімуму функція немає.

xmax=0, тоді ymax=y(0)=-1.

6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення і асимптоми графіка функції (вертикальні, горизонтальні та похилі).

limx→2 x2+4x2-4= limx→2 x2+4(x-2)(x+2)=∞

limx→-2 x2+4x2-4= limx→-2 x2+4(x-2)(x+2)=∞

y=kx+b – горизонтальна (похила) асимптоти;

k=limx→∞ y(x)x= limx→∞ x2+4x(x2-4)= limx→∞ x3(1x+4x3)x3(1-4x3)= limx→∞ 1x+4x31-4x3=0+01-0=0

b=limx→∞ (y(x)-kx)= limx→∞ x2+4x2-4= limx→∞ x2(1+4x2)x2(1-4x2)=1

y=1 – горизонтальна асимптота;

x=±2 – вертикальні асимптоти;

7. Друга похідна й дослідження функції на опуклість і точки перегину (та значення функції в цих точках, рис. 5).

y''(x)=(-16x(x2-4)2)'=-16(x2-4)2-2(x2-4)*2x*(-16x)(x2-4)4=-16(x2-4)(x2-4-4x2)(x2-4)4==16(4+3x2)(x2-4)3

y''(x)=0, то 16(4+3x2)(x2-4)3=0 ; x≠±2

4+3x2=0; 3x2=-43; x2 $=-\frac{4}{3}$ - немає розв'язків, то функція точок перегину немає.

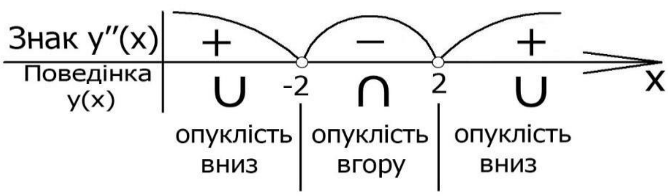


Рис. 5.

8. Таблиця

	(-∞;-2)	-2	(-2;0)	0	(0;2)	2	(-∞;-2)

y'(x)	+	не існує	+	0	-	не існує	-
y(x)	$\boxed{\nearrow}$	не існує	$\boxed{\nearrow}$	-1	$\boxed{\searrow}$	не існує	$\boxed{\searrow}$

На підставі проведеного дослідження будуємо графік функції (рис. 6, слайд 9).

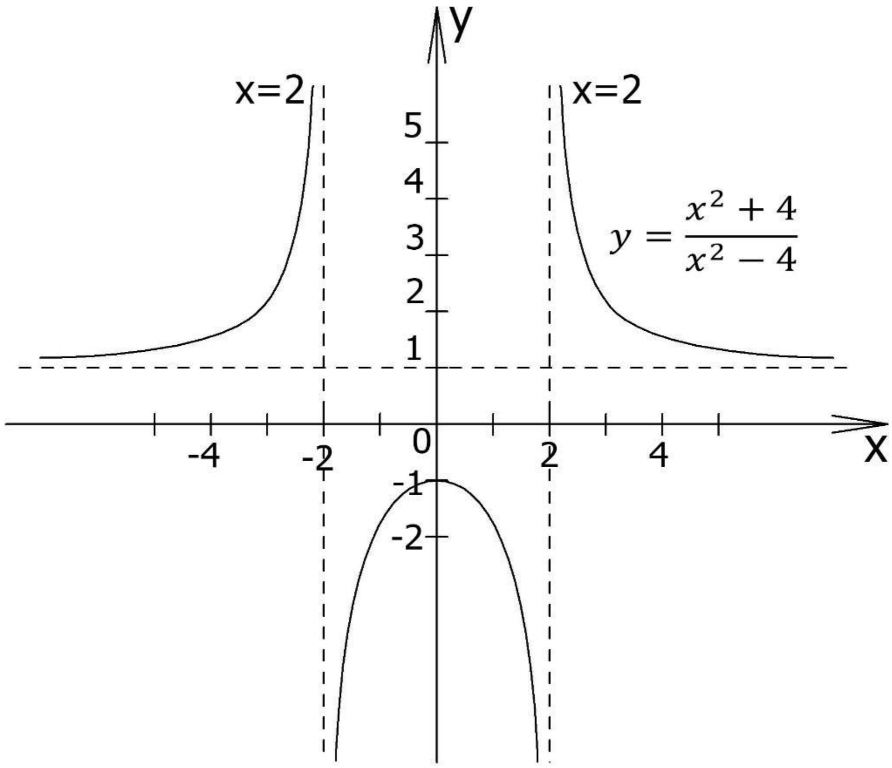


Рис. 6.

<u>Завдання для роботи групи (слайд 10).</u>

Дослідити функцію y=2sin x -cos 2x та побудувати її графік.

Розв’язання (слайд 11).

1. ОДЗ: x∈R
2. y(-x)=-2sin x -cos 2x =-(2sin x +cos 2x) – ні парна ні непарна.

Функція періодична.

3. OX: y=0, якщо 2sin x -cos 2x =0

2sin x -1+2sin2 x =0;

D=4+8=12

sin x1,2=-2±234 =-1±32;

sin x1= -1-32- немає розв’язків ;

sin x2= -1+32;

x2=(-1)karcsin-1+32+πk, x∈z.

Якщо k=0, якщо x2≈10°=π18 => (π18;0)

Якщо k=1, якщо x2=-arcsin-1+32+π=-π18+π=17π4=> (17π4;0) $x_2 = -arcsin\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \pi = -\frac{\pi}{18} + \pi = \frac{17\pi}{18} => \left(\frac{17\pi}{18}; 0\right)$.

OY: x=0, якщо y(0)=2sin 0 -cos 0 =2*0-1=-1=>(0;1).

4. y'=2cos x -(-2sin 2x)=2cos x +2sin 2x ;

y'(x)=0, то 2cos x+2sin 2x=0

2cos x+2sin xcos x =0 ;

2cos x (1+2sin x)=0;

cos x=0 або sin x=-12 ;

x1=π2+πk, x∈z x2=(-1)k+1πb+πn, n∈z

$$x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in z$$

Розглянемо критичні точки на проміжку [-π2;32π].

5.

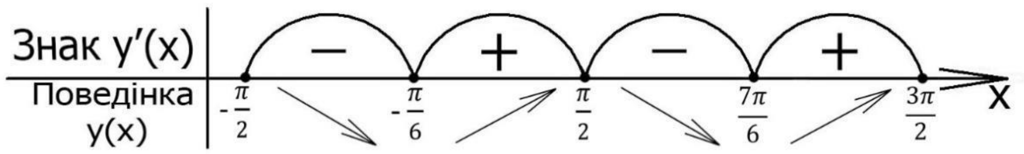


Рис. 7.

Функція асимптот немає.

6. y"(x)=0, то y"=(2cos x+2sin 2x)'=-2sin x+4cos 2x

-2sin x+4cos 2x =0;

-2sin x+4(1-2 sin2x)=0 ;

-2sin x+4-8 sin2x=0 ;

4 sin2x+sin x-2=0

D=1-4*4*(-2)=1+32=33;

sin x1,2= -1±338;

sin x1= -1+338 ;

sin x2= -1-338 ;

x1=(-1)karcsin -1+338 +πk, k∈z

x2=(-1)k+1arcsin -1+338 +πn, n∈z

Якщо k=0, то x1=arcsin -1+338 ;

x2=-arcsin +1+338 ;

x1,x2- точки перегину (які належать [-π2;32π]).

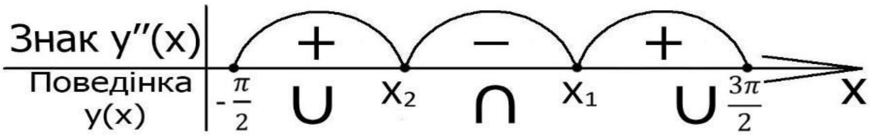


Рис. 8.

8. Таблиця

	-π2	(-π2;-π6)	-π6	(-π6;π2)	π2	(π2;7π6)	7π6	(7π6;3π2)	3π2
y'(x)	0	-	0	+	0	-	0	+	0
y(x)	-1	↘	-1,5	↗	3	↘	-1,5	↗	-1
min		max		min					

9. Побудова графіка (рис. 9,слайд 12)

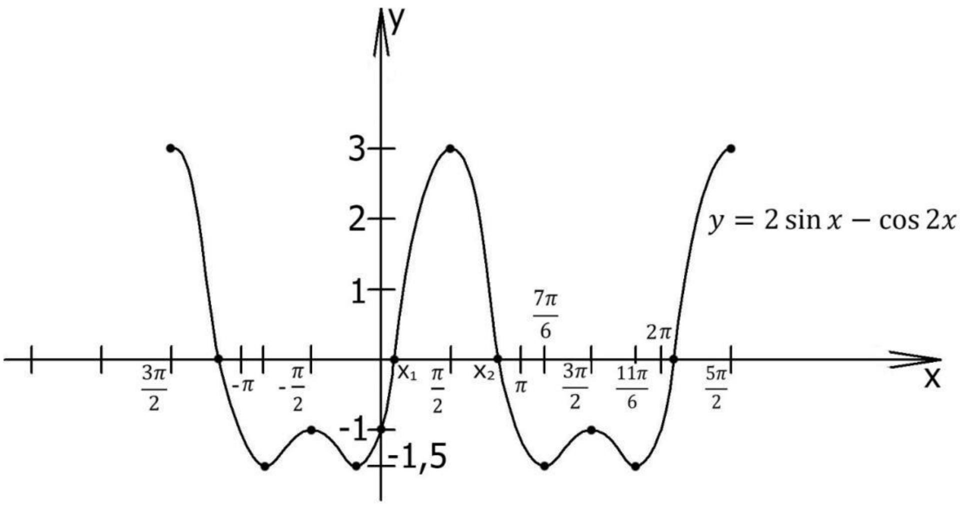


Рис. 9.

V. Сприймання і осмислення, узагальнення і систематизація учнями нових знань (7 хв)

<u>Самостійна робота(слайд 13)</u>

І варіант	ІІ варіант
Дослідіть функцію та побудуйте її графік	
y=-x2+3x-2	y=x4-2x2-3

Розв’язання(слайд 14).

І варіант: y=-x2+3x-2

1. D(y)=R
2. Функція є ні парною, ні непарною.
3. Точки перетину з віссю OY:

   x=0,то y=-2=>(0;-2)

   Точки перетину з віссю OX:

y=0, то -x3+3x-2=0|*(-1)

x3-3x+2=0;

x3-x-2x+2=0;

x(x2-1)-2(x-1)=0; x(x-1)(x+1)-2(x-1)=0;

(x-1)(x2+x-2)=0;

x-1=0 або x2+x-2=0

x1=1 x2=1; x3=-2.

(1;0), (-2;0)

4) y'=-3x3+3;

y'=0, то-3x2+3=0;

x2-1=0;

x2=1;

x=±1 – критичні точки

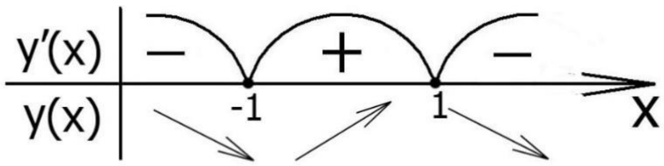


Рис. 10.

xmin=-1, то ymin=-4=>(-1;4)

xmax=1, то ymax=0=>(1;0)

5. Функція асимптот немає.
6. y''(x), то y''=(-3x2+3)'=-6x=0;

   x=0-точка перетину*x=0*- точка перегину.

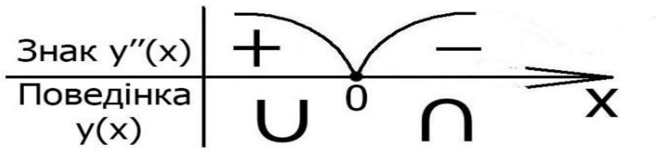


Рис. 11.

7. Таблиця

	(-∞;-1)	-1	(-1;1)	1	(1;+∞)
y'(x)	-	0	+	0	-
y(x)	↘	-4	↗	0	↘

8. Графік.

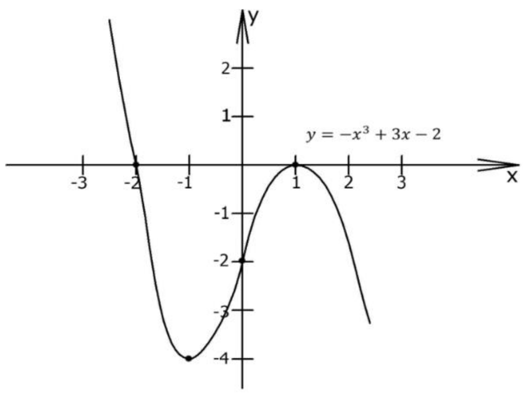


Рис. 12.

II варіант: y=x4-2x2-3.

Розв’язання

1. D(y)=R
2. Функція парна, так як

y(-x)=(-x)4-2(-x)2-3=x4-2x2-3-графік симетричний відносно осі ОУ

3. Точки перетину з осями координат

OY:x=0, то y(0)=-3=>(0;-3)

OX:y=0, то x4-2x2-3=0;

x=±3; (3;0), (-3;0).

4. y'(x)=4x3-4x;

y'(x)=0, то 4x3-4x=0;

4x(x2-1)=0;

x=0, або x2-1=0;

x2=1;

x=±1;

x=1; x=-1; x=0 – критичні точки

5.

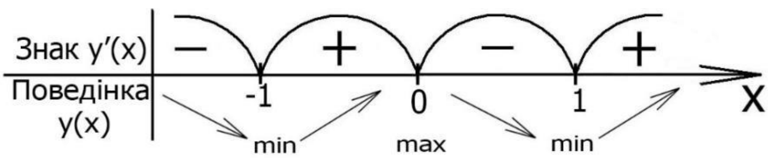


Рис. 13.

Функція зростає при xє[-1;0]U[1;+∞] ; функція спадає при xє (-∞;-1] U [0;1]

xmax=0, коли ymax=-3;

xmin=-1, коли ymin=-4;

xmin=1, коли ymin=-4.

6. Функція асимптот немає.

7. y''(x)=0, то y''(x)=(4x3-4x)'=0;

12x2-4=0;

x2=412;

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ – точки перегину.

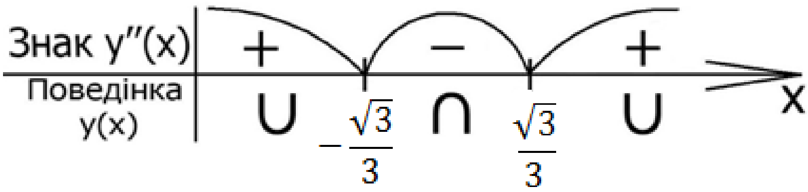


Рис. 14.

8. Таблиця.

	(-∞;-1)	-1	(-1;0)	0	(0;1)	1	(1;+∞)
y'(x)	-	0	+	0	-	0	+
y(x)	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗
min		max		min			

9. Графік.

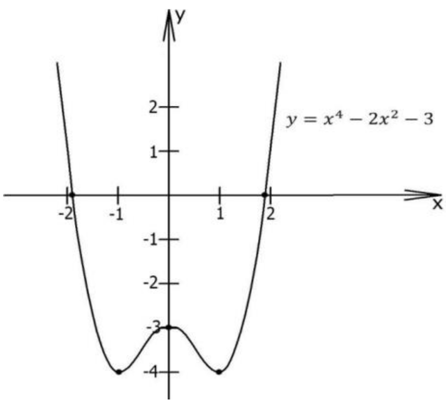


Рис. 15.

VI. Підведення підсумків уроку, рефлексія (слайд 15). (5 хв)

Фронтальна бесіда.

На рис. 16 зображено графік функції y=f(x), визначеної на R. Назвіть властивості цієї функції.

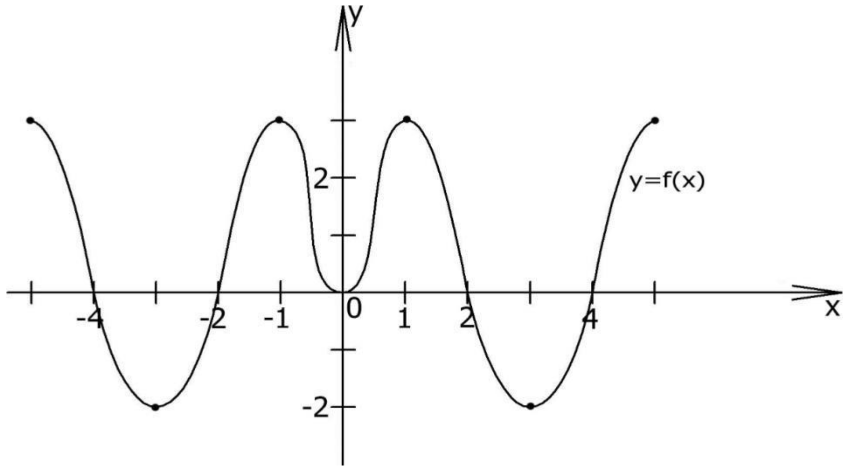


Рис. 16.

Рефлексія.

Усе людське життя – це не що інше, як постійне визначення мети та бажання досягти успіху під час розв'язання все нових задач та проблем. Учіть свій розум та душу бачити добро, і тоді дорога до успіху буде для вас відкрита.

VII. Домашнє завдання (слайд 16). (3 хв)

Опрацювати записи у зошиту, параграф № 17 розділу 3 посібника Б.П. Бевза.

Розв'язати №№ 635, 646 (а, в), 659 (а, в).

Розв'язати прикладну задачу на повторення:

За оцінкою лісника запас деревини на одній ділянці лісу складає 10000 кубометрів. Скільки деревини буде на цій ділянці через 10 років за умови, що середній річний приріст складатиме 2,5 %?

Додаток Л

Задачі прикладного змісту на використання похідної

Задача 1. Вантаж масою 0,4 кг коливається на пружині. Його швидкість змінюється за законом V = $V_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, де t - час з моменту початку коливань, T=2T=2 с. - період коливань, V_0 = 0,3 (м/с). Кінетична енергія E вантажу вимірюється в джоулях і визначається формулою E=$2\frac{mv^2}{2}$, де m - маса вантажу в кілограмах, v - швидкість вантажу в м/с. Знайдіть кінетичну енергію вантажу через 3 секунди після початку коливань. Відповідь дайте у джоулях.

Задача 2. У поживне середовище вносять популяцію з 1000 бактерій. Чисельність популяції зростає за законом p (t) = 1000 + 1000t / (100+t^2), де t виражається в годинах. Знайти максимальний розмір цієї популяції.

Задача 3. Розкладання деякої хімічної речовини відбувається за законом m (t) = m_0 e^{--kt} , де m(t) – маса речовини, в грамах, в момент часу t , в секундах; $m_{0:}$ – початкова маса; k – деяка стала. Знайти швидкість розкладу в момент t=8 с.

Задача 4. Ставка податку на доходи фізичних осіб (зарплату) у 2022 році становила 15%, якщо зарплата до 12180 грн., плюс 20% від суми, що перевищує 12180 грн. Із 2020 року ця ставка становить 18% без обмежень. Директорка підприємства у 2019 році отримувала зарплату 13000 грн. на місяць, а в 2020 році 15000 грн. на місяць; старший менеджер у 2019 році отримував зарплату 9000 грн. на місяць, а в 2020 році – 10000 грн. на місяць. На яку суму змінився щомісячний податок кожного з них порівняно з 2020 роком? (Істер, 2018).

Задача 5. Порахуйте, скільки знадобилося замовити скла ($м^2$), щоб поставити вікна у нову будівлю, якщо відомо, що в основі будівлі лежить прямокутник зі сторонами 81 м і 50 м, а довжина сторін верхньої основи становить 65 м і 40 м відповідно, висоти бічних граней рівні 361 м. А витрати виробництва становлять 3,5%.

Задача 6. Кількість бактерій N в деякій біомасі змінюється за законом $N(t)$ = $500 + 54t + 2t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковий момент часу t =

0 ? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу $t = 4$ хв?

Задача 7. Розкладання деякої хімічної речовини відбувається за законом $m(t) = m_0 e^{-kt}$, *де* $m(t)$ - маса речовини (в г) в момент часу t (в с); m_0 - початкова маса; k - деяка стала. Знайдіть швидкість розпаду в момент $t = 8$ с.

Задача 8. Розмір популяції комах у момент часу t (в днях) задається формулою $p(t) = 9*10^4 / (t + 1)$. Знайдіть швидкість зростання популяції у момент $t = 5$ днів.

Задача 9. Розмір популяції бактерій у момент часу t год, 5 9 -10^4

задається формулою $p(t) = 10^5 - 9*10^4 / (t + 1)$. Знайдіть швидкість зростання популяції в момент t , якщо: 1) $t = 1$ год; 2) $t = 5$ год; $t = 10$ год.

Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3 % за кожну годину. Визначте масу дріжджів через t годин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г. Знайдіть швидкість зміни маси при: а) $t = 1$ год; б) $t = 2$ год; в) $t = 5$ год.

Задача 10. З танкера, який потрапив у аварію, виливається у море нафта, утворюючи на поверхні моря круглу пляму, площа якої збільшується з постійною швидкістю 6 км^2/год. З якою швидкістю збільшується радіус нафтової плями у той момент, коли площа плями дорівнює 9 км^2?

Додаток М

Задачі прикладного змісту на степеневу, логарифмічну, показову функції

1. Населення міста складає 100 тисяч чоловік. Щорічний приріст населення становить 2 %. Дослідить, як буде змінюватись чисельність населення протягом 50 років за умови, що значення приросту буде сталим.

2. У пробірку потрапив один мікроб, який відразу став розмножуватись шляхом ділення навпіл через кожну годину. Скільки мікробів буде у пробірці через добу? Через який час у пробірці буде мільйон мікробів?

3. Населення деякої країни щорічно збільшується на 2 %. У скільки разів воно збільшиться за півроку? за 50 років?

4. У 1980 році на Землі проживало наближено 4,4 мільярда чоловік. У кінці 70-х років приріст населення складав 1,7 % на рік. Якою буде чисельність населення нашої планети при збереженні того ж темпу росту у: а) 2010 році; б) 2200 році?

5. При радіоактивному розпаді деякої речовини за добу розпадається 2 % цієї речовини. Скільки речовини не розкладеться до кінця 4-ї доби, якщо на початку її було 10 грамів?

6. Період піврозпаду радію становить 1620 років. Яка частина початкової кількості радію залишиться: 1) через 3240 років; 2) 4860 років; 3) 810 років? Оцініть, скільки відсотків складає існуюча нині на Землі кількість радію від тієї кількості, яка була на Землі на початку нашої ери?

Додаток Н

Діагностичний матеріал для виявлення рівня сформованості математичної культури старшокласників за обсягом і якістю математичних знань та вмінь

Контрольна робота

1° (1 бал). Розв’яжіть задачу:

Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m = m_0 e^{-kt}$ де m_0 - початкова маса на момент часу $t = 0$, m - нерозчинена маса на момент часу t ; k - стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте швидкість розчинення.

2° (2 бали). Розмір популяції комах у момент часу t (в днях) , задається формулою : $p(t) = 9 \cdot 10^4 / (t + 1)$. Знайдіть швидкість зростання популяції у момент $t = 5$ днів.

3° (2 бали). Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^2 - 6x + 1$ на проміжку [0: 4].

4 (2 бали). Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{3}{4} x^4 - 2x$ в точці з абсцисою $x_п = 2$.

5 (2 бали). Дослідить функцію $y = 2x^3 + 3x^2$ та побудуйте її графік.

6 (3 бали). Період піврозпаду радію становить 1620 років. Яка частина початкової кількості радію залишиться: 1) через 3240 років; 2) 4860 років; 3) 810 років? Оцініть, скільки відсотків складає існуюча нині на Землі кількість радію від тієї кількості, яка була на Землі на початку нашої ери?

.