МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка

Кафедра фізико-математичної освіти та інформатики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

Тема: Вивчення елементів аналітичної геометрії в шкільному курсі математики

Виконала:
Хобот Надія Сергіївна
(прізвище, ім'я, по батькові)
014 Середня освіта, Середня освіта (Математика)_______
(спеціальність, освітня програма)

Науковий керівник:
__кан.пед.наук, доцент____
(науковий ступінь, учене звання, посада)
О.В.Заїка ______________
(ініціали, прізвище)

Допущено до захисту
"___"______________ 20___р.

Завідувач кафедри
_________ _______
(підпис) (ініціали, прізвище)

Дата захисту: «___» ___20__ р.

Оцінка____________________
Підписи членів ЕК:
____
____
____

Глухів - 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Аналітична геометрія має широке коло застосувань. Декартові координати широко використовуються в різних галузях науки. Зручність координатного методу й алгоритмів опису кривих за допомогою алгебраїчних рівнянь сприяли його швидкому проникненню в суміжні науки. Координати всюди: вони широко використовуються в географії, фізиці, навігації, комп'ютерах і багатьох іграх. З методом координат діти зустрічаються зараз дуже рано, оскільки така популярна гра, як «Майн крафт» вчить дітей будувати цілі міста в їх ігровому просторі.

Що стосується методу координат, а також векторного методу, то вчителі, на жаль, мало уваги приділяють їм, а тому не використовують ці методи під час розв’язування задач, які не входять до тем «Декартові координати». Як наслідок – низька здатність здобувачів освіти щодо розв’язування задач на використання елементів аналітичної геометрії, зокрема у задачах ЗНО. Вивчення теми «Декартові координати на площині та в просторі» сприяє формуванню інформаційно-комунікаційної компетентності учнів, зокрема, вміння працювати за алгоритмами, використовувати знакові системи; вміння будувати та досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів. Ця тема має широке застосування, яке дозволяє учневі розвивати математичне мислення: вона ідентифікує, описує та аналізує зв’язок між математичними об’єктами та об’єктами реального світу, а також математичними об’єктами.

Щоб знати, як розв'язувати задачі, здобувачі освіти повинні спочатку оволодіти загальними прийомами і методами. Одним із таких узагальнених методів є координатний та векторний методи розв'язування геометричних задач. Роль і значення цих методів в освітній практиці є недооціненим. Їх суть полягає у взаємозв’язку між елементами. Геометрична фігура зображується алгебраїчними співвідношеннями або, відповідно, векторними. Використання методу координат не потребує розгляду геометричної конфігурації фігури, не потрібні додаткові побудови, необхідно лише вдало ввести систему координат. Ці методи можна використовувати під час розв'язування як планіметричних так й стереометричних задач. Але для їх використання необхідно володіти теоретичною базою аналітичної геометрії.

Аналітична геометрія — розділ геометрії, в якому геометричні фігури та їх властивості вивчаються за допомогою елементарної алгебри з використанням методу координат. Цей метод зіставляє кожній геометричній фігурі рівняння, що поєднує координати фігури чи тіла із її формою.

Методи аналітичної геометрії включають узагальнення на плоскі фігури, тривимірні поверхні та простори вищих вимірів.

Сьогодні, коли закладаються основи Нової української школи, необхідно приділяти якомога більше уваги безперервності, послідовності та перспективі в обставинах неперервної освіти. Нова освітня парадигма базується на ідеях гуманізації та її пріоритетом визначено фундаменталізацію освіти та повноцінний розвиток людини. Це допомагає вирішити проблему здійснювати наступність між різними рівнями освіти. Перш за все, модернізація системи освіти поставила проблеми її гуманізації, одну з її умов – спадкоємність (наступність) між школою та університетом. Проблемою наступності займаються багато вчених, серед яких Лернер І., Ільїна Т., Самарін Ю., Скаткін М., Тализіна Н., Вашуленко М, Савченко О. та інші.

Наступність – зв'язок попереднього матеріалу з наступним, взаємодія попередніх і нових знань; поступове розширення і поглиблення знань, умінь і навичок та їх повторення на високому рівні; з урахуванням виникаючих якісних змін особистості учня, його зростання за рівнем розумового розвитку, наявних знань, умінь і навичок; забезпечення контексту у межах теми; встановлення відношень між окремими рівнями підготовки. Так елементи аналітичної геометрії здобувачі освіти вивчають у 6 класі, 9 класі, 10 класі і поглиблюють свої знання під час навчання у вищих закладах освіти.

Об’єкт дослідження: навчання геометрії у 9 та 10 класах.

Предмет дослідження: елементи аналітичної геометрії в курсі шкільної геометрії.

Мета дослідження: визначити елементи аналітичної геометрії, з якими здобувачі освіти мають справу в курсі геометрії, порівняти методику їх введення у школі та професійних училищах (формулювання понять та тверджень, їх обсяг, класифікація завдань).

Відповідно до мети поставлені такі завдання:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну, методичну та наукову літературу з теми дослідження.
2. Проаналізувати шкільні програми, програми профтехучилищ, підручники та з'ясувати елементи аналітичної геометрії, які розглядаються під час вивчення геометрії.
3. Розробити систему задач по вивченню виділених елементів аналітичної геометрії.

Методи дослідження: для досягнення мети і розв'язання поставлених завдань у процесі роботи використовувалися теоретичні, загальнологічні та емпіричні методи і прийоми дослідження: *аналіз та синтез, порівняння, узагальнення, моделювання, спостереження*.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

Апробація результатів дослідження. Результати дослідницької роботи висвітлювались у доповіді на науково-практичній конференції: V Всеукраїнській студентській науково-практичній інтернет-конференції «Студентський науковий вимір проблем природничо-математичної освіти в контексті інтеграції України до єдиного європейського і світового освітнього простору» (м. Дніпро, 10-11 лютого 2023 р.), опубліковано тези [40].

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Історія виникнення аналітичної геометрії

Виникнення основних геометричних понять почалося в історичний період. Першими реальними умовами виникнення наукових знань про геометрію є праця людини, створення знарядь праці та засобів існування. Матеріальні потреби змушували людей виготовляти знаряддя праці, будувати будинки та культові споруди, виготовляти глиняний посуд. Виконуючи ці операції тисячі разів, вони поступово дійшли до прямої лінії, одного з перших абстрактних геометричних понять. Приблизно так само виникли інші геометричні поняття: точки, геометричні поверхні та ін.

Слово «математика» походить з грецької мови і означає наука, знання. Математика – одна з найдавніших наук. Вона виникла з практичних потреб людини, на початку розвитку людського суспільства, і є її постійним супутником, порадником, помічником у пізнанні світу, вдосконаленні методів праці, наукових відкриттях, самопізнанні. Історично склалося так, що математика розвивалася як форма мови для узагальнення людського досвіду та інтелектуальних досягнень, що дозволяло чітко та стисло виражати та стверджувати факти.

В історії розвитку математики виділяють чотири періоди [4; 20;41; 44]:

1. Зародження математики до VII ст. до н.е. На той час її розвиток пов’язаний із практичними завданнями з лічби та вимірювань. У безпосередньому процесі життя формуються основні поняття арифметики та геометрії, поняття числа та форми, правила лічби, відпрацьовується техніка виконання чотирьох арифметичних дій. Встановлено систему нумерації.

У геометрії відбувається визначення найпростіших площ і об'ємів, але геометрія ще не є теоретичною наукою (з теоріями і логічними доказами, кожна задача розв’язується по-новому, відсутні алгоритми).

2. Другий період: математика постійної змінної (VI ст. до н. е., XVI ст.н.е.); становлення математики як науки.

За математичним змістом його можна розділити на два періоди: головним чином розвитку геометрії (VI ст. до н. е., II ст. н. е.). головним чином розвиток алгебри і тригонометрії (II ст.- XVI ст.н.е).

Математику розробляли вчені та їхні школи. Мілетська школа під керівництвом Фалеса (640-546 рр. до н. е.) встановила різні положення геометрії: діаметр ділить коло на дві рівні частини; кути при основах рівнобедреного трикутника рівні; вертикальні кути рівні; друга ознака рівності трикутників тощо.

Піфагорійська школа (580-560 рр. до н.е.) була філософською, але зосереджувалася на розвитку математики. Вчення Піфагора та його учнів стосувалося гармонії, геометрії, теорії чисел і астрономії. Основною філософською тезою Піфагора є «ціле число», тобто все має числову властивість і числове відношення.

Найбільшою чеснотою піфагорійської школи є відкриття несумірних відрізків. Однак це відкриття підірвало «всю» головну тезу Піфагора (про те, що вони знають лише натуральні та раціональні додатні числа).

Евклід (325-300 рр. до н. е.), учень Платона, заснував Александрійську математичну школу (300 р. до н. е. - 640 р. до н. е.). У той час з математики, особливо геометрії, було накопичено багато теоретичного матеріалу, і необхідно було систематизувати наявний матеріал. Завдання логічного обґрунтування геометрії ставили Платон і Аристотель, які сформулювали основні принципи логічної будови науки у праці «Логіка».

Аристотель (384-322 до н. е.) заклав основи дедуктивного викладу матеріалу окремої науки: визначені об'єкти науки, сформульовані вихідні положення (аксіоми і гіпотези), а потім все це має бути доведено за законами логіки.

3. Період математики змінних (XVII-XIX ст.). Характеристика періоду: математика вивчає рух, зміни та процеси; предмет вивчення – змінні величини, їх зв’язки та функції. Проте математика цього періоду не виходила

за межі тривимірного простору; значення аргументів і функцій приймають лише числові значення.

Першим вирішальним кроком у розвитку математики змінних величин стала книга Р. Декарта «Геометрія». Основний внесок Декарта в математику полягав у введенні змінних величин і формулюванні аналітичної геометрії. Він перш за все цікавився геометрією руху і був засновником аналітичної геометрії, застосовуючи алгебраїчні методи до вивчення геометричних об'єктів.

4. Четвертий період: період сучасної математики (з кінця XIX ст.). Математичні теорії характеризуються зростаючим рівнем абстрактності та тенденцією до їх аксіоматичної структури.

Після великих досягнень у розвитку геометрії в Стародавній Греції настала тривала пауза в усіх галузях науки. Для подальшого розвитку математики, включаючи геометрію, необхідно було розширити поняття числа, включивши в нього ідеї зміни і руху, тобто ідеї змінних.

Після значних географічних відкриттів 15 століття посилився розвиток виробництва, торгівлі та морської справи, що вимагало вдосконалення виробництва географічних карт, тригонометричних і астрономічних таблиць, раціональні методи розрахунку. Тому почали розвиватися наука і техніка (Галілей в механіці, Коперник і Кеплер в астрономії), все це стимулювало розвиток математики, що призвело до виникнення аналітичної геометрії у середині 17 століття.

Початок системи координат було покладено у Вавилоні, що було пов'язано з потребами географії та астрономії.

У II столітті до нашої ери грецький учений Гіппарх (180-125 рр. до н. е.) запропонував визначати положення точки на землі за допомогою географічних координат (географічної довготи і широти). Олександрійський математик Аполлоній (262-190 рр. до н. е.) написав трактат під назвою «Коніка», в якому використовував прямокутні координати. З їх допомогою він потім визначив деякі лінії другого порядку - еліпс, гіперболу, параболу.

Засновником методу координат і аналітичної геометрії вважається видатний французький математик і філософ Рене Декарт (1596 - 1650), який опублікував основи цього методу у своєму виданні «Геометрія» 1637 р.

Одночасно і незалежно від Декарта метод координат розробив інший видатний французький математик П'єр Ферма (1601-1655), праці якого були опубліковані пізніше (у 1679 р.) [44].

У Декарта також була ідея порівняння алгебраїчного рівняння з двома змінними та лінією на площині: у рівнянні $F(x,y)=0$ він запропонував розглядати змінну x як абсцису точки та відповідне значення у – ординату. Тоді, змінюючи неперервно значення невідомої x і знаходячи відповідні їм значення у, ми матимемо набір точок на площині, координати x і y яких задовольняють рівнянню. Ця множина точок є певною лінією на площині. Отже, рівняння з двома змінними відповідає повністю визначеній лінії на площині в обраній системі координат. І навпаки, лінію на площині можна визначити як набір точок, визначених певною геометричною умовою, де рівняння аналітично представляє ту саму умову, що й координати її точок [11].

За Р. Декартом, поверхня – це сукупність точок у просторі, що знаходяться в деякій афінній системі, координати яких задовольняють рівняння $F(x,y,z) = 0$, де $F(x,y,z)$ — математичний вираз, що включає змінні x,y,z.

Геометрія, розглянута Декартом у своїй праці «Геометрія», ще не була справжньою аналітичною геометрією. Там Декарт розглядав лише одну пряму з нерухомою точкою і вивчав властивості кривих відносно цієї прямої. Але це був великий крок вперед. Ідея виміряти абсцису деякої нерухомої прямої та визначити положення точки на прямій зараз здається нам дуже простою, але до Декарта та Ферма ніхто не думав про це.

«Геометрія» Декарта є алгебраїчним твором, але в ньому чітко виражена ідея аналітичної геометрії - алгебраїчного методу вивчення геометричних об'єктів за допомогою методу координат. Важлива частина

«Геометрії» присвячена методам розв’язування алгебраїчних і графічних рівнянь.

Рис.1.1. Рене Декарт та його «Геометрія»

Ідеї Декарта були удосконалені у працях француза Дебона Ф., голландця Скоттена, англійця Валліса Дж., француза Ньютона І. Але лише Крамер Г. вперше ввів вісь ординат у своєму «Вступі до аналізу алгебраїчних кривих» (1750 р.), вважаючи її еквівалентною осі абсцис і використовуючи поняття двох координат точки на площині. У «Вступі до аналізу» Ейлера Л. (1748 р.) вперше була викладена аналітична геометрія конічних перерізів у її сучасному розумінні.

Походження назви «аналітична геометрія» пов’язують із відомим французьким математиком Франсуа Вієтом (1540 – 1603), який назвав свою алгебру «аналітичним мистецтвом», після чого використання алгебри в геометрії отримало назву «аналітичне». Ця назва не належить ані Ферма, ані Декарту. Термін «аналітична геометрія» належить французькому математику Лакруа Ш., який був їм використаний в четвертому виданні «Курсу математики» (1807 р.), а першою книгою під назвою «Аналітична геометрія» був підручник Гарньє Г. (Париж 1808 р.) [5; 27].

Таким чином, з подальшим розвитком ідей Декарта народилася аналітична геометрія як математична наука, де геометричні об'єкти вивчаються за допомогою алгебри на основі методу координат.

Декарт і Ферма зробили деякі передбачення щодо можливості поширення методу координат з двовимірного простору на тривимірний простір.

В одному зі своїх листів до Лейбніца в 1715 році Бернуллі Й. визначив просторові координати *x*, *y*, *z* як перпендикулярні до трьох взаємно перпендикулярних площин. Першим, хто систематично і широко застосував метод координат у просторі, був французький математик Клеро А. (1713 - 1765). У своєму «Дослідженні ліній подвійної кривини» (1731 р.) він вводить третю координату, і щоб проілюструвати той факт, що рівняння з трьома змінними представляє задану площину, він наводить такі рівняння: $xx+yy+zz=aa$, $yy+zz=ax$. Клеро також вводить поняття площини [20].

Систематичний виклад аналітичної геометрії в просторі вперше ввів Ейлер Л. у другому томі його «Вступу до аналізу» (1748 р.), який вважається першим курсом аналітичної геометрії в сучасному розумінні. Ця книга складається з двох частин, перша присвячена аналітичній геометрії на площині, а друга – простору.

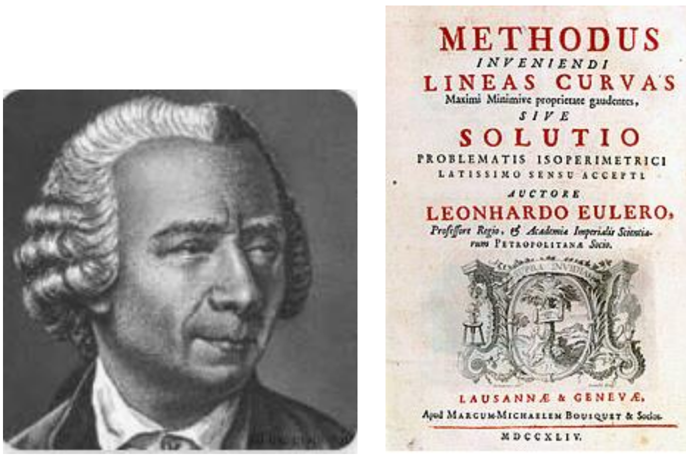


Рис.1.2. Ейлер та його «Вступ до аналізу»

Французький математик Лагранж (1736 - 1813) продемонстрував використання методу координат у фізиці в «Аналітичній механіці» (1788 р.). Подальшим розвитком цих ідей Лагранжа стало створення векторного числення, алгебраїчна частина якого (векторна алгебра) стала важливою частиною аналітичної геометрії.

Виникнення системи координат не лише призвело до нових відкриттів у математиці та фізиці, а й сприяло зменшенню кількості дуелей у Парижі. Оскільки часто вони виникали через сварки за місце в театрі. А введення системи ряд-місце, змінило цю ситуацію.

На початку 20 століття починається новий етап розвитку аналітичної геометрії. У цей період радянський математик Урінсон П. дає загальне визначення лінії, яке використовується в сучасній топології і підходить для будь-якого простору. Лінія – зв'язний континуум топологічної розмірності [20; 26; 27].

Основним поняттям аналітичної геометрії залишається поняття лінії. Ще й зараз використовують дане поняття у розумінні Декарта: плоска лінія – це геометричне місце точок площини, координати (x, y) яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння $F(x,y)=0$, де $F(x,y)$ – математичний вираз, що містить змінні x та y [35].

Розрізняють алгебраїчні та транцендентні лінії. Прикладами алгебраїчних є: пряма лінія (лінія першого порядку), конічні перерізи – еліпс, гіпербола, парабола (лінії другого порядку, рис.1.3.), декартів лист, цисоїда, кубічна парабола тощо (криві вищих порядків, рис.1.4.). Прикладами тренсцендентних ліній є: гіперболічна спіраль, ланцюгова спіраль, спіраль Архімеда, спіраль Галілея, Ферма тощо (рис.1.5).

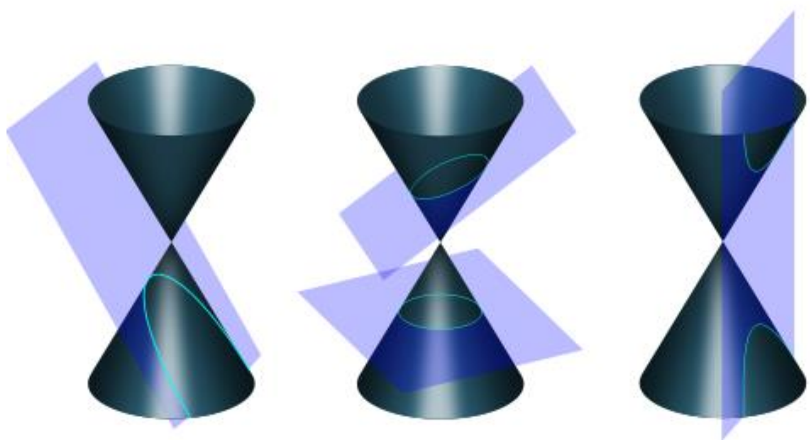


Рис.1.3. Конічні перерізи: парабола, еліпс, гіпербола

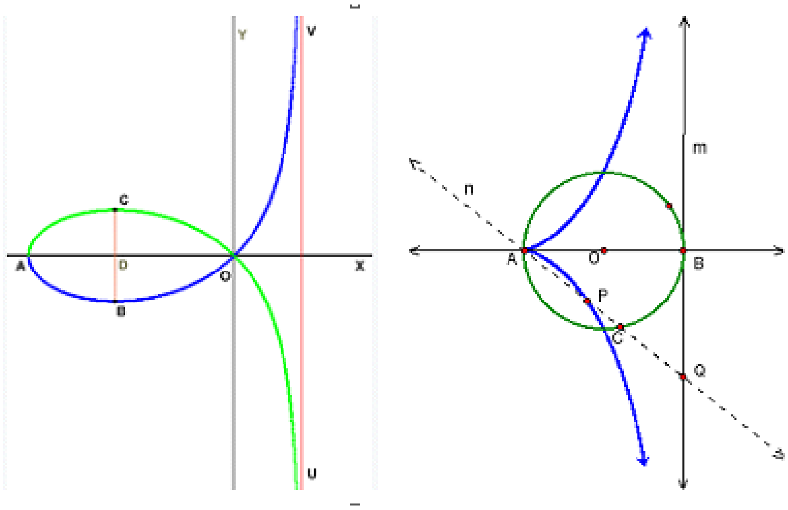


Рис.1.4. Декартів лист, цисоїда

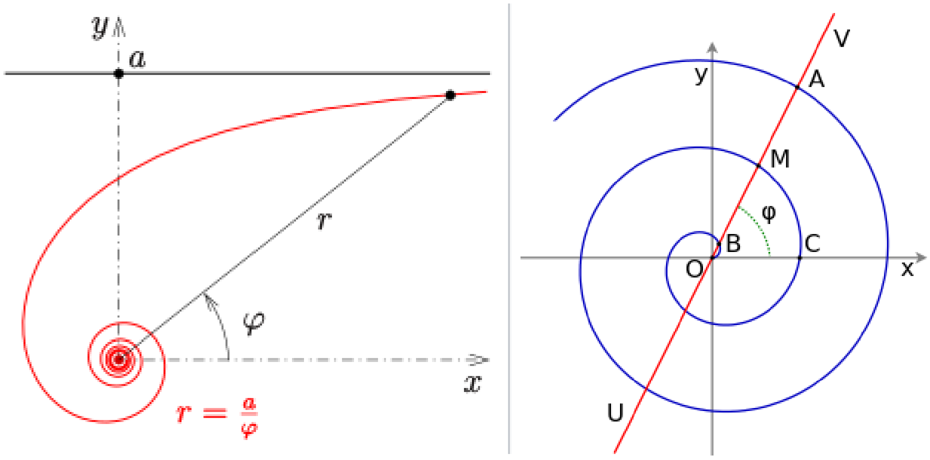


Рис.1.5. Трансцендентні лінії: гіперболічна спіраль, спіраль Архімеда

Аналогічно класифікуються поверхні. Прикладами алгебраїчних поверхонь є сфера, конус, циліндричні поверхні, поверхні обертання, лінійчаті поверхні (рис.1.6). До трансцендентних поверхонь відносять катеноїд, алехоїд, гелікоїд тощо (рис.1.7).

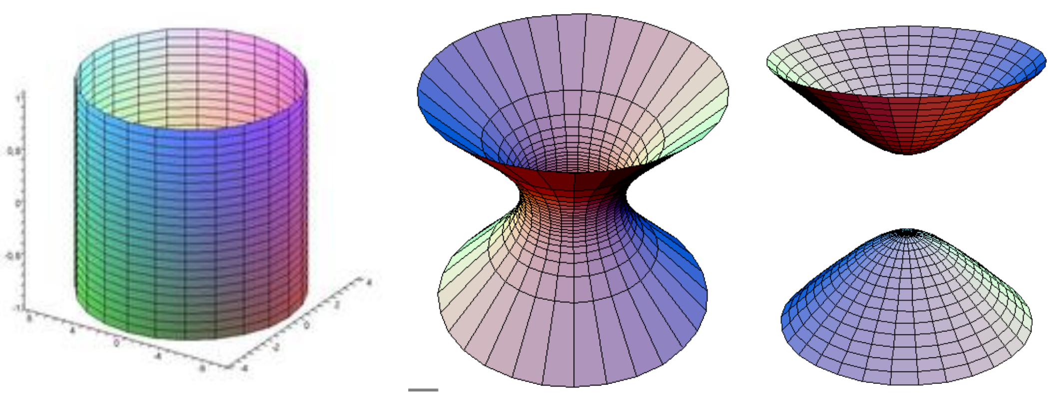


Рис.1.6. Алгебраїчні поверхні: циліндр, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди

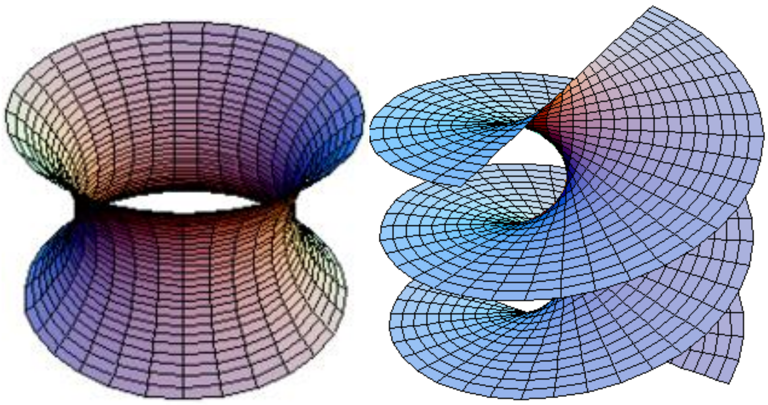


Рис.1.7. Транцендентні поверхні: катеноїд (мінімальна поверхня), гелікоїд

Математично точне визначення поверхні базується на поняттях топології. З точки зору топології просту поверхню можна розглядати як частину площини, яка постійно деформується під дією розтягування, стискання та згинання. Таке гомеоморфне відображення внутрішнього простору називається простою поверхнею. Таке визначення можна описати аналітично на основі деяких міркувань. Але такий підхід зовсім не використовується у шкільному курсі геометрії, де поверхню означають як множину точок, що задовольняють певну властивість [26].

Отже, аналітична геометрія побудована на положеннях відповідності: кожна точка простору є трійкою чисел (координати); до кожної поверхні (площини) – зіставляється рівняння, що пов'язує біжучі координати; для кожної лінії (прямої) – два таких рівняння. Завдяки цьому ми можемо перекласти геометричні факти на мову алгебри, результат переосмислюється геометричною мовою з інверсними переходами. Ось головна ідея аналітичної геометрії: регулярна робота потужного і ефективного апарату – алгебри на дослідження геометричних об'єктів.

Векторне числення є потужним дослідницьким інструментом для математичних і прикладних наук. Вектори як відрізки почали вивчати в 19 столітті. Термін «вектор» (походить від латинського слова vector – «носій») вперше був представлений у 1845 році видатним англійським математиком Гамільтоном У. (1805-1865), який запропонував позначати їх зі стрілками над латинськими літерами: $\overrightarrow{AB}$. Гамільтон перевірив властивості векторів, ввів операції над ними, вивчав вектор-функції. Великий внесок у розвиток векторної теорії зробив Грасман Г. (1809-1887), Максвелл Дж. (1831-1879), Гіббс Дж. (1839-1903), Хевісайд О. (1850-1925) та ін. У 1917 році для доведення геометрії Евкліда векторну аксіоматику розробив німецький математик Вейль Г. (1885-1955) [20].

До аналітичної геометрії додано векторну алгебру та аксіоматику з кінця 19 - початку 20 ст. [4]. Відтоді векторно-координатний метод відіграє важливу роль у вирішенні геометричних задач. Суть векторного методу в шкільному курсі геометрії полягає в наступному: певне співвідношення точок, прямих і площин виражаються мовою векторів, у вигляді векторного рівняння. Отримані рівності перетворюють за допомогою апарату векторної алгебри, а потім перекладають на мову геометрії (рис.1.8).

Мова геометрії	**Мова векторів**	**Мова координат**
$a \parallel b$	$\vec{a}=k\cdot\vec{b}$, k – const	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$
$a \perp b$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3=0$
$C \in AB$	$\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{CB}$, $k=\frac{AC}{CB}$	$x_0=\frac{x_1+kx_2}{1+k}$; $y_0=\frac{y_1+ky_2}{1+k}$; $z_0=\frac{z_1+kz_2}{1+k}$
M – середина AB, O – довільна точка	$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$	$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z_0=\frac{z_1+z_2}{2}$
Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\varphi$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3$
Довжина відрізка a	$a=\lvert\vec{a}\rvert$	$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\varphi$	$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$
AB – відрізок	$\overrightarrow{AB}$ – *вектор*	$(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ – координати вектора $\overrightarrow{AB}$
AB – відрізок між двома точками A і B	$AB=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Рис.1.8. Перехід з мови векторів на мову геометрії

Метод координат дає можливість пов'язати геометрію з алгеброю, арифметикою, математичним аналізом, він є методом перекладу геометричних задач на мову алгебри та аналізу, що дозволяє зашифровувати різні фігури, записувати їх числами (рівняннями, системами), розглядати геометричні задачі з алгебраїчної точки зору і надавати їх рішенням загальності, властивої алгебраїчному методу, і навпаки: завдання інших дисциплін висвітлюється з геометричної точки зору і характеризується як геометричні поняття.

1.2. Принцип наступності у навчанні

Елементи аналітичної геометрії вивчаються у шкільній геометрії в рамках вивчення деяких тем і, на жаль, не згадується вчителями під час вивчення інших тем геометрії. Хоча метод координат як і векторний метод можна широко використовувати під час розв’язування як планіметричних так і стереометричних задач. Курс аналітичної геометрії вивчається частково під час підготовки молодших бакалаврів (або в рамках вивчення курсу «Математика», або у складі дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»). Тож під час вивчення цих тем дуже яскраво прослідковується принцип наступності у вивченні матеріалу.

Філософське тлумачення поняття наступності має на увазі об’єктивно необхідний зв’язок між новим і старим у процесі розвитку.

Наступність – це послідовність, зв'язок етапів і рівнів розвитку, збереження певних властивостей або всіх властивостей при переході від попередніх до наступних рівнів навчання. Наступність стосується взаємовідносин, системи роботи, опори на попередні результати, поступового засвоєння нових і систематичних знань [42].

У педагогічній та методичній літературі поняття наступності трактується по-різному. В «Українському педагогічному словнику» Гончаренко С. розглядає безперервність навчання як послідовність і системність у розміщенні навчального матеріалу, зв'язок і послідовність рівнів і етапів навчального процесу, який здійснюється при переході від одного уроку до іншого [10, с. 227]. Спадкоємність у педагогіці – це дидактична норма, яка охоплює навчання учнів поняттям в їх логічному зв'язку і взаємозв'язку.

Послідовність шкільної та вищої освіти включає зміст, форми, методи і засоби освіти, соціально-психологічні аспекти морального розвитку особистості, психолого-педагогічні умови формування активної творчої особистості, об'єктивності оцінки якості освіти випускників загальноосвітніх навчальних закладів та оцінки відповідності шкільної та вузівської навчальної літератури. Неперервність професійно-технічної освіти в системі «школа-ВНЗ» визначається як загальнопедагогічний принцип, що вимагає забезпечення нерозривного зв'язку між освітніми рівнями та етапами в освітньому процесі; підвищення рівня професійної культури та професійної компетентності; перетворення окремих понять у цілісну систему; загальнокультурні та професійні компетентності, форми навчання, пов'язані зі змістом профорієнтаційної освіти, з якісним підвищенням сформованості рівня професійної культури та професійної компетентності студента [21].

У сучасній вищій освіті в рамках державного освітнього стандарту враховується підхід, спрямований на структурування наукового знання, яке в свою чергу стає класифікацією напрямів і спеціальностей вищої освіти. У загальноосвітніх школах зміст загальної середньої освіти представлено у вигляді системи освітніх галузей, а сам навчальний процес є дисциплінарним.

На перетині вищої та середньої школи наступність включає взаємодію системи педагогічних процесів ВНЗ і школи, тобто включення у процес вищої освіти таких елементів шкільної практики, які збагачують можливості загальноосвітньої школи щодо підготовки здобувачів освіти до громадської діяльності, а також організація виховання і навчання студентів у ВНЗ, що ґрунтується на конструктивному вдосконаленні шкільної системи.

За рахунок діалектичного розвитку педагогічного процесу у середній та вищій школі сам процес має свої особливості та свій прояв наступності на кожному етапі навчання. Наступність на одному рівні здебільшого поступова, помірковaна, а перехід від іншого рівня до вищого є стрибкоподібний, що є результатом якісних змін у розвитку особистості (психологічному), методах і формах навчання. Сутність наступності середньої та старшої школи як особливого психолого-педагогічного феномену пов'язана з раптовим переходом учня з однієї сфери діяльності в іншу як об'єкта і суб'єкта. У суто динамічному процесі успадкування головна роль відводиться цілісним уявленням про особистість учня, студента.

Курс аналітичної геометрії або елементи її вивчаються як у школі так і під час підготовки молодших бакалаврів, а також у вищих закладах освіти математичних спеціальностей.

Безперервність характеризується не лише опорою на знання, методи навчання, характерні для середньої школи, а й на нову якість навчання, «відсівання» школи, і в зв’язку з цим такі переходу рекомендується робити якісно саме на першому курсі, коли першокурсник психічно готовий до зміни характеру роботи.

Нарешті, безперервність у вивченні аналітичної геометрії означає, що здобувач освіти розуміє не тільки те, що він знає і вміє, а й те, чому вчиться в даній темі, і крім того бачить майбутню перспективу в даний момент – отримання знань та вмінь для професійної діяльності.

«Наступність» і «перспектива» в сучасній педагогіці трактуються як дві характеристики одного педагогічного явища. Перспектива - вид знизу вгору, а наступність – вид зверху вниз.

Так, наприклад, є тісний зв'язок між вивченням у старшій школі геометричних тіл (призми, піраміди, зрізані піраміди, прямі, круговий циліндр, правильний круговий конус, зрізаний конус, куля та її частини) та в курсі нарисної геометрії вищого технічного закладу (зв'язок технічний ліцей – ВНЗ), де переліки геометричних тіл розширюються, а їх форма визначається кінцевим списком поверхонь, що обмежують тіло [25; 37].

Під час вивчення окремих тем здобувач освіти має можливість відкрити новий науково-методичний рівень презентації деяких питань у порівнянні зі школою (наприклад, навчаючись в 10 класі порівняти методику вивчення теми у 9 класі, навчаючись у вищому закладі освіти – порівняти із вивченням у школі): аналіз, порівняння, міркування про методичні підходи до викладання окремих питань аналітичної геометрії.

1.3. Аналіз навчальних програм, ДПА та ЗНО

Що стосується освітніх програм, то залишаються чинними програми 2022-2023: для 6-9 класів МОН від 06.07.2017 р., затверджена наказом № 804; для 10-11 класів - затверджено наказом МОН від 23.10.2017 №1407 «Рівень стандарту. 10-11 класи», «Профільний рівень. 10-11 класи» [28]. Навчально-виховний процес у 7-11 класах відбуватиметься за такими типовими освітніми програмами: «Типова освітня програма закладів середньої освіти ІІ ступеня», затверджена наказом Міністерства освіти і науки від 20.04.2018р. №408; «Типова освітня програма закладів середньої освіти ІІ ступеня», затверджена наказом МОН від 20.04.2018 №408 (наказ МОН від 28.11.2019 № 1493, зміни від 31.03.2020 №464) [38; 39]. Для 5-6 класів діють пілотні навчальні програми.

З елементами аналітичної геометрії учні зустрічаються у 6 класі в темі «Координатна площина», де відповідно до навчальної програми розглядається поняття координатної прямої, координатної площини.

Далі з елементами аналітичної геометрії учні зустрічаються вже у 9 класі, а потім у 10 класі. Порівняємо ці теми у вигляді таблиці (табл.1.1.)

Таблиця 1.1.

Навчальна програма 9, 10 класів. Рівень «Стандарт».

10 клас. Координати і вектори (10 годин).		**9 клас. Координати на площині (8 год). Вектори на площині (12 год).**
Учень/учениця: **користується** аналогією між векторами і координатами на		

площині й у просторі; **усвідомлює** важливість векторно-координатного методу в математиці; **виконує** операції над векторами; **застосовує** вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин; **знаходить** відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин; **використовує** координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів.	Прямокутні координати в просторі. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками. Вектори у просторі. Операції над векторами. Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками. Симетрія відносно початку координат та координатних площин.	Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами. Рівняння кола і прямої Вектор. Модуль і напрям вектора. Рівність векторів. Координати вектора. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори. Скалярний добуток векторів.

Отже, під час навчання цим темам у 10 класі є можливість використання аналогії та дотримання етапів впровадження наступності у навчальний процес, розроблених Волчастою М. [9]: 1) послідовність і систематичність викладання навчального матеріалу з поступовим підвищенням його складності (9 клас – 10 клас поглиблення); 2) зв'язок і єдність змістово-методичних ліній розміщення матеріалу між різними рівнями навчання; 3) узгодження обсягу засвоєння навчального матеріалу в початковій і базовій, базовій і старшій школах; 4) взаємодія нових знань із раніше набутими знаннями і на основі цього досягнення учнем високої компетентності; 5) використання методів і засобів, адекватних віковим особливостям учнів певного рівня.

Порівняємо вимоги до знань, які висуваються до здобувачів освіти за різними рівнями навчання (табл.1.2) та навчальні теми (табл.1.3).

Таблиця 1.2.

Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі (22 години)	
Поглиблене вивчення	**Профільне вивчення**
Учень/учениця	**Учень/учениця** **наводить приклади** моделей симетрії

	відносно точки та прямої із об'єктів навколишнього середовища;
формулює означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу;	**формулює** означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу;
розрізняє векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори;	**розрізняє** векторні і скалярні величини; рівні вектори, колінеарні вектори, компланарні вектори;
	пояснює та записує зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин; відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променю; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; відстань між паралельними площинами; відстань між мимобіжними прямими.
класифікує взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі;	**класифікує** взаємне розміщення двох (трьох) векторів у просторі;
зображає на рисунку вектор, рівний сумі/різниці векторів, добутку вектора на число;	**зображає на** рисунку правила додавання векторів (трикутника та паралелограма); суму/різницю векторів, добуток вектора на число;
	знаходить на рисунку та зображає напрямлений відрізок як вектор, що дорівнює сумі, різниці векторів, добутку вектора на число; симетрію відносно точки; симетрію відносно площини;
	аналізує та досліджує в координатному просторі: координати точок; відстань між двома точками; координати середини відрізка; координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; перетворення паралельного перенесення;
обґрунтовує перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору;	**обґрунтовує** перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; скалярний добуток векторів;
ілюструє текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка;	**ілюструє** текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка;
	характеризує найпростіші геометричні місця точок простору; координатний і векторний методи розв'язування задач;
застосовує формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв'язування задач;	**застосовує** формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв'язування задач;
розв'язує вправи, що передбачають: знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за	**розв'язує вправи, що передбачають:** знаходження довжин відрізків; векторів; кута між векторами; дослідження виду многокутника за довжинами його елементів; доведення виду чотирикутника/трикутника за

довжинами його елементів.	відомими координатами точок та відомими властивостями їх різновидів; знаходження розв'язків задач координатним і векторним методами; моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту.

Таблиця 1.3.

Порівняння тематичного змісту за різними рівнями навчання

Поглиблене вивчення	Профільне вивчення
Прямокутна декартова система координат у просторі, координатний простір. Координати точки. Формула відстані між двома точками. Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні. Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач. Найпростіші геометричні місця точок простору. Рівняння площини. Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини, паралельне перенесення, подібність	Прямокутна декартова система координат у просторі, координатний простір. Координати точки. Формула відстані між двома точками. Координати середини відрізка. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні. Вектори у просторі. Координати вектора. Довжина вектора. Рівність векторів. Колінеарність векторів. Компланарність векторів. Операції над векторами та їх властивості: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів. Кут між векторами. Поняття про координатний і векторний методи розв'язування задач. Найпростіші геометричні місця точок простору. Рівняння площини, сфери. Перетворення у просторі: симетрія відносно точки, симетрія відносно площини, паралельне перенесення, подібність

Як бачимо, тематика не відрізняється, відрізняється глибина вивчення зазначених тем.

Відповідно до навчальних планів профтехучилищів, вони, як правило, користуються навчальними програмами шкільного курсу математики рівня стандарт. Зокрема, наприклад, у робочій програмі вивчення дисципліни «Математика» у Відокремленому структурному підрозділі «Професійно-педагогічний фаховий коледж Глухівського національного педагогічного університету», у ВСП «Глухівський агротехнічний фаховий коледж Сумського НАУ» під час підготовки фахового молодшого бакалавра на елементи аналітичної геометрії виділяється 20 годин і розглядаються такі теми: «Прямокутні координати у просторі. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками. Вектори у просторі. Операції над векторами. Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками. Симетрія відносно початку координат та координатних площин».

Якщо розглянути детально тематику, то в рамках вивчення курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» здобувачі освіти мають дещо ширший спектр тем. Серед них такі: Декартова система координат. Відстань між двома точками. Ділення заданого відрізку в заданому співвідношенні. Вектори на площині та в просторі. Скалярний, векторний, мішаний та подвійний добуток векторів, їх властивості. Кут між векторами. Пряма лінія на площині (пряма, що проходить через дві задані точки, канонічне та параметричне задання прямої, нормальне задання прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, у відрізках на осях, загальне рівняння прямої). Задачі на пряму на площині. Кут між двома прямими. Взаємне розташування двох прямих на площині. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині. Відстань від точки до прямої. Загальне рівняння площини (рівняння площини, що проходить через три точки, у відрізках на осях, неповні рівняння площини, нормальне рівняння). Взаємне розташування прямої і площини. Кут між прямою та площиною, між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності площин. Відстань від точки до площини. Загальні рівняння кривих другого порядку. Еліпс, гіпербола, парабола, їх властивості, канонічне рівняння. Поняття поверхні другого порядку. Еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, їх властивості, канонічне рівняння.

Після закінчення 9 класу учні складають ДПА з математики. Розберемо, які задачі з теми «Декартові координати» виносяться на державну атестацію. Основним посібником для підготовки з 2015 року є збірник завдань Мерзляка А. [33], але для підготовки до ДПА можуть бути використані й інші збірники, запропоновані МОН України [16; 24].

Класифікуємо задачі за основними поняттями та теоремами на основі яких базується їх вирішення.

1. *Знаходження координат точки.*

Задача 1.1. Які координати має образ точки при симетрії відносно: осі абсцис; осі ординат; початку координат?

2. *Складання рівняння кола та знаходження його компонентів.*

Задача 1.2. Коло задано рівнянням $(x\text{-}2)^2+(y+5)^2=13$. Як розташована точка $B(4;\text{-}1)$ відносно цього кола? Чому дорівнює радіус кола? Знайдіть рівняння кола з центром $O(4\text{:-}3)$, яке дотикається до даного кола.

Задача 1.3. На якому рисунку зображено коло, рівняння якого має вигляд $(x\text{-}1)^2+(y+1)^2=1$? (рис.1.9)

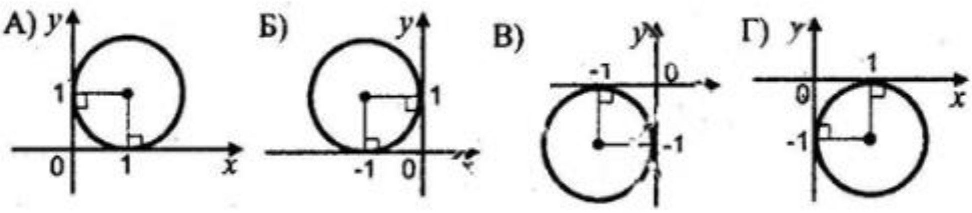


Рис.1.9. Ілюстрація умови задачі 1.3.

3. *Складання рівняння прямої*

Задача 1.4. Складіть рівняння прямої, що проходить через центри кіл: $(x\text{-}1)^2+(y\text{-}6)^2=3$, $(x+1)^2+y^2=7$.

4. *Метричні задачі* (знаходження довжини відрізка, величини кута, обчислення площі).

Задача 1.5. Вершинами трикутника є точки $A(\text{-}3;1)$, $B(2;\text{-}2)$, $C(\text{-}4;6)$. Знайдіть довжину медіани AK трикутника ABC.

Задача 1.6. Знайдіть координати точки, яка належить осі абсцис і рівновіддалена від точок $A(3,2)$ і $B(1,\text{-}6)$.

Отже, серед завдань, запропонованих для ДПА, домінують завдання на побудову рівняння прямої чи кола (вміння читати рівняння кола та знаходити геометричну фігуру, і навпаки, знаходити аналітичне завдання за геометричною фігурою (використовувати метод координат)).

Розглянемо завдання ЗНО, які містять елементи аналітичної геометрії [45]. Метод координат, як самостійний об'єкт, фігурує в ЗНО з 2010 р. Завдання, пов'язані з відстанню, координатами точки, площею фігури у прямокутній системі координат, рівнянням кола, рівнянням кулі, векторами у системі координат. Метод координат часто використовується в задачах встановлення відповідності. З 2018 по 2021 роки завдання на основі координатного методу стають складнішими та наповненими різними даними та вимогами, а у 2021-2022 році завдання спрощується.

Вперше вектори з'явилися в ЗНО 2009 р. Завдання включають дії над заданим вектором, як напрямленим відрізком, та заданим координатами, визначення координат вектора, визначення колінеарності та ортогональності векторів, знаходження скалярного добутку двох векторів та косинуса кута між векторами, зустрічаються в задачах на відповідність. Існують задачі, які поєднують координатний і векторний методи.

Класифікуємо задачі на метод координат за основними поняттями та теоремами на основі яких базується їх вирішення.

1. *Знаходження координат точки.*

Задача 1.7. Знайдіть точку, симетричну точці $A(2;-3;7)$ відносно координатної площини yz.

2. *Позиційні задачі*

Задача 1.8. Яка з наведених точок лежить у площині Oxz прямокутної системи координат у просторі?

Задача 1.9. У ПДСК задано сферу із центром у початку координат, якій належить точка $A(0;0;-5)$. Яка з наведених точок також належить сфері?

3. *Метричні задачі (обчислення довжини, величини кута, площі)*

Задача 1.10. У ПДСК на площині навколо трикутника ABC описане коло, задане рівнянням $x^2+y^2-4x=68$. Визначте довжину сторону BC, якщо кут $A=45^0$.

Задача 1.11. Центр кола x^2-8x+y^2+7=0 збігається з точкою перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$. Обчисліть площу цього паралелограма, якщо A(-4;-3) і B(0;3).

4. *Складання рівнянь кола, сфери, прямої лінії*

Задача 1.12. Укажіть рівняння кола з центром у початку координат, якщо воно проходить через точку (3;-4).

Задача 1.13. Укажіть рівняння прямої, що проходить через точку (0;0).

Класифікуємо задачі на векторну алгебру за основними поняттями та теоремами на основі яких базується їх вирішення.

1. *Знаходження координат вектора.*

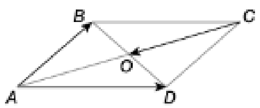
Задача 1.14. Знайдіть вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(3; -1; 2)$, $\vec{b}(-2; 2; 5)$.

2. З'ясування взаємного розміщення векторів (колінеарність, ортогональність).

Задача 1.15. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(m; 2; 3)$, $\vec{b}(-12; 6; n)$ колінеарні?

3. Позиційні задачі (вектори як напрямлені відрізки, знаходження вектора-суми, вектора-різниці).

Задача 1.16. Вказати правильне твердження (рис.1.10)



А	$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
Б	$\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
В	$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
Г	$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$
Д	$\overrightarrow{CO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

Рис.1.10. Ілюстрація до задачі 1.16

4. *Метричні задачі* (знаходження довжини вектора, кута між векторами, площі фігури).

Задача 1.17. У ПДСК на площині задано паралелограм *ABCD*, cos*A*=0,44. Визначте довжину діагоналі *BD* паралелограма, якщо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(6;-8)$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює 88.

Елементи аналітичної геометрії розглядаються здобувачами освіти під час вивчення геометрії, завдання мають місці і в задачах ДПА і в задачах ЗНО (НМТ – 2022, 2023 рік), але, на жаль, не знаходять застосування усіх своїх можливостей під час вивчення геометрії взагалі. Вчителі не часто використовують отримані учнями знання з даних тем під час розв’язування інших планіметричних та стереометричних задач, навіть тоді, коли введення системи координат або векторів значно полегшують розв’язування задачі.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТАМ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

2.1. Класифікація задач з елементами аналітичної геометрії

Під час вивчення теми здобувачі освіти повинні навчитися трактувати геометричні задачі. Розв'язувати геометричні задачі алгебраїчною мовою та алгебраїчними методами. Для того потрібно:

1) володіти вмінням складати рівняння різних прямих;

2) навчитися писати геометричне задання аналітично за допомогою рівнянь і нерівностей;

3) навчитися вибору системи координат за геометричним малюнком і проблемною ситуацією; аналітично координувати та записувати елементи рисунка;

4) навчитися геометричній інтерпретації різноманітних рівнянь, нерівностей та їх систем.

Різноманіття задач, пов'язаних з методом координат можна класифікувати так: задачі на обчислення координат, на знаходження геометричного місця точок (ГМТ), метричні задачі (знаходження довжини певних відрізків чи кута між лініями, площі фігур чи об'єму), задачі на доведення (довести, що фігура має певні властивості), задачі на міжпредметні зв'язки чи прикладне застосування, задачі на геометричні перетворення.

Найпростіший тип задач на обчислення координат. Можна запропонувати такий алгоритм:

1. Позначимо координати шуканої точки M $(x; y)$.

2. Залежно від умови задачі (використовуючи певні визначення та теореми) створюємо два незалежні відношення, що поєднують точку M з даними елементами задачі.

3. Отримані відношення запишемо в координатах, матимемо систему рівнянь з двома невідомими x і y.

4. Результат розв'язання системи дає відповідь на задачу.

Задача 2.1. Дано вершини паралелограма A(3;-2;1), B(0;2;0), C(-1;0;1). Знайти координати четвертої вершини, та точки перетину діагоналей.

Одна з основних задач аналітичної геометрії формулюється так:

Геометричне місце точок (ГМТ) визначається певними ознаками. Напишіть рівняння і визначте (перевірте), яку геометричну фігуру воно визначає.

Цей вид задач (складання рівнянь геометричного місця точок) має зручний алгоритм розв'язання:

1. Рекомендовано вибрати систему координат (визначити положення початку координат, напрямок осей координат, одиничний відрізок).

2. Обрати довільну біжучу точку M з біжучими координатами (x,y,z).

3. Записати основний зв'язок між даними та елементами, які шукаються.

4. Записати це співвідношення в координатах.

5. Внести необхідні зміни та спрощення.

6. Довести, що отримане рівняння визначає шукане ГМТ.

Задача 2.2. Знайти рівняння сфери з центром у точці C(1; 2; 3) і радіусом R=4 та побудувати її зображення в просторовій системі координат.

До метричних задач відносяться задачі пов'язані із вимірюванням, коли геометрична фігура задається координатами або своїх вершин або складових елементів, потрібно обчислити довжини ліній або кути між лініями.

Задача 2.3. У прямій трикутній призмі всі ребра мають довжину a. Знайти відстань між мимобіжними прямими, які містять діагоналі бічних граней призми.

У задачах на доведення потрібно показати, що даний об'єкт володіє вказаною властивістю. В основі розв'язування таких задач лежать такі факти:

координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця і початку; координати однакових векторів однакові; кут, утворений двома векторами, 90^0, якщо їх скалярний добуток рівний нулю; вектори паралельні, якщо їх координати пропорційні; має місце теорема синусів, косинусів, Піфагора, метричні співвідношення у трикутниках, властивості дотичних до кола і решта планіметричних та стереометричних теорем.

Задача 2.4. Довести, що коли в тетраедрі дві пари протилежних ребер взаємно перпендикулярні, то і третя пара ребер теж взаємно перпендикулярна.

Серед задач прикладного спрямування можна виділити задачі, пов'язані з фізикою (адже більшість фізичних величин є векторами: сила, вага, момент сили, швидкість, переміщення тощо, а деякі скалярні величини обчислюються в результаті скалярного добутку векторів: робота, центр мас тощо), економікою тощо. Під час знаходження центра ваги розрізняють два випадки: однорідна пластинка чи стержневе тіло. При цьому необхідно враховувати, що центр ваги однорідного прута або дроту знаходиться в його середині; центром ваги трикутної рівномірної пластини є точка перетину медіан трикутника; маса однорідного прута або дроту приймається пропорційною його довжині і вважається зосередженою у точці, яка ділить його на дві рівні частини; маса однорідної пластини пропорційна площі пластини і зосереджена в її центрі ваги. Алгоритм:

1. Щоб обчислити координати центру ваги N-кутної рівномірної пластини, зробіть це: розділіть пластину на трикутники, знайдіть центр ваги кожного трикутника та обчисліть площу трикутників та використовуйте формулу для знаходження центру ваги матеріальної системи точок.

2. Щоб обчислити координати центра ваги дротяної чи стрижневої фігури, зробіть це: обчисліть координати центру ланок і їх довжину, потім використайте відповідні формули.

Задача 2.5. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна трьох сил $\boldsymbol{F}(1;1;1)$, $\boldsymbol{N}(0;1;2)$, $\boldsymbol{M}(0; 1;-2)$ при переміщенні об'єкта з точки $A(1;2;3)$ в точку $B(2;3;5)$.

Задачі, які пов'язані із перетворенням координат можна поділити на такі:

1. Положення нової системи координат неявно задано відносно старої. Знайти координати точок за новою або старою системою координат (під час розв'язування таких завдань насамперед необхідно встановити, що існують обидві системи, які є прямокутні декартові або принаймні одна з них афінна чи полярна, та застосувати відповідні формули, шляхом обчислення нових початкових координат і нових координат орт-векторів).

2. Відносно деякої системи координат лінія задається її рівнянням. Записати її рівняння відносно іншої системи координат, що визначається умовою задачі.

Задача 2.6. Записати координати точок A і B, які належать відповідно прямим $y=2x-3$ та $y=-3x+1$ і поворотом навколо початку координат на 90^0 відображаються одна в одну.

З використанням методів аналітичної геометрії значно прискорюється і полегшується процес розв'язування стереометричних задач у шкільному курсі геометрії.

Розглянемо, наприклад, розв'язування задачі 2.4.

Задача 2.4. Довести, що коли в тетраедрі дві пари протилежних ребер взаємно перпендикулярні, то і третя пара ребер теж взаємно перпендикулярна.

Розв'язання.

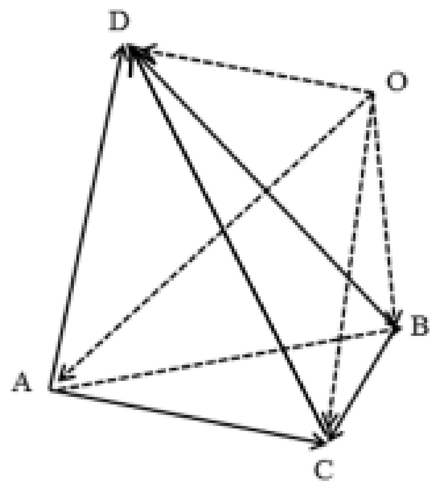


Рис.2.1. Ілюстрація до задачі 2.4.

Дано тетраедр *ABCD* (рис. 2.1.). За умовою задачі $AB \perp CD$ і $AD \perp BC$. Доведемо, що $BD \perp AC$. Застосуємо векторний метод. Для цього введемо до розгляду вектори спрямовані по ребрах тетраедра. Візьмемо довільно точку O і побудуємо вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$. Якщо вектора перпендикулярні, то їх скалярний добуток рівний нулю, тобто, якщо $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ то $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = 0$. Розкладемо вектор $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ за векторами $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{AB}= \overrightarrow{OB}- \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CD}= \overrightarrow{OD}- \overrightarrow{OC}$.

$(\overrightarrow{OB}- \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OD}- \overrightarrow{OC})=0$.

Якщо $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ то $\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{BC} = 0$.

$(\overrightarrow{OD}- \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}- \overrightarrow{OB})=0$.

Додамо ці рівняння

$(\overrightarrow{OC}- \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD}- \overrightarrow{OB})=0$.

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

Отже, пара протилежних ребер *AC* і *BD* тетраедра є взаємно перпендикулярні.

Такі задачі, які можна і доцільно розв’язувати за допомогою координатно-векторного методу, потрібно використовувати під час вивчення геометрії. При цьому:

1) геометрична задача на площині є «повністю визначеною», якщо відомі обидві суміжні сторони плоскої фігури та кут між ними;

2) геометрична задача в просторі (тривимірному) визначена, якщо відомі суміжні ребра просторової фігури та кути між кожною парою цих ребер.

При цьому кожна задача розв'язується індивідуально, але до деяких метричних задач (наприклад: дана фігура на площині (у просторі). І нехай a, b (a, b, c) — довжини сторін (ребер) зі спільною вершиною, кут між якими (кути між окремими парами) відомий. І нехай це всі дані.) можна запропонувати алгоритм. У школі учні знайомі лише із прямокутною декартовою системою координат, тому такий метод можуть використовувати лише для прямокутної фігури; під час поглибленого вивчення математики доречним є введення афінної системи координат [17] (для використання якої потрібно ще мати уявлення про матриці та операції множення матриць), у якій даний алгоритм буде наступний.

1. Обрати початок координат системи (спільна точка відомих сторін (ребер) фігури) та надати їй нульові координати $O(0;0;0)$.

2. Обрати базисні (одиничні) вектори (за них потрібно взяти сторони, довжини та кути між якими є відомими; тоді є відомими напрямки базисних векторів, їх довжини, кути між ними).

3. Для афінної системи координат обчислити метричні коефіцієнти:

$$g_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j}) = |\vec{e_i}||\vec{e_j}|\cos(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = g_{ji},$$

які утворюють матрицю Грама, яка необхідна для обчислення зокрема скалярного добутку векторів, заданих в афінній системі координат. Нехай, наприклад, вектори задані координатами: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{x}|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = |\vec{e_1}|^2,\ g_{22} = |\vec{e_2}|^2,\ g_{33} = |\vec{e_3}|^2; \qquad g_{12} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle = |\vec{e_1}| \cdot |\vec{e_2}| \cdot \cos \widehat{\vec{e_1}, \vec{e_2}} = g_{21};$$

$$g_{13} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_3} \rangle = |\vec{e_1}| \cdot |\vec{e_3}| \cdot \cos \widehat{\vec{e_1}, \vec{e_3}} = g_{31}; \qquad g_{23} = \langle \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle = |\vec{e_2}| \cdot |\vec{e_3}| \cdot \cos \widehat{\vec{e_2}, \vec{e_3}} = g_{32}.$$

4. Відносно обраної системи координат знайти координати векторів (вершин чи необхідних точок) для обчислення необхідного елемента. На цьому етапі часто використовуються правило додавання векторів, поділ відрізка у заданому відношенні.

5. Використовуючи формули, зазначені у п.3 обчислити шуканий елемент задачі.

Розглянемо приклад [17].

Задача 2.7. Задано трикутник ΔABC: AB=4, AC=3, $\angle BAC = 60^0$. Знайти довжину відрізка AD, якщо точка D поділяє напрямлений відрізок BC у відношенні 2:3.

Розв’язання.

1-2. Введемо афінну систему координат (оскільки кут між прямими не прямий), спрямувавши вісі по сторонах трикутника AC та AB: $\vec{e_1} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AB}$. За початок координат обираємо точку A (0;0).

3. Довжина векторів $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ відповідно рівні 3 та 4, кут між ними становить 60^0, отже, можемо обчислити метричні коефіцієнти.

$$g_{ij} = (\vec{e_i}, \vec{e_j}) = |\vec{e_i}||\vec{e_j}| \cos(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = g_{ji}$$

$$g_{12} = (\vec{e_1}, \vec{e}_2) = |\vec{e_1}||\vec{e}_2| \cos(\vec{e_1}, \vec{e}_2) = g_{21} = 6$$

$$g_{11} = (\vec{e_1}, \vec{e}_1) = |\vec{e_1}||\vec{e}_1| = 9$$

$$g_{22} = (\vec{e_2}, \vec{e}_2) = |\vec{e_2}||\vec{e}_2| = 16$$

Матриця Грама: $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$.

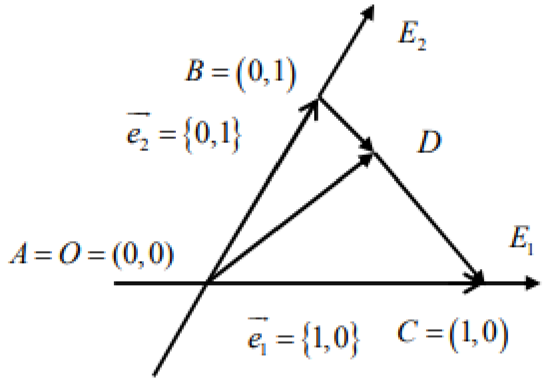


Рис.2.2. Ілюстрація до задачі 2.7.

4. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

В обраній системі координат точка $B(0;1)$, $C(1;0)$, нехай точка $D(x; y)$, яка за умовою поділяє $\overrightarrow{BC}$ у відношенні 2:3. Тоді за формулою про поділ вектора у заданому відношенні, маємо:

$$x = \frac{0+2/3}{1+2/3} = \frac{2}{5},\ y = \frac{1+0*2/3}{1+2/3} = \frac{3}{5}.$$

Отже, $D(2/5, 3/5)$. Тому вектор $\overrightarrow{AD}\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

5. Знайдемо довжину $\overrightarrow{AD}$ за формулою

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{252}{25} = \left(\frac{6}{5}\sqrt{7}\right)^2$$

Отже, $\overrightarrow{AD} = \frac{6}{5}\sqrt{7}$.

Якщо в умові задачі задано трикутник, у якому відомі три елементи: сторона і суміжні кути або дві сторони і будь-який з трьох кутів, то доцільно використовувати теореми синусів або косинусів і тоді задачу легко звести до описаної вище. Отже, наведений алгоритм може бути використаний для вирішення геометричних задач у базовій та старшій школі, необхідно лише ознайомити здобувачів освіти із афінною системою координат, яка є ширшою за прямокутну декартову систему координат і дати початкові уявлення про матриці.

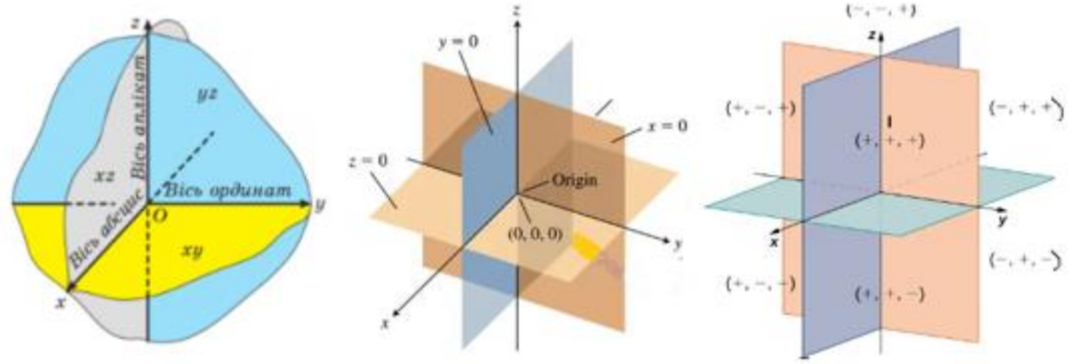
2.2. Метод координат на площині і в просторі

Розглянемо основні поняття та теореми даної теми, які розглядаються у підручниках за 9 та 10 класи. Вдалий підхід використано у підручнику Нєліна Є., він подає коротку інформацію у вигляді таблиць.

У жодному шкільному підручнику з геометрії 9 класу не вводиться означення системи координат. Спираючись на принцип наступності, вважаємо доречним ведення такого означення:

Система координат – це сукупність умов, за допомогою яких можна визначити положення точки на площині або в просторі. Такими умовами є: наявність двох (трьох) напрямлених прямих (осей координат), які перетинаються в точці O – початок координат, і масштабної одиниці по кожній з осей.

Прямокутну систему координат у підручниках 9 класу [3; 7; 13; 32] вводять конструктивно, пригадуючи її складові, з якими діти знайомилися у 6 класі. У 10 класі у підручнику Істера О. теж подається конструктивне означення: «Через довільну точку O простору проведемо три попарно перпендикулярні прямі, на кожній з яких виберемо напрям, позначивши його стрілкою, та одиничний відрізок. Так задають ПДСК» [15]. А в інших підручниках - описово: «ПДСК у просторі називають три попарно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку (рис.2.3 а))» [2; 6]. Хоча доречніше продемонструвати учням дещо інший рисунок: на якому видно різні координатні площини (рис.2.3. б))



а) б)

Рис.2.3. ПДСК. а) Ілюстрація з підручника Мерзляк А.Г. та ін.[30]; б) ілюстрація ПДСК

З іншими видами систем координат на площині можна познайомитися лише у підручнику Бурди М. [7], у якому у рубриці «Дізнайся більше» вводиться косокутна система координат та формула для знаходження відстані між точками в даній системі.

Надалі учні мають справу із метричним застосуванням координат: знаходження відстані між точками (довжина відрізка), знаходження середини відрізка. У підручниках 9 класу є розходження щодо методики виведення даних формул. Так, у підручнику Істера О. [13] формула відстані отримується як результат розв’язування задачі, з якої робиться висновок: «відстань між точками $A(x_A, y_A)$, і $B(x_B, y_B)$, можна знайти за формулою: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$». У підручнику Бевз Г. [3] і Бурди М. [7] формула подається у вигляді теореми: «Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць відповідних координат».

Різний підхід щодо виведення формули знаходження середини відрізка. Так у підручнику Істера О. [13] формула отримується як результат розв’язування задачі, у підручнику Бевз Г. [3] – у вигляді теореми («кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців»), Мерзляк А. [32] виводить формулу, спираючись на теорему Фалеса та поняття відстані як модуля.

Під час вивчення площинного випадку доречним буде узагальнення теоретичного матеріалу у вигляді рисунка (рис.2.4).

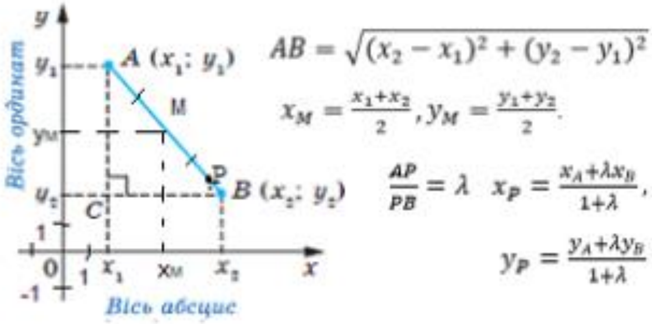


Рис.2.4 Система координат на площині

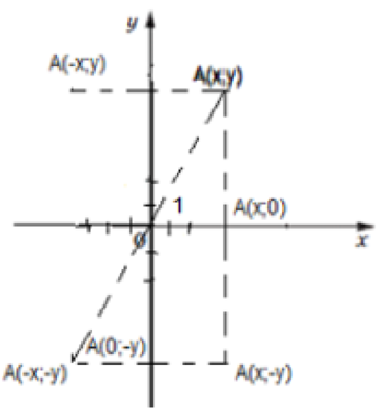
У 10 класі доречним буде отримання зазначених формул, використовуючи аналогію із площинним випадком.

У підручниках Мерзляк А. [30], Бевз Г. [2] формули подаються у вигляді теорем, і в останньому підручнику вводиться поняття поділу відрізка у заданому відношенні:

Теорема. Якщо точка $P(x, y, z)$ відрізка з кінцями $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ така, що $AP{:}PB = m{:}n$, то $x = \frac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2)$, $y = \frac{1}{m+n}(ny_1 + my_2)$, $z = \frac{1}{m+n}(nz_1 + mxz_2)$.

Формула знаходження координат точки, що ділить відрізок у заданому відношенні у підручнику Істера О. подається у вигляді теореми, у підручнику Нєліна Є. – задачі.

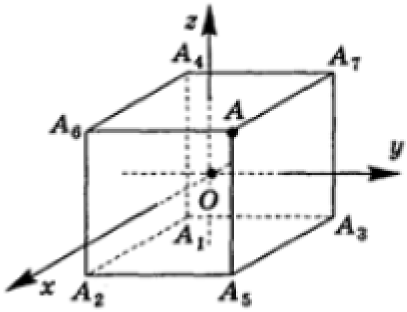
Під час розв’язування позиційних задач виникає потреба у визначенні координат точок, розташованих на певній осі, чи симетрично певної осі. Матеріал теж доречно подати у вигляді рисунку (рис.2.5).



Положення точки	*A(x;y)*
На осі *Ox*	*A(x;0)*
На осі *Oy*	*A(0;y)*
Симетрична відносно *Ox*	*A(x;-y)*
Симетрична відносно *Oy*	*A(-x;y)*
Симетрична відносно *O(0;0)*	*A(-x;-y)*
Симетрична відносно *B(a;b)*	*A(2a-x;2b-y)*

Рис.2.5. Положення точки на площині

Розглядаючи це питання у 10 класі необхідно пригадати даний матеріал на площині і спробувати за допомогою учнів отримати схожу таблицю для просторового випадку (рис.2.6).



Симетрія відносно \ Точки	$A(x, y; z)$
точки O	$A_1(-x, -y; -z)$
осі x	$A_2(x; -y; -z)$
осі y	$A_3(-x; y; -z)$
осі z	$A_4(-x; -y; z)$
площини xy	$A_5(x; y; -z)$
площини xz	$A_6(x; -y; z)$
площини yz	$A_7(-x; y; z)$

Рис.2.6. Положення точки в просторі

Як зазначалося у п.2.1. і як видно із аналізу викладеному у цьому пункті учні мають справу лише із прямокутною декартовою системою координат, у класах з поглибленим вивченням математики є можливість введення афінної системи координат.

Афінна система координат – це сукупність умов: наявність точки відліку та двох (трьох) напрямлених прямих, що перетинаються в даній точці, із визначеними на них одиничними відрізками (рис.2.7).

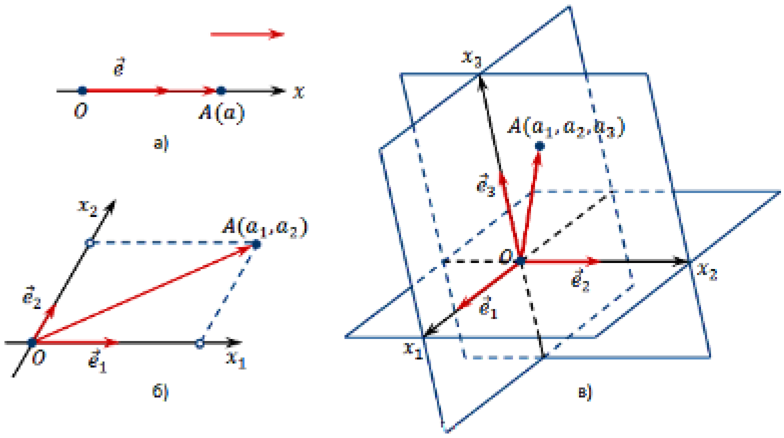


Рис.2.7. Афінна система координат: а) на прямій; б) на площині; в) в просторі.

З означення випливає, що кути між цими прямими можуть бути довільними, а одиничні відрізки по кожній осі можуть бути різні. У зв'язку з чим розширюється можливості використання такої системи для розв'язування геометричних задач (необхідно враховувати довжини базисних векторів).

З вивченням даної теми пов'язані задачі на знаходження координат точок, на знаходження положення фігури на координатній площині чи в просторі, метричні задачі (на знаходження довжини відрізка чи величини кута), розв'язування планіметричних (стереометричних) задач, у яких чітко не простежується застосування методу координат.

Під час розв'язування задач даної теми доречним є використання комплексних завдань – завдань, які пов'язують декілька понять теми або мають декілька завдань. Розглянемо приклади завдань, які розкривають поняття даної теми.

Задача 2.8. У прямокутній декартовій системі координат дано точки *A*(2;-4;-8), *B*(10; -20; 6) симетричні відносно точки *C*. 1) Знайти координати точки *C*. 2) Знайти координати точки *K*, що ділить відрізок *AB* у відношенні 2:1. 3) Знайти координати точок–проекцій точки *A* на вісі координат. 4) Знайти координати точок симетричних точці *K* відносно площин координат.

Розв'язання.

Подамо розв'язання у вигляді двох колонок, де у лівій колонці буде сам розв'язок, а у правій колонці – теоретичний факт, на який спирається розв'язування.

1) *C* – середина *AB*, тоді x_C=(2+10)/2=6 y_C=(-4-20)/2=-12 z_C=(-8+6)/2=-1 *C*(6; -12; -1)	1) Якщо точки *A* і *B* симетричні відносно *C*, то точка *C* – середина відрізка *AB*. $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}, y_C=\frac{y_A+y_B}{2}, z_C=\frac{z_A+z_B}{2}$
2) *AK*:*KB*=3:1=3=α	2) Точка *K* ділить відрізок у

x_K=(2+3*10)/(1+3)=8

y_K=(-4-3*20)/4= -16

z_K=(-8+3*6)/4=2,5

K(8; -16; 2,5)

3) *Ox*: *A*(2;0;0); *Oy*: *A*(0;-4;0); *Oz*: *A*(0;0;-8).

4) *Oxy*: K_1(8;-16;-2,5), *Oxz:* K_2(8; 16; 2,5), *Oyz*: K_3(-8;-16; 2,5).

відношенні, тобто *AK:KB*=α

$$x_K = \frac{x_A + \propto x_B}{1+\propto}, y_K = \frac{y_A + \propto y_B}{1+\propto}$$

$$z_K = \frac{z_A + \propto z_B}{1+\propto}$$

3) Під час проектування точки на вісі не змінюється координата, яка співпадає з назвою осі, дві інші – перетворюються на нуль.

4) Під час симетрії відносно площини у точки змінюється на протилежну координата, яка відсутня в назві площини.

Задача 2.9. Дано трикутник *ABC*, вершини якого *A*(-2;6), *B*(-2;-2), *C*(4;-2). Знайти довжину медіани *AM*. Побудувати даний трикутник. Знайти кути трикутника.

Розв'язання. Побудуємо даний трикутник у ПДСК (рис.2.8).

З рисунка видно, що кут *B* – прямий. Решта кутів можна знайти, виходячи із метричних співвідношень у трикутнику. Оскільки точки *A* і *B* мають однакові абсциси, то довжина *AB*=|y_B-y_A|, *AB*=|-2-6|=8. Оскільки точки *C* і *B* мають однакові ординати, то довжина *BC*=|x_C-x_B|, *BC*=|4+2|=6. Довжину сторони *AC* трикутника можна знайти за формулою:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(4+2)^2 + (-2-6)^2} = 10$$ або за теоремою Піфагора.

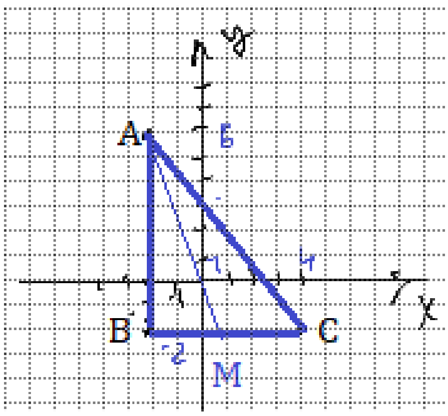


Рис. 2.8. Ілюстрація до задачі 2.9.

Тоді кут C: cos $C=BC/AC=6/10=0{,}6$.

Кут $C=53^0$, тоді кут $A=90-53=37^0$.

Зауважимо, що для знаходження кута C можна було скористатися функцією тангенс і не шукати довжину сторони AC.

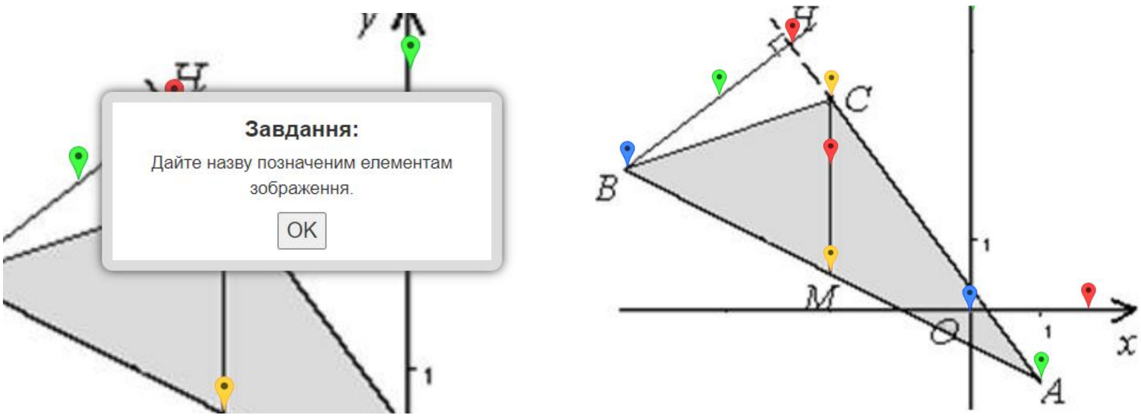
Точка M – середина BC, знаходимо її координати $M((-2+4)/2; (-2-2)/2)$, $M(1; -2)$.

Довжина медіани $AM=\sqrt{(1+2)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{73}.$

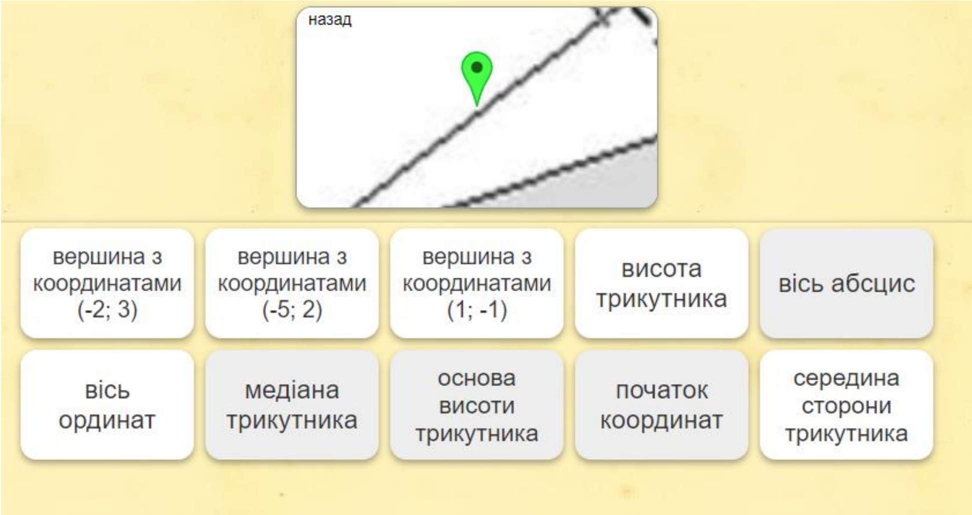
Під час розв’язування даної задачі ми пригадуємо правила побудови точок у системі координат, формули середини відрізка, довжини відрізка, та маємо можливість пригадати тригонометричні функції.

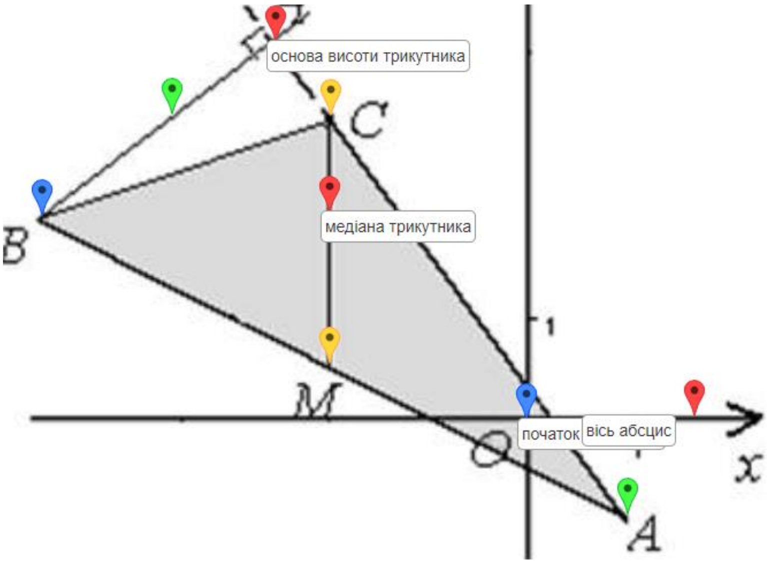
Дуже зручно закріплювати теоретичні положення за допомогою програми LearningApps. Тут можна створити різні вправи, у вигляді змагань, розв’язування задачі, встановлення відповідності тощо.

Наприклад, такою є вправа, яку можна розглянути у 9 класі, зображена на рис. 2.9, у 10 класі – рис.2.10.



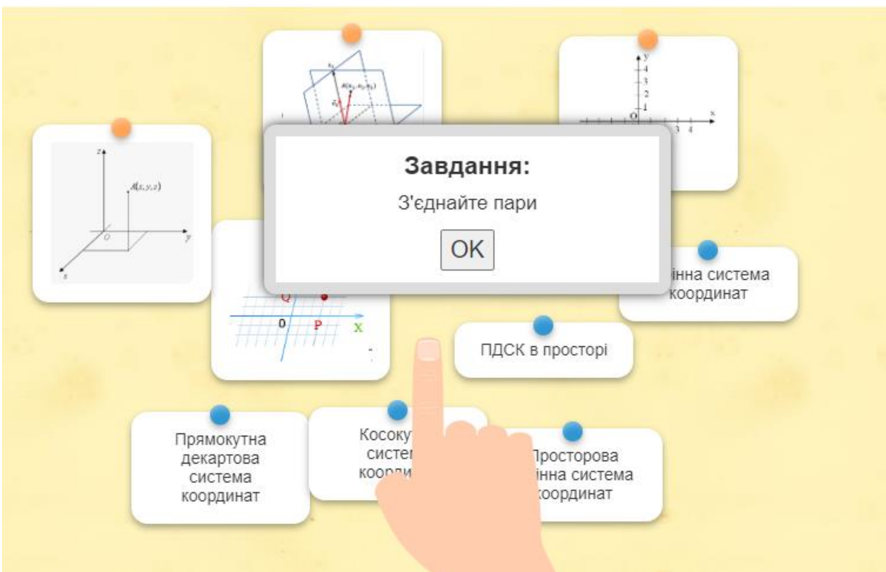
а)



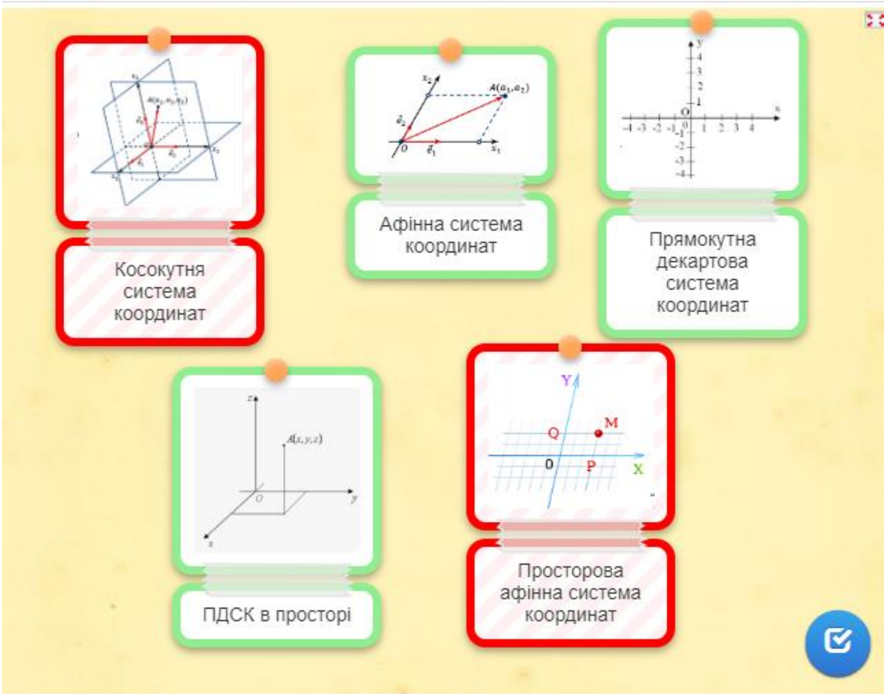


б)

Рис. 2.9. Вправа на платформі LearningApps: а) завдання; б) етапи розв’язування



а)



б)

Рис. 2.10. Вправа на платформі LearningApps: а) завдання; б) розв'язування

Крім задач, де чітко і зрозуміло, що потрібно використати систему координат, потрібно продемонструвати учням задачі, наприклад, такого змісту.

Задача 2.10. Дано прямокутник *АВСД*. Довести, що для довільної точки *М* виконується рівність $MA^2+MC^2=MB^2+MД^2$.

Розв'язання. Введемо ПДСК: *А* – початок координат, *АД* – вісь *Ох*, *АВ* – вісь *Оу*. Позначимо довжини сторін прямокутника через *a* і *b* відповідно, тоді *АД=a, АВ=b*. Тепер можна визначити координати вершин прямокутника і використати формулу для знаходження відстані між точками: *А*(0;0), *В*(0;*b*), *С*(*a; b*), *Д*(*a*;0), *М*(*x;y*).

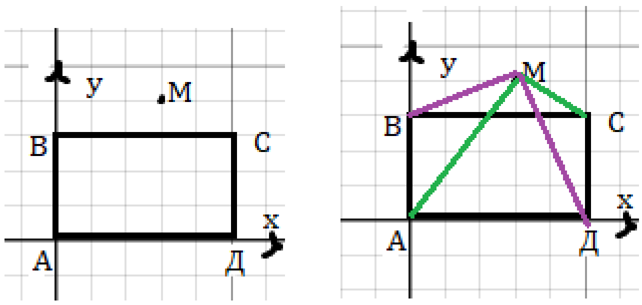


Рис.2.11. Ілюстрація до задачі 2.9.

$$MA = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$$

$$MA = \sqrt{(0 - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$MC = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2}$$

$$MB = \sqrt{(0 - x)^2 + (b - y)^2} = \sqrt{x^2 + (b - y)^2}$$

$$M\text{Д} = \sqrt{(a - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{(a - x)^2 + y^2}$$

$x^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 = x^2 + (b - y)^2 + (a - x)^2 + y^2,$ що й треба було довести.

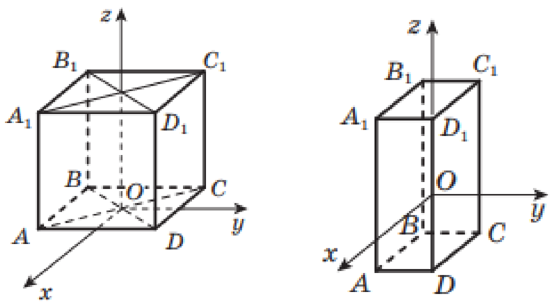
У якості тренувальних вправ для формування вмінь вводити системи координат та записувати координати необхідних точок можна використати такі завдання.

1) Сторона квадрата дорівнює 1. Визначте координати вершин квадрата, прийнявши за осі координат дві його діагоналі.

2) *ABCDEF* - правильний шестикутник, точка *O* - його центр. Покладемо *OA* – вісь *Ox*, $|OA|=a$, *OB* - вісь *Oy*, $|OB|=b$. Визначити координати вершин шестикутника в афінній системі координат (*O, OA, OB*).

3) Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розміщено в прямокутній системі координат так, як показано на рисунку 2.12 а). Точка *A* має координати (1; –1; 0). Знайдіть координати решти вершин куба [30; с. 195].

4) Бічні ребра прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельні осі аплікат (рис. 2.12 б)), $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Початок координат, точка *O*, є серединою ребра DD_1. Знайдіть координати вершин паралелепіпеда [30, с. 195].



а) б)

Рис.2.12. Ілюстрація до задачі: а) 3); б) 4).

2.3. Елементи векторної алгебри

У підручниках за 9 клас поняття вектора вводиться як «величина, що визначається не лише числовим значенням, а й напрямом». Вводиться поняття нуль-вектора, колінеарних векторів, модуль вектора (довжина відрізка), розглядається задання вектора алгебраїчно (через координати), вводяться у вигляді теорем правила дії над векторами заданими як відрізками так і координатами. У підручнику Мерзляк А. [32] вводиться лема (у Бевза Г. [3] – це теорема у рубриці для допитливих), яку часто використовують під час розв'язування планіметричних задач, в яких явно не вказане використання векторів: «Нехай M – така точка відрізка AB, що AM/MB=m/n; тоді для будь-якої точки X виконується рівність:

$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}$».

Здобувачі освіти вивчають поняття скалярного добутку векторів. Кут між векторами вводиться описово і не означається. Хоча було б дуже доречним означити це поняття : «кут між двома векторами, відкладеними від однієї точки, є найкоротший кут, на який потрібно повернути один із кутів навколо свого початку до положення співнапрямленості з іншим вектором». Таке означення набагато полегшує розуміння, що називати кутом між прямими і дозволяє уникати класичних помилок під час розв'язування задач.

У підручнику Мерзляк А. скалярний добуток означається як добуток двох модулів на косинус кута між ними, хоча доречнішим було б підкреслити, що результатом такого добутку є число (як у підручнику Бевз Г.) і вказати вже як його обчислити (у підручнику Істера О. цей факт подано у вигляді теореми). Як теорема подається формула знаходження скалярного добутку векторів заданих координатами (у підручнику Істера О. це є означенням скалярного добутку), наслідком цієї теореми є правило обчислення кута між векторами. У підручнику Бевз Г. у рубриці «Для допитливих» подається поняття косого добутку («число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на синус орієнтованого кута між першим і другим вектором») та поняття векторного і мішаного добутку векторів (але завдання на використання такого матеріалу у підручнику відсутні).

У підручниках 10 класу означення вектора дається так.

За Мерзляк А.: «відрізок, для якого вказано яка точка є початком, а яка кінцем, називається напрямленим відрізком або вектором», за Істером О.: «відрізок, для якого визначено напрям, називають вектором», за Нєліним Є.: «вектором називатимемо напрямлений відрізок». Вводиться поняття модуля вектора (довжина відрізка, що його зображає), колінеарних векторів (ненульові вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій).

Поняття компланарних векторів: Мерзляк А.: «Вектори називаються компланарними, якщо рівні їм вектори, які мають спільний початок, належать одній площині». Істер О.: «Вектори називаються компланарними, якщо при відкладанні їх від однієї і тієї самої точки вони будуть лежати в одній площині». Бевз Г.: «Три вектори називають компланарними, якщо відповідні їх напрямлені відрізки розміщені в одній площині або в паралельних площинах».

Розглядаються правила додавання та віднімання векторів, заданих як координатами так і відрізками (пригадуються правила додавання векторів на площині).

Поняття «кут між векторами» отримує означення у підручниках Мерзляк А. та Бевз Г. – це кут між відповідними відрізками, які виходять з однієї точки. У підручниках Мерзляк А., Істер О. поняття кута між векторами вводиться описово за допомогою рисунка, чітке означення відсутнє.

Різний підхід щодо означення скалярного добутку векторів.

Мерзляк А., Бевз Г. *Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.* (Нєлін Є., Істер О. – це теорема).

У Нєліна Є. та Істера О.С. скалярний добуток подається через добуток відповідних координат: «*Скалярним добутком векторів* $a(x_1,y_1,z_1)$ *і* $b(x_2,y_2,z_2)$ *називають число* $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. *Скалярний добуток вектора на себе називають скалярним квадратом*» (у Мерзляк А. та Бевз Г. це є теоремою).

Лише у підручнику Бевз Г. як додаткову інформацію дається означення векторного, косого та мішаного добутку векторів.

Найбільше ідея використання теорії векторів простежується під час доведення перпендикулярності чи паралельності двох ліній, знаходження скалярного добутку переважно для визначення кута між лініями, дії над векторами як напрямленими відрізками можна використовувати під час розв'язування геометричної задачі векторним методом. У даній темі доречнішим є демонстрація застосування теорії векторів для розв'язування задач не на безпосереднє використання понять та теорем, а краще демонструвати прикладне застосування даної теорії, наприклад, для розв'язування такої задачі: «Доведіть, що для будь-яких чисел a, b, c, a_1, b_1 і c_1 виконується нерівність:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \geq \sqrt{(a+a_1)^2+(b+b_1)^2+(c-c_1)^2}.»$$

Для розв'язування такої задачі достатньо ввести до розгляду вектори $\vec{x}(a;b;c)$, $\vec{y}(a_1;b_1;c_1)$, $\overline{-y}(-a_1;-b_1;-c_1)$ і знайти їх суми: $\vec{x}+\vec{y}$, : $\vec{x}+(\overrightarrow{-y})$. Тоді корені, задані в умові задачі дорівнюють модулям цих векторів.

Задача 2.11. Дано вершини трикутника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Визначити внутрішній кут при вершині A.

Розв'язання. Дана задача має декілька варіантів розв'язування. Можна скористатися теоремою косинусів, знайшовши довжини сторін; а можна ввести вектори по сторонах трикутника і використати формулу скалярного добутку векторів. Необхідно учням запропонувати сформувати різні варіанти розв'язування задачі та провести їх, порівнюючи способи з точки зору доступності та швидкості в отримані результату.

$\overrightarrow{AB}(5-3;1-2;-1+3)$, $\overrightarrow{AB}(2;-1;2)$.

$\overrightarrow{AC}(1-3;-2-2;1+3),\ \overrightarrow{AC}(-2;-4;4).$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4+4+8=8$

$$\overrightarrow{AB}=\sqrt{4+1+4}=3,\overrightarrow{AC}=\sqrt{4+16+16}=9,$$

$$cosA=\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|},\qquad cosA=\frac{8}{3\cdot 9}=0{,}296$$

Кут A=73^0.

Задача 2.12. У квадраті з однієї вершини проведено дві прямі, які ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут між цими прямими.

Розв’язання. Нехай дано квадрат *АВСД* зі стороною *АВ=а*. Введемо ПДСК так, щоб початок координат був у вершині *А*, з якої проведено задані дві прямі *АМ* та *АР*. Вісі координат спрямуємо відповідно по стороні *АВ* – вісь *Оу*, по стороні *АС* – вісь *Ох*. Тоді вершини квадрата будуть мати координати: $A(0;0)$, $B(0;a)$, $C(a;a)$, $Д(a;0)$. Точки *М* і *Р* – середини відрізків *ВС* і *СД* відповідно матимуть координати $M(a/2;\ a)$, $P(a;a/2)$.

Задамо вектори $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{AP}$ відповідно: $\overrightarrow{AM}(\frac{a}{2};a)$, $\overrightarrow{AP}\left(a;\frac{a}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AM}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2},\overrightarrow{AP}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos(MAP)=\frac{\overrightarrow{AM}\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AP}|},\cos(MAP)=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}{\frac{5a^2}{4}}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

Кут *МАР*=37^0.

Задача 2.13. Точки *М* і *N* – середини ребер AA_1 і *АД* куба $АВСДA_1B_1C_1Д_1$. Точка *О* – центр грані $CC_1Д_1Д$. Доведіть, що прямі *МО* і B_1N перпендикулярні.

Розв’язання. Виконаємо рисунок (рис.2.13). Із рисунка не зрозуміло з чого почати. Тому звертаємо увагу учнів на вимогу задачі: довести перпендикулярність прямих. Якщо це перекласти на мову векторів, то значить довести, що скалярний добуток векторів $\overrightarrow{MO}$ та $\overrightarrow{B_1N}$ рівний нулю.

Тож введемо до розгляду вектори, спрямувавши їх по ребрах куба $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AД}$, $\overrightarrow{AВ}$.

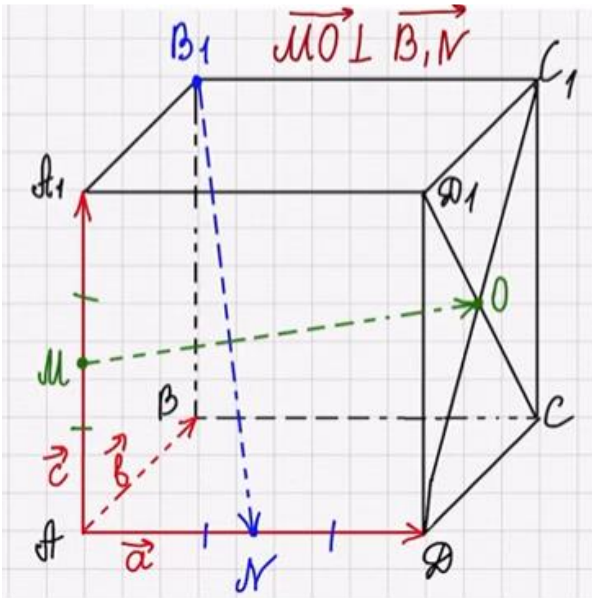


Рис.2.13. Ілюстрація до задачі 2.13.

Виразимо необхідні нам вектори через відомі (рис.2.14).

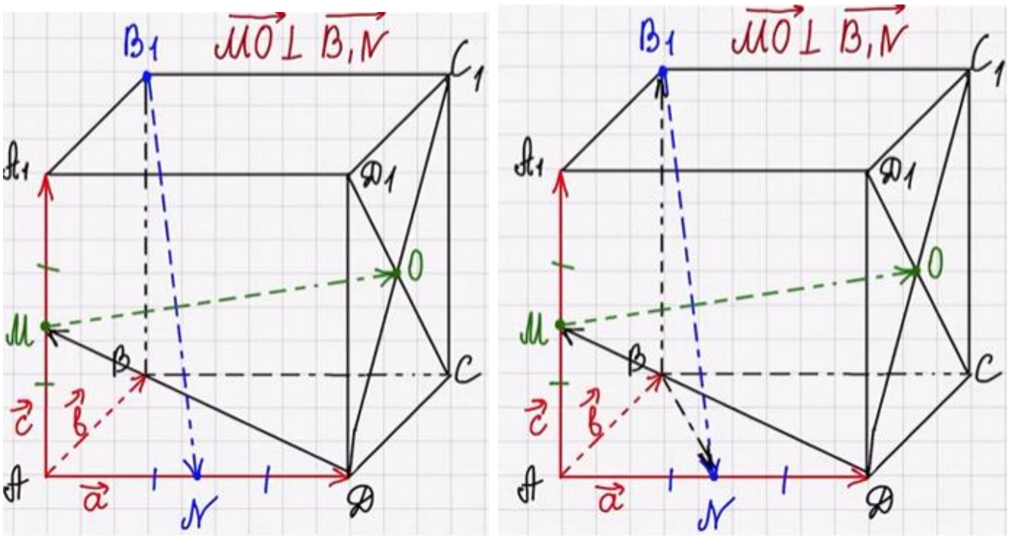


Рис.2.14. Ілюстрація до задачі 2.13.

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ДО} - \overrightarrow{ДМ} = 0{,}5\overrightarrow{ДС_1} - \left(\overrightarrow{АМ} - \overrightarrow{АД}\right) = 0{,}5\overrightarrow{ДС_1} - \left(0{,}5\overrightarrow{АА_1} - \overrightarrow{АД}\right) =$$

$$= 0{,}5\left(\overrightarrow{АА_1} + \overrightarrow{АВ}\right) - 0{,}5\overrightarrow{АА_1} + \overrightarrow{АД} = 0{,}5\overrightarrow{АВ} + \overrightarrow{АД} = 0{,}5\vec{b} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{B_1N} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AN} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\right) = 0{,}5\overrightarrow{AД} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} =$$

$$= 0{,}5\overrightarrow{АД} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = 0{,}5\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

Знайдемо скалярний добуток.

$$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{B_1N}=\left(0{,}5\vec{b}+\vec{a}\,\right)\left(0{,}5\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)=0{,}25\vec{b}\vec{a}-0{,}5\left|\vec{b}\right|^2-0{,}5\vec{b}\vec{c}+$$

$$+0{,}5|\vec{a}|^2-\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}=-0{,}5\left|\vec{b}\right|^2+0{,}5|\vec{a}|^2=-0{,}5\left|\vec{b}\right|^2+0{,}5\left|\vec{b}\right|^2=0,$$

(оскільки вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – ребра куба, то їх скалярний добуток рівний нулю, а довжини цих векторів однакові). Отже, вектори $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{B_1N}$ – взаємно перпендикулярні, отже і задані прямі *MO* і B_1N перпендикулярні, що й потрібно було довести.

Задача 2.14. Основою тетраедра *ДАВС* є прямокутний трикутник *АВС*. Точка *N* – середина гіпотенузи *АВ*. Медіани трикутника *АДС* перетинаються в точці *М*. На прямій *СД* позначили точку *К* так, що прямі *ВМ* і *КN* перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка *СК*, якщо відомо, що кут *ДСА*=*ДСВ*=60^0, *СВ*=*СД*=2 см, *СА*=1 см.

Розв’язання. Виконаємо рисунок (рис.2.15).

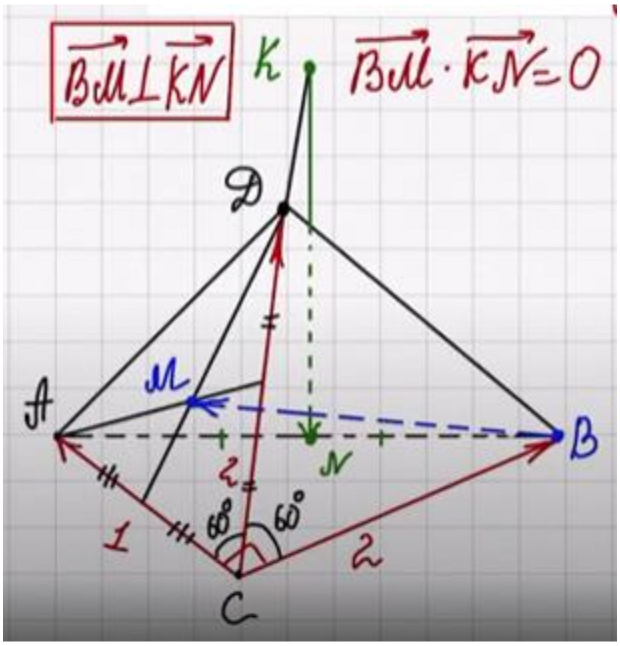


Рис.2.15. Ілюстрація до задачі 2.14

Звертаємо увагу учнів на перпендикулярність відрізків *ВМ* і *КN*, а отже й вектори $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{KN}$ є перпендикулярними, а отже, їх скалярний добуток рівний нулю.

З умови задачі невідомо, де лежить точка *К*, тому запишемо умову належності точки *К* до прямої *СД*: $\overrightarrow{\text{СК}}=\propto\overrightarrow{\text{СД}}$.

Розкладемо вектори за базисними векторами, за які ми візьмемо ребра тетраедра *СА* і *СВ*, оскільки нам відомі їх довжини та кут між ними.

$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CN} - \propto \overrightarrow{CД} = 0{,}5(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) - \propto \overrightarrow{CД} = 0{,}5\overrightarrow{CA} + 0{,}5\overrightarrow{CB} - \propto \overrightarrow{CД}$

М – точка перетину медіан, *В* – довільна точка простору, то:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BД} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CД} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CД}$$

Знайдемо скалярний добуток:

$$\overrightarrow{BM}\,\overrightarrow{KN} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CД}\right)\left(0{,}5\overrightarrow{CA} + 0{,}5\overrightarrow{CB} - \propto \overrightarrow{CД}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}|\overrightarrow{CA}|^2 + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} - \frac{\propto}{3}\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CД} - 0{,}5\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} - 0{,}5|\overrightarrow{CB}|^2 + \propto \overrightarrow{CB}\overrightarrow{CД} +$$

$$+ \frac{1}{6}\overrightarrow{CД}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CД}\overrightarrow{CB} - \frac{\propto}{3}|\overrightarrow{CД}|^2$$

$|\overrightarrow{CA}|^2 = 1,\quad \overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} = 1 * 2 * cos90 = 0,\quad \overrightarrow{CД}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\overrightarrow{CД} = 1 * 2 * cos60 = 1, |\overrightarrow{CB}|^2 = 4, \overrightarrow{CB}\overrightarrow{CД} = \overrightarrow{CД}\overrightarrow{CB} = 2 * 2 * cos60 = 2, |\overrightarrow{CД}|^2 = 4.$

$$\overrightarrow{BM}\,\overrightarrow{KN} = \frac{1}{6} - \frac{\propto}{3} - 2 + 2\propto + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{4\propto}{3}$$

$$\overrightarrow{BM}\,\overrightarrow{KN} = \frac{-4}{3} + \frac{\propto}{3}$$

За умовою вектори взаємно перпендикулярні, отже цей добуток рівний нулю:

$$\frac{-4}{3} + \frac{\propto}{3} = 0$$

$$\alpha=4$$

$$\overrightarrow{СК} = 4\overrightarrow{СД}, |\overrightarrow{СК}| = 4|\overrightarrow{СД}| = 4 * 2 = 8$$

Задача 2.15. Основою чотирикутної призми $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ є квадрат зі стороною *а*. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи та дорівнює 2*а*. Знайти кут і відстань між прямими $ДА_1$ і $СД_1$.

Розв’язання. Виконаємо рисунок і введемо базисні вектори (рис.2.16).

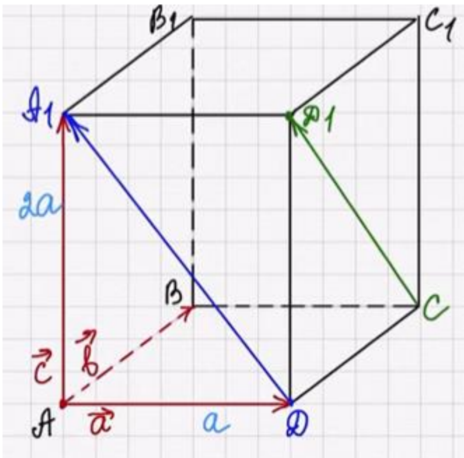


Рис.2.16. Ілюстрація до задачі 2.15

Почнемо з пошуку кута між мимобіжними прямими. Тому зведемо знаходження кута до знаходження кута між векторами $\overrightarrow{ДA_1}$ і $\overrightarrow{СД_1}$.

За теоремою Піфагора з трикутників $A_1AД$ і $Д_1ДC$ відповідно $СД_1=ДA_1=a\sqrt{5}$, таким чином знайшли модулі векторів $\overrightarrow{ДA_1}$ і $\overrightarrow{СД_1}$.

Розкладемо вектори за базисними векторами:

$$\overrightarrow{ДA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AД} = \vec{c} - \vec{a},\ \overrightarrow{СД_1} = \overrightarrow{ДД_1} - \overrightarrow{ДС} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{ДA_1}\overrightarrow{СД_1} = (\vec{c} - \vec{a})\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = |\vec{c}|^2 - \vec{c}\vec{b} - \vec{a}\,\vec{c} + \vec{a}\vec{b} = |\vec{c}|^2 = 4a^2$$

$$cos \propto = \frac{4a^2}{a\sqrt{5}a\sqrt{5}} = \frac{4}{5},\ \alpha = arccos0{,}8.$$

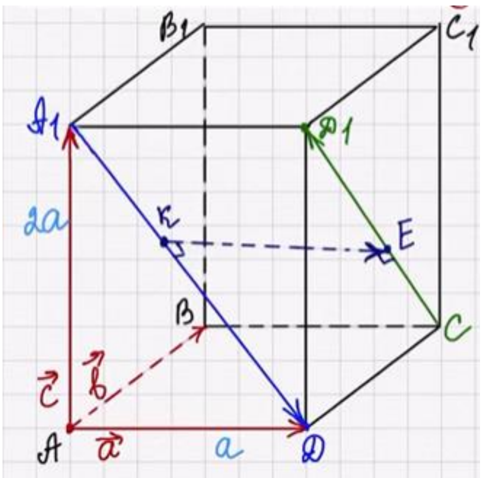


Рис.2.17. Ілюстрація до задачі 2.15

Проведемо спільний перпендикуляр до прямих KE (рис.2.17), ми не знаємо положення точок, але можемо записати умову належності точки до прямої: $\overrightarrow{\text{КД}} = \propto \overrightarrow{\text{А}_1\text{Д}}$, $\overrightarrow{\text{СЕ}} = \beta\overrightarrow{\text{СД}_1}$. $\overrightarrow{\text{КЕ}}$ перпендикулярний $\overrightarrow{\text{СД}_1}$, $\overrightarrow{\text{КЕ}}$ перпендикулярний $\overrightarrow{\text{ДА}_1}$.

$$\overrightarrow{\text{КЕ}} = \overrightarrow{\text{КД}} + \overrightarrow{\text{ДС}} + \overrightarrow{\text{СЕ}} = \propto \overrightarrow{\text{А}_1\text{Д}} + \overrightarrow{\text{ДС}} + \beta\overrightarrow{\text{СД}_1} = \propto \left(\overrightarrow{\text{АД}} - \overrightarrow{\text{АА}_1}\right) + \overrightarrow{\text{ДС}} +$$
$$+\beta\left(\overrightarrow{\text{ДД}_1} - \overrightarrow{\text{ДС}}\right) = \alpha(\vec{a} - \vec{c}) + \vec{b} + \beta\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + (1-\beta)\vec{b} + (\beta - \alpha)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\text{КЕ}}\overrightarrow{\text{ДА}_1} = \left(\alpha\vec{a} + (1-\beta)\vec{b} + (\beta-\alpha)\vec{c}\right)(\vec{\text{c}} - \vec{a}) = -\propto |\vec{a}|^2 + (\beta-\alpha)|\vec{c}|^2 =$$
$$= -\propto |\vec{a}|^2 + (\beta - \alpha)4a^2 = 4\beta a^2 - 5\alpha a^2 = 0$$
$$a^2 \neq 0, 4\beta - 5\alpha = 0, 5\alpha = 4\beta.$$

$$\overrightarrow{\text{КЕ}}\overrightarrow{\text{СД}_1} = \left(\alpha\vec{a} + (1-\beta)\vec{b} + (\beta-\alpha)\vec{c}\right)\left(\vec{\text{c}} - \vec{b}\right) = -(1-\beta)|b|^2 + (\beta-\alpha)|\vec{c}|^2$$
$$= (\beta - 1)a^2 + (\beta-\alpha)4a^2 = 0$$
$$a^2 \neq 0, \beta - 1 + 4\beta - 4\alpha = 0, \qquad 5\beta - 4\alpha - 1 = 0$$

Маємо систему: $5\beta - 4\alpha - 1 = 0, 5\alpha = 4\beta$

$\propto = \frac{4}{9}, \beta = \frac{5}{9}$

$$\overrightarrow{\text{КЕ}} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}$$

$$\left|\overrightarrow{KE}\right| = \sqrt{\overrightarrow{KE}^2} = \sqrt{(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c})^2} = \frac{2}{3}a$$

У даній темі доцільно розглянути такі допоміжні задачі.

1) (правило чотирьох точок). Якщо задано чотири точки *А,В,С,Д*, які не лежать в одній площині, то сума скалярних добутків векторів:

$$\overrightarrow{\text{ДА}}\overrightarrow{\text{ВС}} + \overrightarrow{\text{ДВ}}\overrightarrow{\text{СА}} + \overrightarrow{\text{ДС}}\overrightarrow{\text{АВ}} = 0$$

Причому на прямі *ДА* і *ВС*, *ДВ* і *СА*, *ДС* і *АВ* можна дивитися як на мимобіжні ребра тетраедра.

2) Якщо точки *N* і *M* – середини відрізків *АВ* і *СД* відповідно, то справедлива рівність: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ДА}} + \overrightarrow{\text{СВ}})$.

2.4. Пряма лінія на площині і в просторі, площина

Оскільки під час координатного методу геометричні фігури задаються за допомогою рівнянь, то виникає потреба в введенні поняття «рівняння фігури» (табл.2.1.)

Таблиця 2.1.

Поняття «рівняння фігури»

Підручники 9 клас	Підручники 10 клас
Бевз Г. [3] «Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури, і тільки координати точок даної фігури».	Бевз Г. [2]: «Рівнянням фігури називають таке рівняння, яке задовольняють координати будь-якої точки даної фігури і тільки точки даної фігури».
Істер О. [13] «Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними *x* та *y*, якщо виконуються такі дві умови: координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння; будь-яка пара чисел (*x,y*), що задовольняє це рівняння є координатами деякої точки фігури.	Істер О. [14;15]: «Рівняння з трьома змінними *x, y, z* називають рівнянням фігури, якщо справджуються дві умови*:* координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння; будь-яка трійка чисел виду (*x, y, z*), що задовольняє рівняння, є координатами деякої точки фігури».
Мерзляк А. [32] «Рівнянням фігури, заданої на площині *xy*, називають рівняння з двома змінними *x* та *y,* яке має такі властивості: якщо точка належить фігурі, то її координати є розв'язком даного рівняння; будь-який розв'язок (*x,y*) даного рівняння є координатами точки, яка належить фігури.	Мерзляк А. [31; 30]: «Рівнянням фігури *F*, заданої в координатному просторі *xyz,* називають рівняння з трьома змінними *x, y, z*, яке має такі властивості: якщо точка належить фігурі, то її координати *M*(*x, y, z*) є розв'язком даного рівняння; будь-який розв'язок (*x, y, z*) даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі *F*».
Бурда М. [7] «Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними *x* та *y*, якщо виконуються такі дві умови: координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння; будь-яка пара чисел (*x,y*), що задовольняє це рівняння є координатами деякої точки фігури».	
Дається правило: щоб встановити, що в даній системі координат фігуру задано певним рівнянням, потрібно довести два взаємно обернені твердження: 1) якщо точка належить фігурі, то її координати задовольняють рівняння фігури; 2) якщо координати деякої точки задовольняють рівняння фігури, то ця точка належить фігурі.	

Загальне рівняння прямої на площині Істер О. і Бевз Г. виводять через серединний перпендикуляр до відрізка: $ax+by+c=0$, a, b, c – числа, a, b одночасно не рівні нулю. З даного рівняння отримують рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $(-a\backslash b)=k$, $c\backslash b=p$, $y=kx+p$, та умови паралельності й перпендикулярності прямих.

А далі Істер О. виводить рівняння прямої, що проходить через дві задані точки через знаходження тангенса одного і того ж кута з двох подібних трикутників (у Бевз Г. це рівняння подається як додаткова інформація і виводиться рівняння прямої у відрізках на осях).

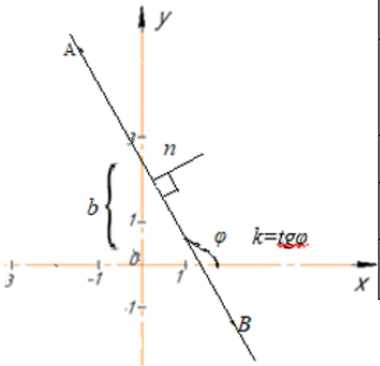
Мерзляк А. пропонує дещо інший підхід. Для виведення рівняння прямої він використовує ГМТ рівновіддалених від двох даних точок і доводить теорему: «рівняння прямої має вигляд $ax+by=c$, де a, b, c – числа, a, b одночасно не рівні нулю». Аналіз різних варіантів зводиться до таблиці. Далі розглядається поняття кутового коефіцієнту та доводиться теорема щодо паралельності прямих.

Інший підхід має підручник Бурди М. Він починає розгляд рівнянь прямої з прямої з кутовим коефіцієнтом. А потім виводяться інші рівняння прямої (рис.2.18).

Назва виду рівняння прямої	Рівняння прямої	Особливості рівняння прямої
Загальне рівняння прямої	$ax+by+c=0$	a, b і c — числа, які одночасно не дорівнюють нулю
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ — точки, через які проходить пряма
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y=kx+b$	k — кутовий коефіцієнт, b — відрізок на осі OY
Рівняння прямої, що проходить через початок координат	$y=kx$	k — кутовий коефіцієнт

Рис.2.18 Ілюстрація з підручника Бурда М. [7]

Як бачимо є розходження у кількості рівнянь прямої, що пропонуються учням. Ми вважаємо, що доречним є введення усіх видів, оскільки їх легко отримати одне з одного і їх знання полегшує розв’язування деяких задач. Матеріал можна зібрати в один рисунок (рис.2.19).



Назва	Чим задається	Рівняння
Загальне	Точкою $A(x_A, y_A)$, перпендикулярною прямою $n(a,b)$	$ax+by+c=0$ $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
З кутовим коефіцієнтом	Кутом нахилу прямої до додатнього напрямку осі Ox: $k=tg\varphi$, відрізком, що відтинається прямою на осі Oy від початку координат: b	$y=kx+b$
З кутовим коефіцієнтом	Точкою $A(x_A, y_A)$, кутом нахилу прямої до додатнього напрямку осі Ox: $k=tg\varphi$	$y=k(x-x_A)+y_A$
З кутовим коефіцієнтом	Загальним рівнянням $ax+by+c=0$ $(k=-\frac{a}{b})$	$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$
Проходить через дві точки	Точками $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$,	$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

Взаємне розміщення прямих	Вид прямої	Умова
Паралельні	$y=k_1x+b_1$	$k_1=k_2$
Перпендикулярні	$y=k_2x+b_2$	$k_1=-\frac{1}{k_2}$

Рис.2.19. Види рівнянь прямої, їх взаємне розміщення

Про рівняння прямої в просторі розкрито лише у підручнику Бевз Г. [2] у рубриці «Для допитливих». Тут є рівняння прямої як перетин двох площин, рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (виводиться за допомогою подібності трикутників), канонічне рівняння прямої (отримують із попереднього), із канонічного рівняння отримують параметричне рівняння прямої.

Рівняння площини у підручниках Мерзляк А. та Нєліна Є. подається через доведення теореми: «Рівняння площини має вигляд $ax+by+cz+d=0$, де a, b, c, d – деякі числа, причому a, b, c не дорівнюють нулю одночасно». Вони за допомогою задачі виводять формулу для знаходження відстані від точки до площини: «*Задача*. Доведіть, що відстань від точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до площини, заданої рівнянням $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, можна обчислити за формулою:

$$\rho=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Істер О. вводить рівняння площини описово: «Вектором нормалі до площини називають будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний до даної площини. Площину у просторі задають рівнянням вигляду: $Ax+By+Cz+D=0$ (загальне рівняння площини), де A, B, C, D – числа, причому A, B, C одночасно не дорівнюють нулю». У цьому ж підручнику вводиться *кут між площинами* у вигляді задачі (тоді як Нєлін Є. вводить це як теоретичний матеріал): «*Задача.* Доведіть, що косинус кута між площинами заданими рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ можна знайти за формулою: $cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$».

Розглянемо приклади завдань на дану тему, зокрема комплексних.

Задача 2.16. Знайти кути трикутника, сторони якого задані рівняннями: $5x$-$2y$-11=0, x+$2y$+5=0, x-$2y$+1=0.

Розв’язання. Дану задачу можна розв’язувати графічно (визначити вершини трикутника, знайти довжини сторін і скористатися, наприклад, теоремою косинусів (можна скористатися графічним редактором Desmos)), можна визначити координати векторів нормалі заданих прямих і знайти кути за формулою $cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

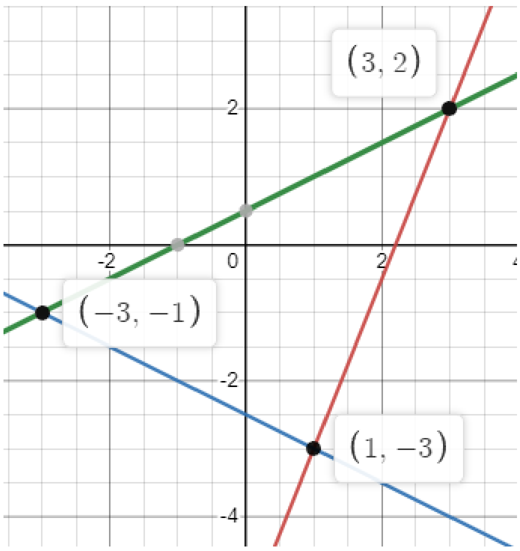


Рис. 2.20. Ілюстрація до задачі 2.16

Задача 2.17. Знайти проєкцію точки M(-6, 5) на пряму, що проходить через точки C(2, -3) та $Д$(-5,1).

Розв’язання. Дану задачу можна розв’язувати графічно, побудувавши точки у системі координат та пригадавши, що проєкцією точки на площину є основа перпендикуляра, проведеного з даної точки на площину (рис.2.21). Або розв’язати задачу аналітично, склавши план: 1) скласти рівняння прямої, що проходить через точки C і $Д$ (слід скористатися або рівнянням з кутом коефіцієнтом, або, якщо діти вчили, то рівнянням прямої, що проходить через дві точки (як ми зазначали вище, дане рівняння спрощує розв'язування багатьох задач); 2) скласти рівняння прямої перпендикулярної до знайденої прямої *СД* (тут використовуємо знання про зв'язок кутових коефіцієнтів двох взаємно перпендикулярних прямих); 3) знайти точку перетину знайдених прямих – шукана точка.

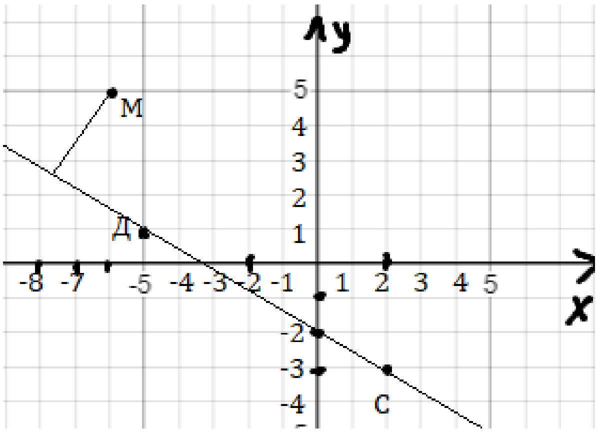


Рис.2.21. Ілюстрація до задачі 2.17

$y = kx + b, \begin{cases} -3 = 2k + b \\ 1 = -5k + b \end{cases}$, -4=7$k$, k=-4/7, b=-3+8/7=-13/7

y= -4x/7-13/7 пряма *СД*

k_1=7/4, y=7/4(x+6)+5, y=7x/4+31/2

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{7}x - \frac{13}{7} \\ y = \frac{7}{4}x + \frac{31}{2} \end{cases}, \begin{cases} 4x + 7y = -13 \\ -7x + 4y = 62 \end{cases}, y(49 + 16) = -91 + 248,$$

$$y = \frac{157}{65} = 2{,}415$$

$$x = \frac{-13 - \frac{157 * 7}{65}}{4} = \frac{-845 - 1099}{4 * 65} = \frac{-1944}{4 * 65} = -\frac{486}{65} = -7{,}477$$

Проєкція точки *M* має координати (-7,477; 2,415). Переконатися у правильності можна за допомогою програми Desmos (рис. 2.22).

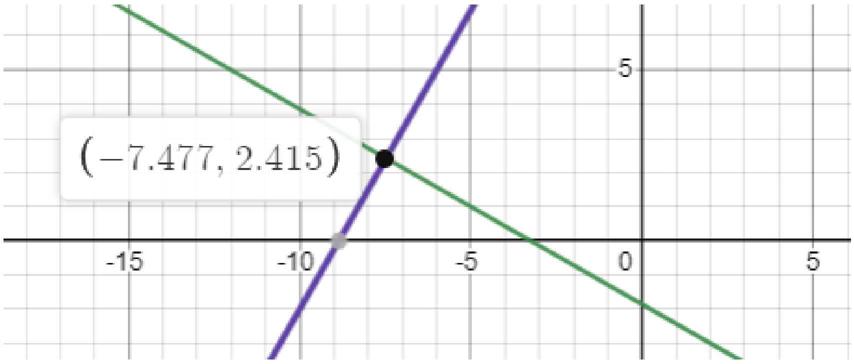


Рис.2.22. Розв'язок задачі 2.17

Ця задача дає можливість повторити декілька теоретичних положень та продемонструвати різні варіанти щодо способу знаходження відповіді.

Цікавими є задачі приладного змісту – яскравий приклад застосування даної теми до реалій життя [23].

Задача 2.18. Монополіст, знаючи з маркетингових досліджень функції попиту на свій товар Q=10-0,6р, вирішує скільки йому виробляти товару. Допоможіть монополісту:

а) розрахувати кількість товару при ціні p_1=5 грош.од., p_2=6 грош.од.

б) розрахувати ціну товару, якщо він хоче виробити товару у кількості Q_1=5,8 млн.шт, Q_2=7 млн.шт. Зобразіть графічно.

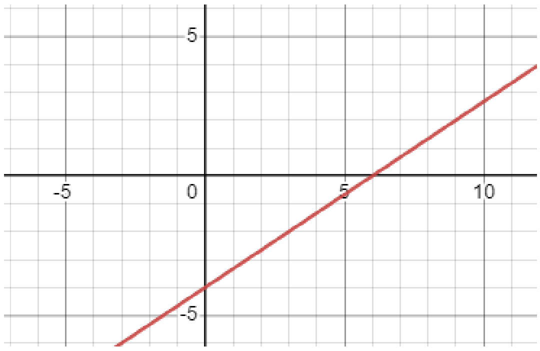
Задача 2.19. Рівняння падаючого променю точкового джерела світла на вісь Ox $2x$-$3y$-12=0. Знайти рівняння відбитого променю (тут учням знадобляться знання з фізики: як розташовані падаючий промінь і відбитий, що кут падіння дорівнює куту відбивання).

Розв'язання. Виконаємо рисунок. Зобразимо пряму, що задає падаючий промінь у ПДСК (рис.2.23 а)). Знаходимо точку перетину з віссю Ox – це буде точка відбиття. У дану точку потрібно провести перпендикуляр. І відкласти від перпендикуляра кут рівний куту падіння, який легко знайти із рівняння або із графіка (рис.2.23 б)).

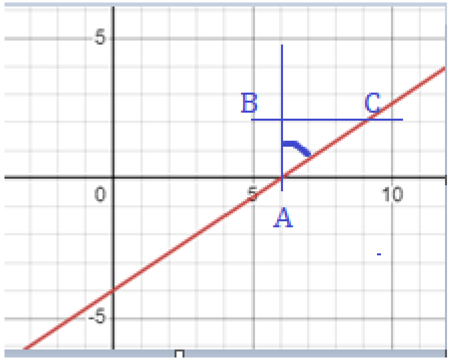
1) З рівняння прямої $y=2x/3-4$, $k=tga=2/3$, $a=arctg(2/3)=33{,}7^0$.

2) З трикутника ABC: AB=2, BC=3, тоді $tga=BC/AB=2/3$, $a=33{,}7^0$.

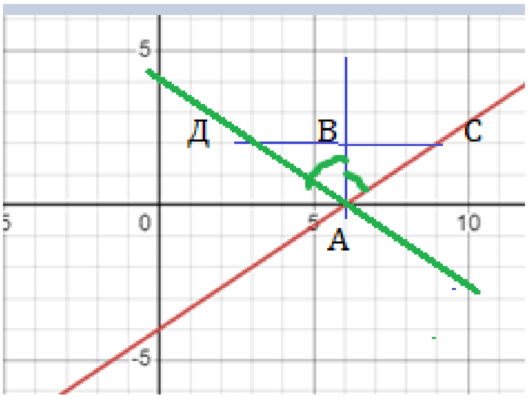
Отже, кут відбивання теж буде $33{,}7^0$, що легко побудувати (рис.2.23 в), відклавши точку $Д$, координати якої будуть (3;2).



а)



б)



в)

Рис.2.23. Ілюстрація до задачі 2.19

Можна записати рівняння *АД*, виходячи з рисунка: *А*(6;0) і *Д*(3;2):

$y = kx + b, \begin{cases} 0 = 6k + b \\ 2 = 3k + b \end{cases}$, 2=-3*k*, *k*= -2/3, *b*= 6*2/3= 4.

y= -2*x*/3+4, 2*x*+3*y*-12=0 - пряма *АД* – відбитий промінь.

Задача 2.20. Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу (*y*) залізничним та автомобільним транспортом на відстань (*x*) знаходяться за формулами: *y*=-*x*+10 та *y*=*x*+6, де (*x*) вимірюється сотнями км. Визначити рентабельність транспортного постачання.

Розв’язання. Побудуємо графіки заданих прямих і проаналізуємо їх.

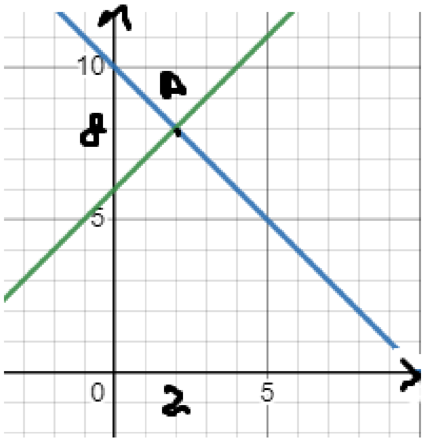


Рис.2.24. Ілюстрація до задачі 2.20

Точку перетину можна знайти графічно та перевірити її аналітично:

$$\begin{cases} -x+10=y \\ x+6=y \end{cases}, \begin{cases} -x+10=y \\ 16=2y \end{cases}, \begin{cases} -x+10=8 \\ 8=y \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}.$$

Графіки витрат приводять до висновків:

а) коли x є [0; 2], тобто x<200 км, транспортні витрати перевезення автомобілем нижче витрат перевезення залізничним транспортом;

б) коли x є [0; 2], тобто x>200 км, транспортні витрати перевезення залізничним транспортом нижче витрат перевезення автомобілем.

Розглянемо задачі, для розв'язування яких використовується теорія площин та прямої лінії у просторі.

Задача 2.21. Основою піраміди *MABCD* є прямокутник *ABCD*. Ребро *MA* перпендикулярне до площини основи. Відомо, що *AB* = 3 см, *AD* = 4 см і *AM* = 2 см. Площина, яка перпендикулярна до ребра *MC* і проходить через його середину, перетинає прямі *AB* і *AD* у точках *K* і *P* відповідно. Знайдіть відрізок *KP* [30, №19.44].

Розв'язання. Виконаємо рисунок. Оскільки у піраміди ребра *AM, AB* та *AD* взаємно перпендикулярні, то введемо систему координат так, що початок координат буде в точці *A*, вісь *Ox* спрямуємо по ребру *AD*, вісь *Oy* – *AB*, вісь *Oz* – *AM* (рис.2.25). Тоді вершини тетраедра будуть мати координати: *A*(0; 0; 0), *M*(0;0;2), *B*(0;3;0), *D*(4;0;0), *C*(4;3;0) (на цьому етапі ми повторюємо можливість введення ПДСК, координати точок, які лежать на осі координат та у певній координатній площині).

Складемо рівняння площини, яка перпендикулярна до *MC* (отже, *MC* є вектором нормалі цієї площини, $\overrightarrow{MC}(4;\ 3; -2)$) і проходить через її середину точку *T*(2; 1,5; 1): 4(*x*-2)+3(*y*-1,5)-2(*z*-1)=0, 4*x*+3*y*-2*z*-10,5=0 (вміння складати рівняння площини, знаходження середини відрізка).

Знайдемо точки *P* і *K* як перетин знайденої площини з осями координат *Ox* та *Oy* відповідно (перетин площини з осями координат).

Ox: *y*=0, *z*=0, 4*x*-10,5=0, *x*=10,5:4=2,625, тоді точка *P*(2,625;0;0).

Oy: *x*=0, *z*=0, 3*y*-10,5=0, *y*=10,5:3=3,5, тоді точка *K*(0;3,5;0).

Знайдемо відстань між точками *KP* (знаходження відстані між точками):

$$KP = \sqrt{2{,}625^2 + (-3,5)^2 + 0} = 4{,}375$$

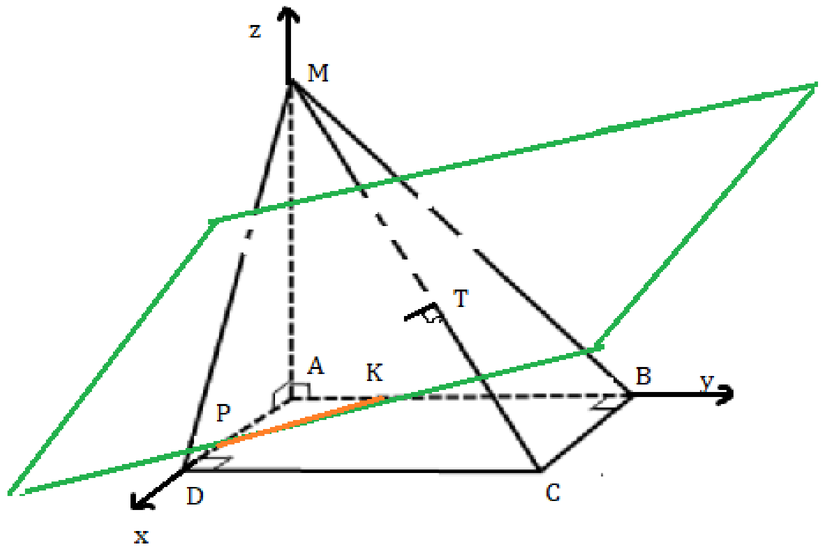


Рис.2.25 Ілюстрація до задачі 2.21.

Така задача є яскравим прикладом поєднання теоретичних відомостей з методу координат, рівняння площини та демонструє використання координатного методу до стереометричної задачі, в якій відсутня вказівка на його використання, крім того, роблячи рисунок до задачі формується просторове уявлення у здобувачів освіти.

Задача 2.22 У трикутній піраміді *SABC* ребра *SA*, *SB* та *SC* взаємно перпендикулярні та рівні відповідно *a*, *b*, *c*. Знайти довжину ребра куба, вписаного в цю піраміду, знаючи, що три грані куба належать граням піраміди.

Розв’язання. Виконаємо рисунок. Оскільки у піраміди ребра *SA, SB* та *SC* взаємно перпендикулярні, то введемо систему координат так, що початок координат буде в точці *S*, вісь *Ox* спрямуємо по ребру *SA*, вісь *Oy* – *SB*, вісь *Oz* – *SC* (рис.2.26). Тоді вершини тетраедра будуть мати координати: *S*(0; 0; 0), *A*(*a*;0;0), *B*(0;*b*;0), *C*(0;0;*c*).

Для знаходження ребра куба потрібно визначити координати вершини куба, що лежить у площині (*ABC*). Нехай *K*(*l, l, l*). Координати цієї точки задовольняють рівняння площини. Складемо це рівняння.

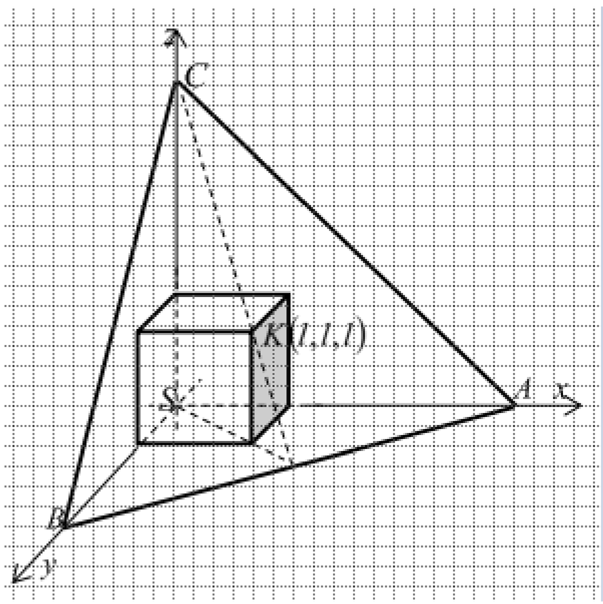


Рис.2.26. Ілюстрація до задачі 2.25.

Загальне рівняння площини *Ax*+*By*+*Cz*+*D*=0, точки *A, B, C* належать цій площині, тож маємо систему:

$$\begin{cases} Aa + B*0 + C*0 + D = 0 \\ A*0 + Bb + C*0 + D = 0 \\ A*0 + B*0 + C*c + D = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} Aa + D = 0 \\ Bb + D = 0, \\ Cc + D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{-D}{a} \\ B = \frac{-D}{b}. \\ C = \frac{-D}{c} \end{cases}$$

Тоді рівняння площини (ABC): $\frac{-D}{a}x+\frac{-D}{b}y+\frac{-D}{c}z+D=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Оскільки точка K належить до площини, то підставимо її координати у рівняння площини (ABC):

$\frac{l}{a}+\frac{l}{b}+\frac{l}{c}=1, \frac{l(bc+ac+ab)}{abc}=1, l=\frac{abc}{bc+ac+ab}$ – довжина ребра куба.

До речі, цю задачу можна використати для введення рівняння площини у відрізках на осях, що значно полегшить розв’язування деяких типів задач, наприклад таких:

1. Скласти рівняння площини тетраедра, яка проходить через точку A(1;2;3) і відтинає від осей координат рівні відрізки.

2. У трикутній піраміді *SABC* ребра *SA*, *SB* та *SC* взаємно перпендикулярні та рівні відповідно *a*, *b*, *c*. Знайти радіус кулі, вписаної в цю піраміду.

3. Через сторону *AB* основи правильної чотирикутної піраміди *SABCD* проведено площину, яка проходить через середину ребра *SD*. Знайти відстань від вершини *S* до даної площини, якщо довжина сторони основи рівна *a*, а висота піраміди дорівнює *h*.

4. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 4. Площина проходить через діагональ *AC* і перетинає куб по трапеції *ACMN*. Знайти відстань від вершини *B* до даної площини, якщо $AN = 5$ [19].

2.5. Криві та поверхні

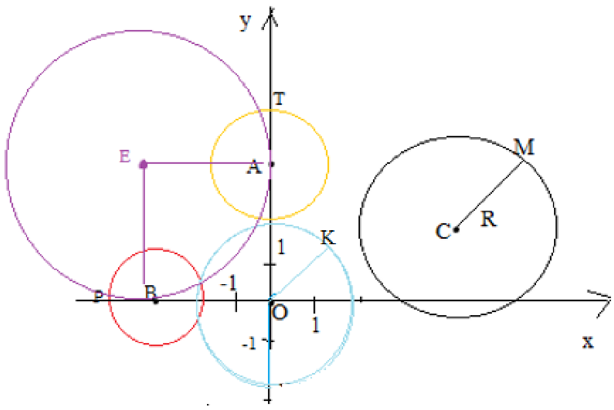
Рівняння кола. У жодному із підручників нема означення кола. Спираються на знання про цю фігуру, отриману з інших тем. На нашу думку, необхідно запропонувати учням сформувати означення кола. *Колом називається ГМТ площини рівновіддалених від фіксованої точки – центра кола на задану відстань – радіус.*

Істер О.[13], Бевз Г. [3] виводять рівняння кола з центром у точці $O(a,b)$ і радіусом r як відстань від точки до центра кола: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Тоді як у підручниках Мерзляк А. [32], Бурда М. [7] подається як теорема:

«*Рівняння кола радіуса R з центром у точці A* (a,b) *має вигляд:* $(x\text{-}a)^2+(y\text{-}b)^2=R^2$»

Бурда М. як додаткову інформацію – знайомить з еліпсом.

Після отримання рівняння кола з центром в точці $O(a,\ b)$ доречно «погратися» з різними розташуваннями кола. Перенести центр у початок координат і отримати нове рівняння. Далі змінити положення кола: центр розмістити на осі Oy, на осі Ox. Коло дотикається до осей координат. У результаті аналізу таких різних положень кола, можна скласти наступний конспект з теми (рис.2.27).



Колір кола	Центр	Радіус	Рівняння кола
чорний	$C(x_c,\ y_c)$	$\mathrm{CM} = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2}$	$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \mathrm{CM}^2$
синій	$O(0,\ 0)$	$OK = \sqrt{(x_K)^2 + (y_K)^2}$	$x^2 + y^2 = \mathrm{OK}^2$
червоний	$B(x_B,\ 0)$	$BP = \lvert x_P - x_B \rvert$	$(x - x_B)^2 + y^2 = BP^2$
жовтий	$A(0,\ y_A)$	$AT = \lvert y_T - y_A \rvert$	$x^2 + (y - y_A)^2 = AT^2$
фіолетовий	$E(x_E,\ y_E)$	$R=\lvert x_E\rvert$ *або* $R=\lvert y_E\rvert$	$(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 = x_E^2$

Рис.2.27. Розташування кола та його рівняння

Задача 2.26. На координатній площині Oxy задано коло, яке дотикається до прямих x=2, x=6 та осі Ox (рис.2). Скласти рівняння кола.

Розв’язання. Проаналізуємо рисунок. Для створення рівняння кола потрібно знати його центр та радіус. Як знайти радіус? (це буде половина відстані між дотичними прямими). r=|6-2|/2=2.

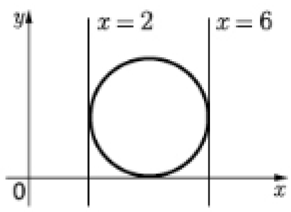


Рис.2. 28. Ілюстрація до задачі 2.26

Центр кола теж лежить між дотичними і є серединою відрізка з координатами (2;y) та (6;y). Тоді x=(6+2)/2=4. Для знаходження координати y потрібно врахувати, що діаметр кола дорівнює 4 та коло дотикається осі Ox, тобто центр – середина відрізка з координатами (4;0) та (4;4), отже, y=(4+0)/2=2. Отримали, що центр кола C(4;2).

Маємо рівняння кола: $(x-4)^2+(y-2)^2=4$.

Під час вивчення даної теми слід звернути увагу учнів на те, як визначити за загальним рівнянням – рівняння кола (сфери) та навчити їх зводити таке рівняння до канонічного виду. Тут потрібно зупинитися на таких властивостях такого рівняння: 1) це рівняння другого порядку для всіх невідомих; 2) коефіцієнти при квадратах невідомих однакові; 3) у рівнянні відсутній добуток біжучих координат.

Задача 2.27. У прямокутній системі координат на площині Oxy навколо трикутника ABC описано коло, задане рівнянням $x^2+y^2-4x=68$. Визначте довжину сторони BC, якщо кут $A=45^0$.

Розв'язання. Проаналізуємо умову задачі. Фактично заданим є трикутник вписаний у коло, вид цього трикутника нам невідомий. Центр і радіус кола теж невідомі, але їх легко знайти, якщо звести дане рівняння до канонічного виду.

$x^2-4x+4-4=(x-2)^2-4$

$(x-2)^2-4+y^2=68$

$(x-2)^2+y^2=64$

Отже, центр – точка K(2;0) і радіус R=8. Виконаємо рисунок.

Оскільки нам фактично відомо лише радіус описаного кола та кут трикутника, а шукаємо сторону, то потрібно скористатися теоремою синусів, яка поєднує ці величини: $BC/\sin A=2R$, $BC=2R\sin A$, $BC=16*\sin 45^0=8\sqrt{2}$.

Ця задача демонструє взаємозв'язок рівняння геометричної фігури та відомі теореми планіметрії. Розглянемо ще одну задачу із завдань ЗНО.

Задача 2.28. У ПДСК на Oxy задано прямокутний трикутник ACB (кут $C=90^0$). Коло з центром у точці A задане рівнянням $x^2+y^2+6x-4y=12$, проходить через вершину C. Сторона AC паралельна осі Oy, довжина сторони BC втричі більша за довжину сторони AC. Визначте координати вершини B, якщо вона лежить у першій координатній чверті.

Розв'язання. Проаналізуємо умову задачі. Для того, щоб зрозуміти умову потрібно виконати рисунок. Для цього потрібно отримати центр і радіус кола, а отже, потрібно звести загальне рівняння кола до канонічного виду.

$x^2+y^2+6x-4y=12$, $x^2+6x+y^2-4y=12$, $(x^2+6x+9)-9+(y^2-4y+4)-4=12$,

$(x+3)^2+(y-2)^2=25$, отже $R=5$, а центр кола – точка $A(-3;2)$.

Виконаємо рисунок (рис.2.29). За умовою AC паралельна осі Oy і точка C належить колу, тоді може бути два варіанти розташування точки C (тут потрібно з'ясувати чому ми обираємо лише одне положення з двох можливих? Кут C – прямий і точка B належить першій чверті – у такому висновку велику роль відіграє рисунок).

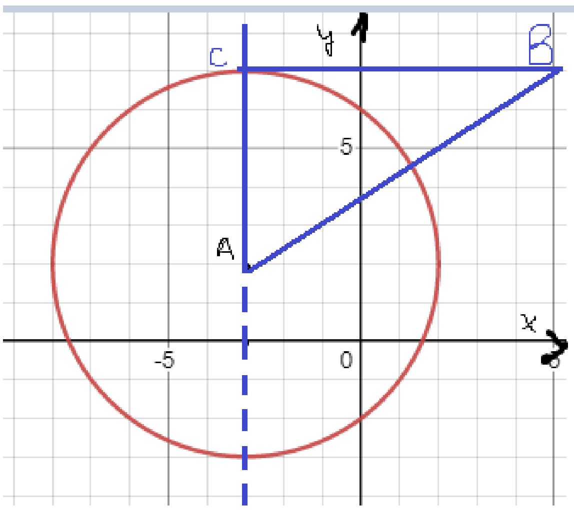


Рис.2.29. Ілюстрація задачі 2.28.

З рисунка можна знайти координати точки $C(-3; 7)$, довжину $AC=R=5$. Тоді сторона $BC=3*5=15$. Оскільки $BC \| Ox$, то ця відстань співпадає з модулем різниці абсцис точок C і B (ординати у них однакові $y_B=y_C=7$): $15=|x_B-(-3)|$, $15=|x_B+3|$, враховуючи, що за умовою абсциса точки B додатна, маємо: $x_B=12$. Отже, точка $B(12; 7)$.

ГМТ. У підручнику Істер О. [13;14;15] і частково у підручнику Мерзляк А. [29; 30; 31; 32] розглядаються геометричні місця точок (табл.2.2).

Таблиця 2.2.

ГМТ на площині і в просторі

На площині	В просторі
ГМТ рівновіддалені від даної точки на дану відстань – коло, радіус якого дорівнює даній відстані; ГМТ відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані – круг, радіус якого дорівнює даній відстані; ГМТ. Які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області, - бісектриса даного кута; ГМТ, які рівновіддалені від кінців відрізка, - серединний перпендикуляр до даного відрізка; ГМТ, які рівновіддалені від даної прямої на задану відстань, - дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від даної прямої.	ГМТ простору, рівновіддалених від двох заданих точок площини A і B, є площина, перпендикулярна до відрізка AB і така, що проходить через його середину. ГМТ простору, віддалених від даної площини на дану відстань, - дві площини, паралельні даній, кожна точка яких лежить на даній відстані від площин. ГМТ простору, рівновіддалених від двох паралельних площин, - площина, паралельна кожній з двох заданих, що проходить через середину їх спільного перпендикуляра. ГМТ простору, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються, - пара взаємно перпендикулярних площин, кожна з яких ділить навпіл двогранні кути, утворені даними площинами (бісекторні площини). ГМТ простору, рівновіддалених від усіх вершин плоского, вписаного в коло, многокутника, - пряма, перпендикулярна до площини цього многокутника, що проходить через центр описаного навколо цього кола. ГМТ простору, рівновіддалених від усіх сторін плоского, описаного навколо кола, многокутника, - пряма, перпендикулярна до площини многокутника, що проходить через центр вписаного в нього кола.

Із поверхнями у школі учні мають справу в 11 класі: циліндр, сфера, куля, конус.

Перш за все вводиться поняття відкритої фігури, обмеженої фігури, зв’язної фігури, які пов’язані з поняттям кулі.

Так, у підручнику Мерзляк Г. [30] вводиться поняття точки дотику фігури («точка, для якої куля із центром в цій точці містить щонайменше одну точку цієї фігури»), яке лежить в основі означення поняття поверхні –

множина точок, що є точками дотикання як для самої фігури, так і для фігури, яка складається з точок простору, що не належать фігурі.

У підручнику Мерзляк Г. [30] тілом є обмежена фігура, що є об'єднанням непорожньої зв'язної відкритої фігури та її поверхні. Тілом обертання є тіло, утворене в результаті обертання деякої плоскої фігури навколо прямої. У підручнику Істера О. [15] вводиться чітке означення тіла обертання - «геометричне тіло, перерізи якого площинами, перпендикулярними до деякої прямої (осі обертання), є кругами, центри яких лежать на цій прямій.

У підручнику Мерзляк Г. [30]: Циліндр як поверхня вводиться описово без чіткого означення (але саме введення поняття дуже близьке до того, що використовується в курсі аналітичної геометрії). І пропонується розглядати його як тіло, утворене обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін. У підручнику Мерзляк Г. [станд], Істер О. [проф.] циліндр означається як тіло обертання (описово).

У підручнику Мерзляк Г. [проф]: Конус теж вводять описово: результат з'єднання просторової точки, яка лежить на перпендикулярі до площини кола, з точками цього кола. Або як результат обертання прямокутного трикутника навколо одного із катетів. У підручнику Мерзляк Г. [29], Істер О. [15] конус означається як тіло обертання (описово).

У підручнику Мерзляк Г. [30]: Сферою називають геометричне місце точок простору, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу (у Істера О. [15] сфера подається як поверхня кулі і означається як поверхня, що складається з точок простору, які рівновіддалені від однієї і тієї ж точки). Кулею є ГМТ простору, відстані яких до заданої точки не більші за задане додатнє число (Істер О. – аналогічно). У підручнику Мерзляк Г. [29], Істер О. [15] куля означається як тіло обертання – результат обертання півкруга навколо прямої, що містить його діаметр (у Істера О. – круга), а сфера – півкола.

«Рівняння сфери радіуса r з центром у точці $A(a, b, c)$ має $(x-a)^2+(y-b)^2$-- $(z-c)^2=r^2$» - у підручнику Мерзляк А. – це теорема, у Бевз Г. – означення.

У навчальній програмі не передбачено вивчення рівнянь поверхонь обертання, але досліджується, що є результатом перетину їх різними площинами. Тому у класах з поглибленим вивченням математики можна у якості додаткових розглянути такого типу задачі.

Задача 2.29. Дослідити поверхню за допомогою методу перерізу:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$$

Розв'язання. Потрібно перетнути дану поверхню координатними площинами.

Oxy: $z=0$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$, перетворимо це рівняння і отримуємо рівняння кола $x^2+y^2=4$.

Oxz: $y=0$, $x^2=4$, $x=2$, $x=-2$ – дві паралельні осі Oz прямі.

Oyz: $x=0$, $y^2=4$, $y=2$, $y=-2$ – дві паралельні осі Oz прямі.

Перетнемо площиною, паралельною *Oxy:* $z=h$, отримуємо коло. Отже, дана поверхня – циліндр з твірними паралельними осі Oz.

Для розширення уявлення учнів про різноманітні поверхні можна запропонувати проєкт «Різні види поверхонь», де запропонувати розглянути різні види циліндричних поверхонь, конічних поверхонь, параболічних поверхонь та їх застосування у навколишній дійсності (див.п.2.6.).

Велику роль у закріплені вивченого матеріалу відіграють прикладні задачі [22; 23].

Задача 2.30. Два однотипних підприємства A та B виробляють продукцію з однією й тією ж відпускною оптовою ціною m за один виріб. Однак автопарк, що обслуговує A, оснащений кращими автомобілями. Тому його транспортні витрати на 1 км становлять 10 гр.од., тоді як для B – 20 гр.од. Відстань між підприємствами 300 км. Як територіально має бути розподілений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх перевезення були найменшими?

Розв'язання. Нехай відстані до ринку від пунктів *A* та *B* будуть S_A та S_B відповідно. Тоді витрати споживачів будуть: $V_A=m+S_A$, $V_B=m+S_B$. Знайдемо множину точок, для яких $S_A=2S_B$ (тобто коли їх витрати будуть співпадати).

Для цього введемо ПДСК так, щоб вісь *Ox* співпала з прямою *AB*, вісь *Oy* проходить через точку *A*, перпендикулярно до *AB*. Тоді у такій системі координат, точка *A*(0;0), *B* (300;0), *O*(*x;y*) – ринок.

$S_A = OA = \sqrt{x^2+y^2}$, $S_B = OB = \sqrt{(300-x)^2+y^2}$, складемо рівняння:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(300-x)^2+y^2}$$

$$x^2+y^2 = 4(90000-600x+x^2)+4y^2$$

$$(x-400)^2+y^2 = 200^2$$

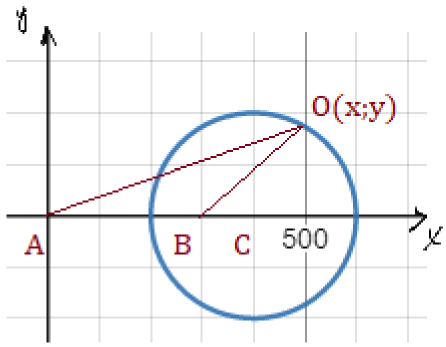


Рис.2.30. Ілюстрація до задачі 2.30

Це є рівняння кола, з центром в точці *C*(400; 0) і радіуса R=200. Отже, робимо висновок, що для споживача, який проживає всередині цього кола вигідніше купувати у пункті *B*, поза колом – пункті *A*, на колі – нема різниці.

2.6. Проєкти з елементів аналітичної геометрії

Для розширення уявлення учнів про різноманітні види рівнянь (на площині та в просторі), криві та поверхні (зокрема, вищого порядку) можна запропонувати проєкти: «Різні види рівнянь прямої та їх використання», «Різні види кривих та їх використання», «Різні види поверхонь».

Наприклад, проєкт «Різні види кривих та їх використання» може містити такі рубрики:

1. Криві другого порядку.
2. Криві вищих порядків.
3. Застосування кривих у навколишній дійсності.

Клас поділяється на три підгрупи (можна здійснити більший поділ, відокремивши, наприклад, дослідження еліпса, параболи, гіперболи, спіралей, конхоїд, равлика Паскаля, кардіоїди тощо). Для дослідження кривих можна запропонувати порядок: особливості форми; аналітичне завдання; властивості; історична довідка; використання.

Презентувати результати можна, наприклад, за допомогою інтерактивних плакатів.

Рис 2.31. Інтерактивний плакат

Інтерактивний плакат чудово замінює традиційні презентації у PoverPoint, вони є рухливими, дають змогу прикріплювати анімації, відео та інший контент, розміщений або на вашому диску або в Інтернет. Так на рис.2.31 на фрагменті справа унизу є інтерактивні іконки у вигляді екрану, які містять посилання на ютуб, де є побудова леменіскати Бернуллі. Перший слайд дає змогу переміститися на потрібний слайд-книжку. З кожного слайду можна перейти далі або повернутися на перший слайд.

Під час даного дослідження можна використовувати ейдографіку - різновид комп'ютерного моделювання за допомогою графіків рівнянь.

Самостійне створення в техніці ейдографії є продуктивною діяльністю і сприяє розвитку творчості учнів шляхом цілісного комбінування математичних та художньо-естетичних знань; реальна можливість для вираження та творчості; збагачення процесу навчання позитивними відчуттями; активізація навчально-пізнавальної діяльності. У процесі оволодіння основами ейдографії постійно вирішуються два завдання: створення графічного зображення відповідно до аналітичного завдання та аналітичне завдання кінцевого графічного зображення. Перша задача простіша і завжди має єдине рішення. Друге завдання є досить складним і неоднозначним (якщо не відомий клас ознак, які використовуються для створення графіка). Однак для простих прикладів, де використовується лише один приклад, аналіз графічного зображення можливий для всіх учнів [12; 43].

Ейдографіка дозволяє створювати не тільки візерунки, а й портрети, натюрморти, пейзажі та сюжети. Найбільш придатним для ейдографіки є програмно-методичний комплекс GRAN. Вибір на його користь заснований на функціональності і достатньої кількості можливостей вибору товщини лінії (від 1 до 5); нескінченна кількість графіків, які можна побудувати в одній системі координат, що є дуже важливим.

Алгоритм використання ейдографіки [34; 43].

1. Ознайомтеся з рівняннями кривих (за потреби в розширеному режимі). На цьому етапі рекомендується створити абетку ейдографії за схемою: графічне зображення, аналітичне завдання, назва.

2. Ознайомлення з ПМК GRAN має відбуватися паралельно зі створенням абетки. Будь ласка, зверніть увагу, що на рівні користувача достатньо володіти принаймні програмним забезпеченням GRAN-1. Не забувайте про обсяг завдань, тому не варто перевантажувати учнів на етапі ознайомлення їх із зайвими деталями й тонкощами. Дуже важливо, підтримувати їхній інтерес і заохочувати навіть найменші прояви креативності та неординарності.

3. Опанувавши абетку і використавши навички роботи з графічними функціями в середовищі програмування GRAN-1, можна переходити до більш складних завдань. Наприклад, намалюйте малюнок (орнамент, декор) з використанням певної симетрії або створіть власний графічний ескіз за одним і тим же центральним стимулом (готовий малюнок, який містить необхідні елементи вашого майбутнього малюнка). Його можна заливати, повторювати в різних напрямках, обрамляти і т. д. На першому етапі висувається обов'язкова вимога певної симетрії зображення.

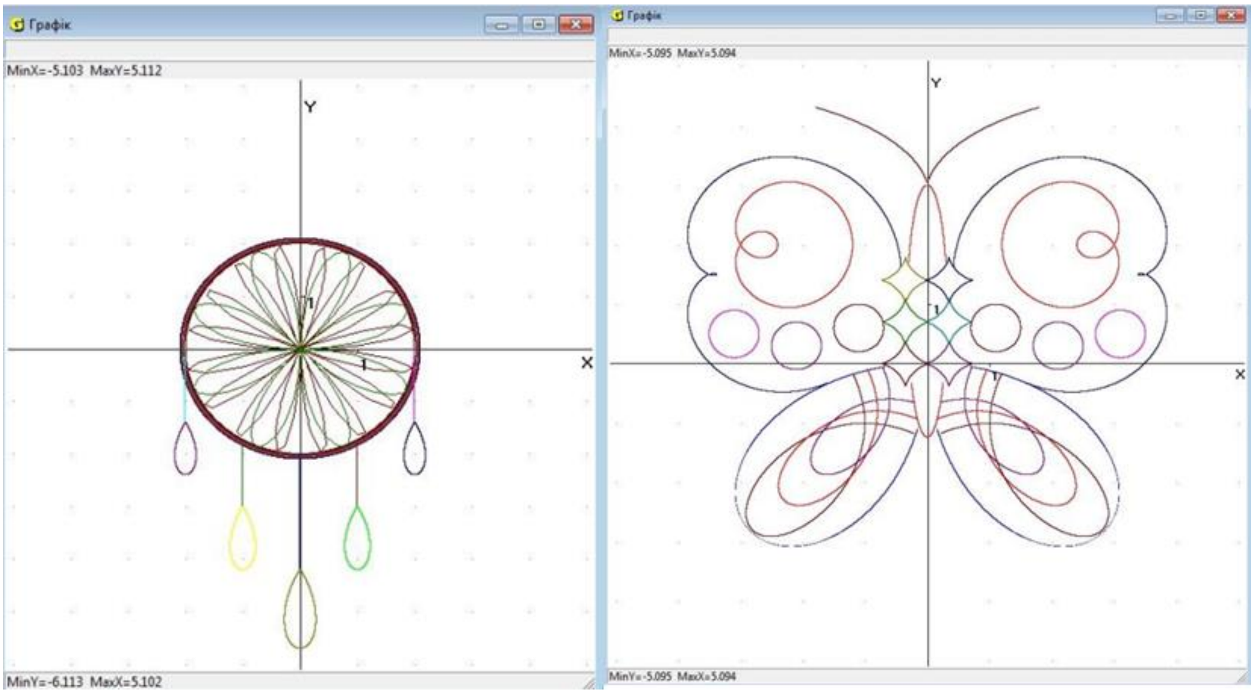


Рис.2.32. Ейдографіка у програмі GRAN

Розглядаючи проєкти з теми «Поверхні» можна зосередити увагу учнів на різних архітектурних витворах, в основі яких лежать ті чи інші поверхні, звертаючи увагу здобувачів освіти на властивості поверхонь, на які спираються архітектори (табл.2.1).

Таблиця 2.1.

Поверхні і архітектура

Рисунок	Назва	Особливості

	Музей «Сумайя» в Мексиці, Мехіко. В основі конструкції лежить однопорожнинний гіперболоїд.	Башта стоїть на п’ятиярусному підземному паркуванні. Стіни вкриті дзеркальними алюмінієвими пластинами, вікон немає. Денне світло надходить у будівлю зверху і освітлює лише верхній поверх.
	Фонд Пате, Франція, Париж В основі конструкції – еліпсоїд.	Необхідність витримати відстань до сусідніх будівель, надаючи їм доступ до світла та повітря
	Ресторан у Xochimilco у Мексиці. Ресторан є сполукою восьми гіперболічних параболоїдів	Будівля розташована на березі водоймища, відображення в якому подвоює його форму.
	Планетарій, Німеччина, Бохум Дах його виконаний у вигляді параболоїда обертання.	Планетарій імені Карла Цейса відкрився в 1964 році і з того часу є однією з найпопулярніших пам’яток Бохума
	Аджигольський маяк, Україна, Херсонська обл. Сітчастий сталевий гіперболоїдний маяк	Побудований у вигляді сітчастої оболонки у формі однопорожнинного гіперболоїда обертання у 1911 році за проектом інженера, академіка Володимира Григоровича Шухова. Висота маяка – 76

		метрів.
	«Rolling Homes» Екстравагантні сімейні будинки у формі невеликих циліндрів	Зсередини будинки виглядають також досить незвично: відкритий дизайн просторих приміщень доповнений скляною зі стелі до підлоги стіною.

Використання проєктів сприяє поглибленню знань учнів з теми аналітичної геометрії, сприяє розвитку творчого мислення, відкриє світ кривих та поверхонь з іншої сторони.

2.7. Тестові завдання

Для перевірки знань з тем геометрії, що стосуються елементів аналітичної геометрії можна використовувати різні онлайн-тестові платформи. Найбільш вдалою і зручною, на наш погляд, є платформа «Всеосвіта». На даній платформі є можливість створення різноманітних тестових завдань, учні мають змогу прикріплювати фото своїх робіт (отже, питання можуть бути відкритого характеру), виставляється обмеженість по часу, можна заборонити виходити із повноекранного режиму, встановити кількість спроб, є можливість показувати відповіді чи лише результати роботи учням, перевіряти і виправляти бали вручну (чого нема, наприклад, на платформі Quizzez), вставляти формули та картинки як до відповідей так і до питань (рис. 2.33).

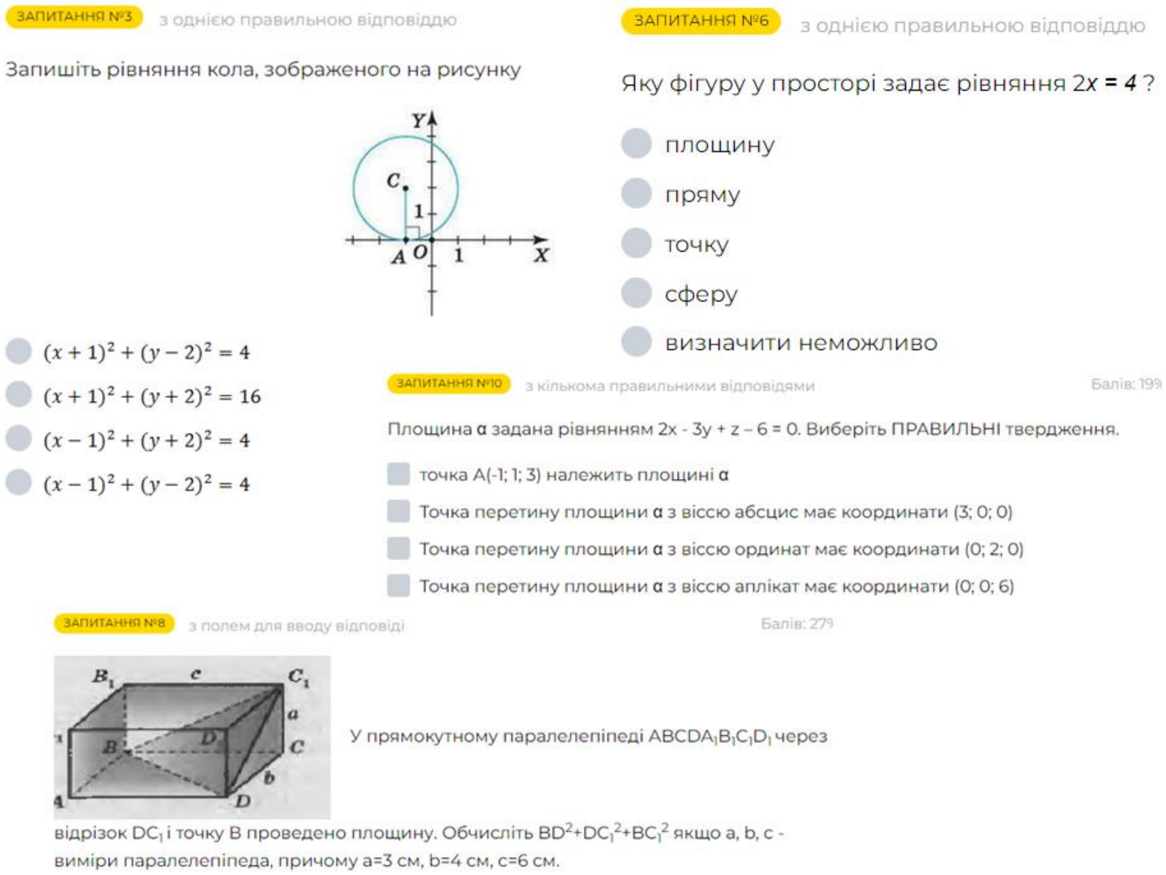


Рис.2.33 Різні варіанти тестових завдань

Під час поглибленого вивчення математики доречним є використання під час перевірки знань та вмінь учнів комплексних завдань – задач, які поєднують у собі матеріал декількох тем (рис.2.34). Такі завдання теж можна оформити як тестове завдання із можливістю прикріплювати файл-відповідь. Таке завдання дає змогу обмежити за часом на виконання завдання, виставити кількість балів, залишити коментарі для пояснення у роботі над помилками.

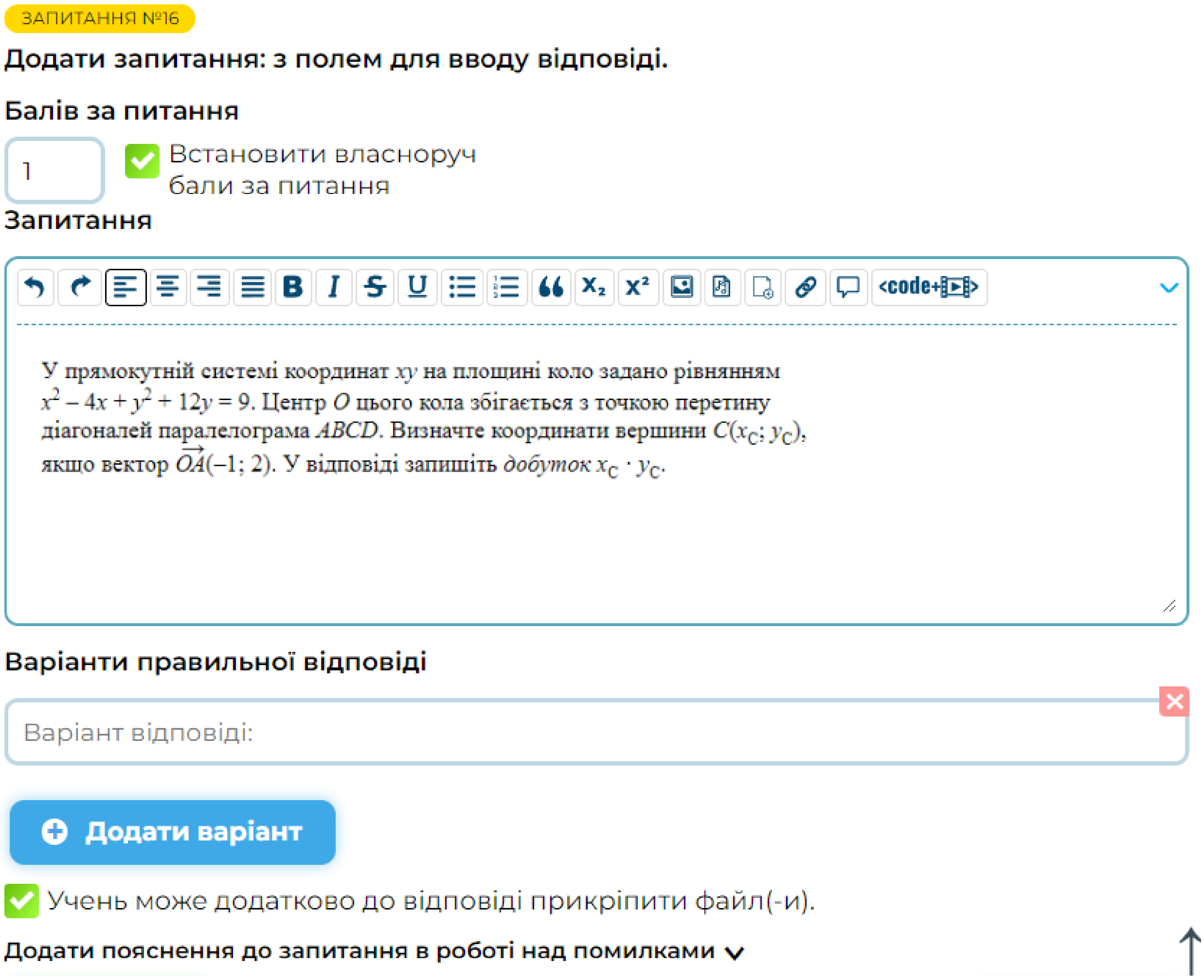


Рис.2.34. Приклад комплексної задачі

Використовуючи тестові завдання не забуваємо про формування вмінь учнів пояснювати виконання завдань, а тому доречно проводити не лише тестування.

ВИСНОВКИ

Відповідно до мети та поставлених завдань у ході дослідження отримано такі **результати**: проаналізовано наукову літературу з теми дослідження; визначено місце та роль елементів аналітичної геометрії у шкільному курсі геометрії; розглянуто різні типи задач, де доцільно використовувати метод координат та векторний метод відповідно до тем, які містять елементи аналітичної геометрії; розглянуто можливості використання різних онлайн-платформ, зокрема «Всеосвіта» та LearningApps.

Результати проведеного дослідження дають підстави для таких **висновків**:

1. Елементи аналітичної геометрії вперше зустрічаються в математиці 6 класу, далі розглядаються в геометрії 9 класу, 10 класу, 11 класу. У професійних коледжах та технікумах також вивчаються елементи аналітичної геометрії або в курсі «Математика», або «Вища математика».

2. Вчителі мало використовують метод координат та векторний метод в інших темах, що не сприяє формуванню в учнів вмінь використовувати дані теми в задачах, де явно не вказано на необхідність їх використання. Хоча застосування даних методів до деяких задач може значно спростити їх розв'язання.

3. У ході аналізу підручників з'ясовано, що введення деяких понять різняться. Тому як ввести певне поняття залишається на розсуд вчителя.

4. Для розширення уявлення учнів про різноманітні види рівнянь (на площині та в просторі), криві та поверхні (зокрема, вищого порядку) можна запропонувати проєкти: «Різні види рівнянь прямої та їх використання», «Різні види кривих та їх використання», «Різні види поверхонь». Звіт з проєктів доречно подавати у вигляді інтерактивних дошок.

5. Теми «Координатна площина» та «Графіки залежностей між величинами», що вивчається в 6 класі, є підготовкою до вивчення декартових координат у геометрії. Історія виникнення та розвитку координатного методу є цікавою та доступною для учнів, тому її слід використовувати для стимулювання інтересу учнів до вивчення даної теми.

6. Під час перевірки знань доречним є використання платформ «Всеосвіта» та LearningApps.

Результати дослідження можуть бути використанні під час вивчення шкільного курсу геометрії, курсу «Вища геометрія: аналітична геометрія»

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика 10 клас. Київ: Освіта. 2018. 288с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова В.М. Геометрія: 10 клас, профільний рівень. К.: Освіта. 2018. 272с.
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
4. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. 360 с.
5. Бевз В. Г. Метод координат і його вивчення в школі. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*. 2010. № 34. С. 82-86.
6. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І. Математика. Підручник 10 клас. Київ: Оріон. 2018. 288 с.
7. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ: УОВЦ «Оріон».2017. 224 с.
8. Возняк О.Г. Метод координат у геометричних задачах. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. 64 с.
9. Волчаста М. М. Наступність у вивченні геометричного матеріалу в початковій та основній школі : автореф. дис на здобуття ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання математики». Київ, 2003. 20 с.
10. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник. К. : Либідь,1997. 376 с, с. 227
11. Декарт Р. Міркування про метод. Київ. «Тандем». 2001. 268 с.
12. Елементи ейдографіки на уроках математики. URL: https://naurok.com.ua/elementi-eydografiki-na-urokah-matematiki-46341.html
13. Істер О.С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ: Генеза, 2017. 240 с.
14. Істер О.С. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. 10 клас. Рівень стандарту. Київ, Генеза, 2018. 384 с.

15. Істер О.С., Єргіна О.В. Геометрія: 10 клас, проф.рівень. К.: Генеза, 2018. 368 с.

16. Істер О.С., Єргіна О.В. Збірник завдань для атестаційних письмових робіт з математики: 9 клас. Київ: Генеза. 2020. 40 с.

17. Кадубовський О., Кадубовська О. Введення косокутної системи координат, як метод розв'язування широкого кола задач з аналітичної геометрії середньої та вищої школи. URL: https://ddpu.edu.ua/fmk/publications/methodical%20articles/meth-art_01.pdf

18. Кілочицька Т.В. Вища математика. Векторна алгебра та аналітична геометрія. URL: http://surl.li/icxkq

19. Копорх К. М., Собкович Р. І. Задачі та вправи для практичних занять з аналітичної геометрії (Частина 1. Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого степеня із двома та трьома змінними): навчальний посібник. Івано-Франківськ: п.п.Бойчук А.Б.. 2016. 83с.

20. Конфорович А.Г. Колумби математики. К. Радянська школа. 1982. 223 с.

21. Кравчук О.М. Професійна підготовка майбутніх вчителів математики в процесі вивчення аналітичної геометрії: наступність і перспективність. URL: https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/3034

22. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом координат: посібник для самоосвіти вчителів. Київ: Радянська. школа, 1983. 127 с.

23. Лосєва Н.М., Ніколаєва О.А. Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations*. 2012. № 38. С. 46-50.

24. Математика. Комплексна підготовка до ДПА. 9 кл. / уклад. А.М.Капіносов [та ін.]. Тернопіль: Підручники і посібники.2018. 272 с.

25. Матяш О. І., Савченко М. В. Використання прийому аналогій у навчанні стереометрії у старшій школі. Вінниця: Вінницький державний педагогічний університет, 2013. 41 с.

26. Махомета Т.М. Вивчення алгебраїчних ліній у курсі аналітичної геометрії студентами ВНЗ. URl: https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/2923/Makhometa.pdf?sequence=1

27. Махомета Т.М. Історія розвитку вчення про лінії та поверхні в курсі аналітичної геометрії. URl: http://dm.inf.ua/_35/78-82.pdf

28. Методичні рекомендацій щодо організації освітнього процесу в ЗЗСО в умовах дистанційного навчання у 2022/2023 навчальному році. URl: https://znayshov.com/News/Details/metodychni_rekomendatsii_shchodo_orhanizatsii_osvitnoho_protsesu_v_zzso_v_umovakh_dystantsiinoho_navchannia

29. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. Математика. 10 клас. Харьків: Гімназія. 2018, 256 с.

30. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: початок вивч.на поглиб.рівні з 8 кл., проф.рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 272 с.

31. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія для загальноосвіт. навчальних закладів з поглибленним вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2017. 304 с.

32. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків: Гімназія, 2017. 240 с.

33. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 9клас. Харків: Гімназія, 2017. 160 с.

34. Параскевич С. Ейдографіка, або нові можливості програмно-методичного комплексу GRAN. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/eydografika-abo-novi-mozhlivosti-programno-metodichnogo-kompleksu-gran/viewer

35. Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В. Лінії на евклідовій площині. К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2006. 60 с

36. Соколенко Л.О., Швець В.О. Застосування теорії прямої та площини до розв'язування стереометричних задач. URl: https://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/28274

37. Скафа О.І., Реутова І.М. Наступність у навчанні розв'язуванню задач на многогранники та тіла обертання між старшою школою технічного профілю та вищим технічним навчальним закладом. URl: http://enpuir.udu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/2890/Skafa_Reutova.pdf?sequence=1&isAllowed=y

38. Типова освітня програма закладів середньої освіти II ступеня, затверджена МОН від 20.04.2018 №405. URl: https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-tipovoyi-osvitnoyi-programi-zakladiv-zagalnoyi-serednoyi-osviti-ii-stupenya

39. Типова освітня програма закладів середньої освіти III ступеня, затверджена МОН від 20.04.2018 №408 (у редакції наказу МОН від 28.11.2019 №1493 зі змінами, внесеними наказом МОН від 31.03.2020 №464). URl: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0408729-18#n14

40. Хобот Н.С. Використання елементів аналітичної геометрії у шкільній геометрії. *Сучасний педагогічний процес: світові тенденції та вітчизняні реалії. Матеріали науково-практичної конференції* (м. Дніпро, 10-11 лютого 2023 р.). Одеса: Видавництво «Молодий вчений», 2023. С.10-15

41. Цікава математика. URl: https://jo01.tumblr.com/history_math

42. https://dnz6.edu.vn.ua/nash-budn-ta-rozvagi/442-nastupnist-doshkilnoji-i-pochatkovoji-osvity-u-zapytannjah-i-vidpovidjah.html

43. https://www.geogebra.org/m/gqpk8yfu#material/dcuqvv5a

44. https://olga-kozachok.wixsite.com/matemat/1-upuee

45. https://zno.osvita.ua/mathematics/