МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка

Кафедра фізико-математичної освіти та інформатики

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

Тема: «Методика навчання розділу "Розв’язування трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання»

Виконав:
магістрант 62ММ групи
факультету природничої і фізико-математичної освіти
Лі Ке

Спеціальність:
014 Середня освіта (Математика)

Науковий керівник:
кандидат педагогічних наук, доцент
Рябко Андрій Вікторович

Дата захисту: «   »   2024 р.
Національна оцінка
____
Кількість балів:
____
Оцінка ECTS
____
Підписи членів ДЕК:
____
____

Глухів - 2024

Зміст

Вступ

Актуальність теми.

Вивчення способу розв'язування трикутників є актуальною педагогічною проблемою з кількох причин. Розв’язування трикутників передбачає розуміння та застосування різних тригонометричних понять, таких як синус, косинус і тангенс, а також закони синусів і косинусів. Учням може бути складно зрозуміти ці поняття, особливо тим, хто вперше знайомиться з тригонометрією.

Вивчення трикутників і тригонометрії є основою для поглибленої математики, фізики, інженерії та інших галузей STEM. Тому важливо переконатися, що учні добре володіють цими поняттями, щоб досягти успіху в освіті вищого рівня. Тригонометрія та методи розв’язування трикутників мають численні застосування в реальному світі. Від інженерії та архітектури до навігації та астрономії, учні можуть зіткнутися з цими концепціями в різних кар'єрних шляхах. Тверде розуміння є життєво важливим для практичного розв’язування проблем.

Розв’язування трикутників вимагає від учнів критичного мислення та застосування математичних принципів до реальних ситуацій. Розвиток цих навичок розв’язувати задачі має вирішальне значення для їх загальної математичної освіти. Тригонометрія та методи розв’язування трикутників мають багату історичну історію. Викладання цієї теми може дати уявлення про історію математики та внесок різних математиків.

Учні приходять до класу з різним рівнем попередніх знань і знайомства з тригонометрією. Завдання полягає в тому, щоб узгодити ці відмінності та забезпечити, щоб усі учні могли ефективно зрозуміти концепцію. Навчання методу розв’язування трикутників у сучасному класі часто передбачає інтеграцію технологій, таких як графічні калькулятори та програмне забезпечення. Вчителі повинні адаптувати свої педагогічні методи, щоб ефективно використовувати переваги технологій.

Оцінка розуміння учнями тригонометрії та методів розв'язування трикутників може бути складною. Вчителі повинні розробити відповідні інструменти оцінювання, щоб оцінити розуміння учнями предмету.

З розвитком дистанційного навчання вчителі стикаються з проблемою ефективного навчання тригонометрії у віртуальному середовищі. Адаптація методів навчання та матеріалів до онлайн-платформ, зберігаючи залучення студентів, є педагогічним завданням. Різні учні мають різні стилі навчання, і це може бути проблемою представити тригонометричні концепції таким чином, щоб задовольнити візуальні, аудіальні та кінестетичні учні.

Деякі учні відчувають математичні тривоги, і тема розв'язування трикутників може особливо тривожити через свою складність. Вчителі повинні використовувати педагогічні прийоми, щоб зменшити хвилювання щодо математики та створити позитивне навчальне середовище.

Розв'язування трикутників – це концепція, яка потребує практики та повторення. Залучення учнів під час роботи над тригонометричними задачами може бути педагогічним викликом, оскільки монотонність може вплинути на мотивацію.

Вивчення методів розв'язування трикутників представляє педагогічні проблеми через його складність, його важливість для передової освіти та застосування в реальному світі, а також необхідність адаптації до різних стилів навчання та технологічних досягнень. Педагоги повинні вирішувати ці проблеми, щоб гарантувати, що учні розвинуть міцну основу в тригонометрії та пов'язаних математичних концепціях.

Методичні особливості вивчення вивчення трикутників розглядаються у роботах Бевз В. Г. і Бевз Г. П. [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19], Полонського В.Б., Рабиновича Є.М., Якіра М. С. [81], Лоповок Л. М. [58, 57], Кушнір І. А. [54, 55], Крайзман М.Л. [51, 52], Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. [26] та інших вчених.

Китайські методисти Mun Yee Lai [1], Shu L. [3], Peijun M., Dong L. [3], Zhang Dianzhou [5] приділяють велику увагу проблемам навчання геометрії, зокрема, розв’язуванню трикутників. Важливим журналом є «Світ молодшого школяра», де публікуються методичні праці [98, 99, 100, 101, 102, 103].

Вивчення трикутників у школі за допомогою дистанційного навчання може спричинити кілька протиріч і труднощів, з якими можуть зіткнутися як учні, так і викладачі. Ці проблеми в основному зумовлені дистанційним характером навчання та практичним характером геометрії. Ось кілька типових проблем:

1. Відсутність фізичних маніпуляцій: у традиційному класі учні часто використовують фізичні інструменти, такі як лінійки, циркуль і транспортир, щоб будувати та досліджувати трикутники. Дистанційне навчання ускладнює надання цих фізичних маніпуляцій, що заважає студентам отримати практичний досвід навчання.

2. Візуальне та просторове розуміння: Геометрія, особливо вивчення трикутників, значною мірою покладається на візуальне та просторове розуміння. Дистанційне навчання може обмежити ефективність наочних посібників та інтерактивних дошок, ускладнюючи учням візуалізацію трикутників і керування ними.

3. Співпраця та обговорення: під час вивчення трикутників учні отримують користь від взаємодії з однолітками та групових обговорень. Дистанційне навчання може обмежити це спільне навчання, ускладнюючи ефективний обмін ідеями та стратегіями ви Розв’язування проблем.

4. Доступ до технологій: не всі учні мають рівний доступ до необхідних технологій і програмного забезпечення для дистанційного вивчення трикутників. Різниця в технологіях може призвести до нерівних можливостей для навчання.

5. Проблеми з підключенням до Інтернету: Технічні проблеми, такі як погане підключення до Інтернету, можуть порушити живі онлайн-уроки, що ускладнить студентам активну участь і взаємодію з матеріалом.

6. Різні стилі навчання: Студенти мають різні стилі навчання, і дистанційне навчання може не задовольнити всіх з них ефективно. Деяким учням може бути важко самостійне, асинхронне навчання, тоді як інші процвітають у такому середовищі.

7. Оцінювання та зворотний зв’язок: викладачам може бути складно оцінити розуміння учнями концепції трикутника за допомогою онлайн-оцінювання. Надання своєчасного та ефективного зворотного зв’язку також може бути більш складним у дистанційному навчанні.

8. Залученість і увага: у віддаленому навчальному середовищі може бути складніше підтримувати увагу студентів і зосереджуватися на матеріалі. Абстрактний характер геометрії може ускладнити учням утримання уваги.

9. Практичні заняття: Геометрія часто включає практичні заняття, як-от різання та складання паперу для вивчення геометричних понять. Ці дії складніше відтворити в середовищі дистанційного навчання.

10. Практичне застосування: демонстрація практичного застосування трикутників, наприклад у будівництві чи навігації, може бути обмежена віртуальним класом. Студенти можуть втратити контекст реального світу.

11. Індивідуальна підтримка: Деяким учням може бути важко з конкретними концепціями трикутника, і їм потрібна індивідуальна підтримка. Вихователям може бути складніше дистанційно визначити та усунути ці прогалини в навчанні.

12. Взаємодія вчителя та учня: особиста взаємодія між вчителями та учнями має вирішальне значення для розуміння та задоволення індивідуальних потреб. Дистанційне навчання може зменшити можливості для взаємодії один на один.

Щоб вирішити ці протиріччя та труднощі під час вивчення трикутників за допомогою дистанційного навчання, викладачі можуть використовувати різні стратегії, такі як надання програмного забезпечення для цифрової геометрії, інтерактивного моделювання, чітких пояснень та віртуальних робочих годин для індивідуальної підтримки. Створення цікавого онлайн-контенту, застосування трикутників у реальному світі та заохочення співпраці однолітків за допомогою відеоконференцій також можуть допомогти підтримати інтерес студентів і сприяти навчанню. Важливо бути гнучким і терплячим, долаючи ці виклики в середовищі дистанційного навчання..

У вирішенні цих протиріч полягає проблема дослідження.

Тема дослідження: Методика навчання розділу "Розв’язування трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

Об'єкт дослідження – процес навчання геометрії у 9 класі.

Предмет дослідження – складають методи та прийоми навчання розділу "Розв’язування трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

Мета дослідження полягає в теоретичному обґрунтуванні та розробці методики розділу "Розв’язування трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

Відповідно до проблеми, метою та гіпотезою дослідження були визначені такі **завдання** дослідження:

1) провести аналіз методологічної, психолого-педагогічної, навчально-методичної, математичної літератури з досліджуваної проблеми, виявити її стан до теперішнього часу та вивчити наявні результати;

2) провести порівняльний аналіз вивчення трикутників у школах України та Китайської Народної Республіки з метою обміном ідеями та взаємного збагачення методик;

3) Визначити роль і місце знань про трикутники у навчанні та вихованні учнів у процесі вивчення геометрії

4) Спираючись на розроблену концепцію, спроектувати технології навчання розділу "Розв'язування трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

5) провести педагогічний експеримент із метою перевірки отриманих результатів.

Провідним на всіх етапах дослідження виступав педагогічний експеримент, застосувалися методи математичної статистики для обробки та інтерпретації результатів педагогічного експерименту.

Для розв'язання поставлених задач використовувалися наступні **методи дослідження**:

- теоретичні – аналіз психолого-педагогічної, філософської, і науково-методичної літератури при обґрунтуванні теоретичних положень дослідження;
- емпіричні – узагальнення педагогічного досвіду з проблеми, спостереження навчально-виховного процесу навчання математики, анкетування, опитування;
- вивчення результатів діяльності вчителів.

Наукова новизна роботи полягає у наступному:

• запропоновано різноманітні стратегії навчання, такі як використання реальних прикладів, інтерактивних навчальних занять, наочних посібників та диференціації для адаптації до різноманітних стилів і темпів навчання.

• застосовані інтерактивні онлайн-інструменти, розроблені чіткі пояснення, здійснювалося проведення віртуальних робочих години для індивідуальної підтримки та заохочувати учнів до співпраці за допомогою відеоконференцій. Створено цікавий онлайн-контент та застосування розв'язування трикутників за допомогою програми GeoGebra.

Теоретичне значення одержаних результатів полягає в:

- виявленні психолого-педагогічних основ вивчення геометрії у контексті проблеми розв'язування трикутників,
- визначенні загальних методів, прийомів і способів вивчення трикутників у школах України та КНР;
- доведенні ефективності та доцільності застосування різноманітних стратегій навчання, такі як використання реальних прикладів, інтерактивних навчальних занять, наочних посібників та диференціації для адаптації до різноманітних стилів і темпів навчання учнів, онлайн-контенту та застосування трикутників за допомогою програми GeoGebra

Практичне значення:

- створено методичні матеріали (плани уроків, презентації, онлайн-контент за допомогою програми GeoGebra;
- розроблено демонстраційні слайди презентацій для ілюстрації уроків розділу «Розв'зування трикутників» в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

Експериментальна база дослідження. Дослідно-експериментальна робота здійснювалась у Глухівський ЗОШ №1 у процесі проходження педагогічної практики на робочому місці вчителя математики.

Організація дослідження. Дослідження здійснювалось поетапно.

На першому етапі (І семестр) з′ясовувались та аналізувались психолого-педагогічні аспекти методики "Розв'язуавння трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання. Зробили порівняльний аналіз вивчення трикутників у школах України та Китайської Народної Республіки з метою обміном ідеями та взаємного збагачення методик. Проводився констатуючий експеримент. Було створено навчально-методичне забезпечення формуючого експерименту.

Проводився констатуючий експеримент. Було створено навчально-методичне забезпечення формуючого експерименту.

На другому етапі (формуючий експеримент) перевірялася експериментальна методика "Розв’язування трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

Пропозиції щодо використання результатів дослідження. Розроблена в магістерській роботі методика та результати дослідження рекомендуються до використання в процесі навчання геометрії у 9 класі.

Розділ 1. Теоретичні основи вивчення трикутників у курсі геометрії

У першому розділі розкриємо сутність процесу розв'язування трикутниів, психологічні і педагогічні особливості, визначимо роль і місце розв'язування трикутників у процесі вивчення математики в закладі загальної середньої освіти, проведемо порівняльний аналіз вивчення трикутників у школах України та Китайської Народної Республіки з метою обміном ідеями та взаємного збагачення методик.

1.1. Методичні особливості вивчення теми «Розв'язування трикутників»

1.1.1. Розв'язування трикутників

На уроках з теми: «Розв'язування трикутників» ставиться питання про те, як знаючи один з основних елементів трикутника, знайти інші. Дуже важливо, щоб учні зрозуміли, що теореми синусів, косинусів, а також теорема про суму кутів трикутника дозволяють знайти всі шість елементів довільного трикутника за визначеними трьома даними його елементів, з яких, принаймні, один лінійний, або, як кажуть розв`язати трикутник. Ми будемо розглядати три випадки розв'язання довільних трикутників: 1) за двома сторонами та кутку між ними; 2) за стороною та дотичними кутами; 3) за трьома сторонами.

Не розглядається випадок (як показує досвід, найважчий для учнів) розв'язування трикутника по двом сторонам і куту протилежному одній з цих сторін. Залежно від контингенту учнів вчитель сам вирішує, чи розглядати в загальному вигляді цей випадок розв'язування трикутників або обмежитися конкретними завданнями, наведеними в підручнику. Розв'язування у загальному вигляді перших трьох завдань доцільно розібрати за підручником, а четвертий випадок можна розглянути на факультативі або, якщо залишиться час.

У процесі вивчення цієї теми учнями, корисно зробити «пам'ятку». За наявності часу бажано розглянути четвертий випадок. Метою такої пам'ятки є формування в учнів умінь розв’язування трикутників з основних типів завдань на прикладі конкретних трикутників.

Перед тим як починати розгляд теми: «Розв’язування трикутників» варто в домашнє завдання включити питання на повторення: розв'язання прямокутних трикутників і побудова трикутників. Підбиваючи підсумки повторення, корисно звернути увагу учнів на те, що рівність трикутників визначається трьома рівними елементами, взятими у певній конфігурації, а трикутник можна побудувати і за трьома заданим элементам.

Наступним етапом буде з'ясування з учнями, чи можна за трьома даними елементами трикутника знайти інші його елементи, тобто розв`язати трикутник.

Під час виконання завдань корисно використовувати «пам'ятку». Завдання на розв'язання трикутників, що розглядаються під час вивчення теми, досить часто є фрагментами розв’язування більш змістовних та цікавих завдань. Тому вміння вирішувати ці завдання є програмною вимогою до знань учнів. Єдиність розв'язання кожного завдання випливає із відповідної ознаки рівності трикутників.

Завдання 1: Знайдіть всі елементи трикутника по двом сторонам та куту між ними.

Приступаючи до розв'язання задачі, варто зауважити, що два трикутники із заданими двома сторонами та кутами між ними будуть рівні за першою ознакою рівності трикутників. А це означає, що при розв'язанні трикутника по двом сторонам і куту між ними значення для третьої сторони та інших двох кутів мають єдині значення, тобто рішення єдине.

Розглядаючи завдання корисно звернути увагу учнів на два можливі способи знаходження кутів трикутника. У той час, як довжина сторони однозначно визначається за допомогою теореми косінусів, для визначення кутів трикутника можна застосувати як теорему косінусів (I спосіб) так і теорему синусів (II спосіб). Обидва способи мають ряд переваг та недоліків. Зауважимо, що під час використання I способу кут визначається однозначно за знаком косинуса, але обчислення дуже громіздкі. Під чам використання II методу терема синусів дає можливість досить легко обчислити синус кожного з цих кутів. Однак значення синуса визначають два кути: гострий і тупий. Отже, необхідно скористатися теоремою про співвідношення сторін та кутів трикутника.

Розберемо можливі випадки.

1. Якщо сторона с – найбільша, то кути α та β - гострі,

2. Якщо сторона с – не найбільша, то спочатку знаходимо кут, що лежить проти меншої зі сторін a та b, отже, він є гострим. Третій кут знаходимо з рівності $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Завдання 2: Знайти всі елементи трикутника по стороні і прилеглим кутам.

З цим завданням учні фактично мали справу щодо теореми синусів. Корисно звернути увагу на те, що будь-які два трикутники, побудовані за цими даними, будуть рівні за другою ознакою, тобто рішення єдине.

Завдання 3: Знайти всі елементи трикутника за трьома сторонами.

У процесі розгляду такого завдання, як і у випадку задачі1, корисно звернути увагу учнів на два можливі способи знаходження кутів трикутника. У той час, як градусна міра найбільшого кута однозначно визначається за допомогою теореми косінусів, для визначення одного з двох інших кутів трикутника можна застосувати теорему косінусів (I спосіб) або теорему синусів (II спосіб). Оскільки спочатку визначається найбільший кут, то два інших будуть свідомо гострими. Третій кут знаходимо з рівності □ + □ + □ = 180□. Зауважимо, що як і задача1, задача 2 на знаходження кутів трикутника по трьом сторонам має єдине рішення відповідно до третьої ознаки рівності трикутників.

Завдання 4: Знайти всі елементи трикутника по двом сторонам та куту протилежному одній з цих сторін.

Не обов`язково розглядати це завдання під час уроку.

Ці уроки пропонуємо пов'язати з пунктом "Вимірювальні роботи". Рекомендується давати їх разом, тому що хлопці побачать зв'язок практики та теорії. Вони навчаться практично застосовувати отримані знання, бачити трикутники і знаходити невідомі елементи.

Якщо під час вивчення теми "Розв`язання трикутників" нам поставили додатковий урок, чи залишився час, то з учнями можна розібрати четвертий випадок розв'язання трикутників, але рекомендується провести його як урок - факультатив. Цей випадок є найскладнішим, тому його розглядають лише на розсуд вчителя. Так, якщо клас сильний рекомендується розглянути його на уроці або на додаткових заняттях, якщо клас слабкий то рекомендується дати в загальному вигляді. Для вивчення цієї теми необхідно зробити плакат (див. Додаток1). Використання плаката в даному випадку є найбільш доцільним, оскільки з нього добре видно, в якому випадку завдання має два розв`язки, в якому один, а в якому випадку розв`язків немає.

Завдання 4. Знайдіть усі елементи трикутника по двом сторонам та куту, протилежному до однієї з цих сторін.

Рекомендується розглянути три випадки:

1 Якщо $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} > 1, (b\sin\alpha > a)$, розв`язків немає;

2. Якщо $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = 1, (b\sin\alpha = a)$, $\beta = 90°$, маємо єдиний розв`язок $\gamma = 90° - \alpha$, $c = b \cdot \cos\alpha$;

3 Якщо $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} < 1, (b\sin\alpha < a)$:

а) $b > a$, маємо два розвязки: кути β_1 и β_2 (гострий і тупий), синуси рівні;

б) $b = a$, єдиний розв`язок і кут β - гострий, так як кути при основі рівнобедреного трикутника можуть бути тільки гострими;

в) b < a, єдиний розв`язок – кут β може бути лише гострим, оскільки проти більшої сторони лежить більший кут, то $\alpha \geq \beta$.

Необхідно зауважити, що це завдання можна вирішити іншим способом. За допомогою теореми косінусів знайти найбільший кут, скориставшись теоремою синусів, знайти будь-який інший кут (він свідомо буде гострим); третій кут перебуває з рівності □ + □ + □ = 180□. Даний випадок рекомендується дати сильним учням як домашнє завдання.

Якщо за умови завдання на розв'язання трикутників потрібно знайти кут, то цілком достатньо визначити одну з його тригонометричних функцій, оскільки вміння користуватися таблицями та мікрокалькулятором для знаходження тригонометричних функцій кута і навпаки, знаходження кута за заданою однією з його тригонометричних функцій не є програмним. Якщо вчитель вважатиме за потрібне, можна пояснити учням, як користуватися таблицями і мікрокалькулятором. Але є значення тригонометричних функцій, які учні повинні знати – це кути 30, 45, 60, 90, 135 та 150. Тому на уроках пропонується розв`язати відповідні завдання.

1.1.2. Порівняльний аналіз вивчення трикутників у школах України та Китайської Народної Республіки

1.1.2.1. Характеристики обов’язкової освіти у КНР

Відповідно до нових потреб, що виникають через розширення процесу урбанізації, уряди всіх рівнів втілюють у життя ідеї документа «Думки Держради КНР про комплексну реформу та розвиток системи обов'язкової освіти в містах та в повітовій сільській місцевості», продовжують оптимізувати розподіл ресурсів освіти в містах, збільшують квоти для вступу учнів до міських шкіл, скорочують розрив у сфері освіти між міськими та сільськими районами. Число шкіл та чисельність учнів системи обов'язкової освіти у містах швидко збільшуються.

У 2019 році в країні налічувалося 213 тис. шкіл, які реалізують програми обов'язкової освіти, що на 1230 шкіл менше, ніж попереднього року. На програми обов'язкової освіти загалом було прийнято 35079 тис. учнів, що на 380 тис. осіб (1,1%) більше у порівнянні з 2018 роком. У школах навчалося 154 млн. учнів, що на 3965 тис. осіб (2,6%) більше, ніж у попередньому році.

Продовжувала збільшуватися кількість учнів, прийнятих на навчання до початкових шкіл, та загальна кількість учнів початкових шкіл. Значно зросла кількість зарахованих до початкових шкіл у містах. У 2019 році в країні налічувалося 160 тис. загальноосвітніх початкових шкіл, що на 1663 менше, ніж у попередньому році. Серед них кількість міських початкових шкіл збільшилася на 650, а кількість сільських початкових шкіл зменшилася на 2313. У всій країні чисельність учнів, зарахованих до початкових шкіл, склала 18690 тис., що на 17 тис. учнів (0,1%) більше, ніж попереднього року. До міських початкових шкіл було прийнято 7453 тис. учнів, що на 4,5% більше, ніж у попередньому році, а цей показник для сільських початкових шкіл зменшився на 2,6% порівняно з попереднім роком. Чисельність учнів загальноосвітніх початкових шкіл по всій країні склала 105612 тис. осіб, що на 2220 тис. осіб (2,2%) більше за показники попереднього року. Серед них чисельність учнів міських початкових шкіл склала 39641 тис. осіб, що на 6,5% більше за показники попереднього року, а цей показник для сільських початкових шкіл зменшився на 0,3%.

По всій країні продовжує зростати кількість учнів, зарахованих до середніх шкіл та загальна кількість учнів загальноосвітніх середніх шкіл. Особливо швидке зростання цих показників відзначається у міських середніх школах. У 2019 році по всій країні налічувалося 52 000 середніх шкіл, що на 433 більше у порівнянні з попереднім роком. Серед них кількість міських середніх шкіл збільшилася на 569, а кількість сільських середніх шкіл зменшилася на 136. Кількість зарахованих до міських середніх шкіл учнів по всій країні становила 16389 тис. осіб, що на 363 тис.

(2,3%) більше, ніж у попереднього року. З них до міських середніх шкіл було зараховано 6240 тис. учнів, що на 7,3% більше, ніж у попередньому році, а чисельність учнів, зарахованих до сільських середніх шкіл, скоротилася на 0,6%. Загальна чисельність учнів середніх шкіл становила 48271 тис. людина, що у 1746 тис. людина (3,8%) більше проти попереднім роком. Чисельність учнів міських середніх шкіл становила 18068 тис. людина, що у 6,8% більше, ніж попереднього року, а чисельність учнів сільських середніх шкіл збільшилася на 2,0%.

У зв'язку із зростанням числа школярів у 2019 році на 100 тис. осіб населення країни припадало 7569 учнів початкових та середніх шкіл (зростання на 131 особу порівняно з попереднім роком). Водночас на 100 тис. осіб населення припадало 3459 учнів середніх шкіл (зростання на 112 осіб у порівнянні з попереднім роком).

Поширеність обов'язкової освіти продовжувала залишатися на високому рівні. Система обов'язкової освіти наближається до стадії якісної та збалансованої системи. У 2019 році по всій країні показник охоплення дітей молодшого шкільного віку сягнув 99,94%. Загальний показник охоплення населення середньою освітою становив 102,6%. Таким чином, було досягнуто середнього рівня доступності обов'язкової освіти, характерного для країн з високим рівнем доходу.

Частка випускників початкової школи, які надійшли до середніх навчальних закладів, по всій країні становила 99,5%. Показник вступу випускників середньої школи становив 94,5%. Міністерство освіти продовжує удосконалювати комплексний механізм контролю відсіву, а також удосконалює систему моніторингу у районах із високим рівнем відсіву. Показник зміцнення позицій дев'ятирічної обов'язкової освіти в країні становив 94,8%, збільшившись на 0,6% порівняно з 2018 роком.

У 2019 році для реалізації програм обов'язкової освіти було задіяно 10016 тис. вчителів, що на 286 тис. осіб (2,9%) більше, ніж у попередньому році. Серед них кількість вчителів закладів початкової загальної освіти становила 6269 тис. осіб (на 177 тис. (2,9%) більше у порівнянні з попереднім роком). Частка кваліфікованих вчителів (з дипломом середньої школи старшого ступеня та вище) у початкових школах становила 99,97%. Кількісне співвідношення учнів та вчителів закладів початкової освіти становило 16,9:1. Кількість вчителів закладів початкової загальної освіти становила 3747 тис. осіб (на 108 тис. (3,0%) більше у порівнянні з попереднім роком). Частка кваліфікованих вчителів (з дипломом про спеціальну професійну освіту та вище) у середніх школах склала 99,88%. Кількісне співвідношення учнів та вчителів закладів середньої освіти становило 12,9:1.

Частка кваліфікованих вчителів у школах, які забезпечують здобуття обов'язкової освіти, продовжує зростати. При цьому в сільських школах цей показник покращується швидше, ніж у міських. Розрив між містами та сільськими районами продовжується скорочуватися. У 2019 році у початкових школах частка вчителів зі спеціальною професійною освітою та вище склала 97,3% (на 0,8% більше, ніж у попередньому році), у містах – 99,1%, у сільській місцевості – 96,3%. Відмінність у цьому показнику між містами та сільськими районами була на рівні 2,8% (на 0,7% менше, ніж у попередньому році).

Частка вчителів з дипломом бакалавра та вище у середніх школах становила 87,4% (на 1,1 % більше, ніж торік), у містах – 93,1%, у сільській місцевості – 84,0%. Різниця між містом та сільськими районами була на рівні 9,1% (на 0,5% менша порівняно з попереднім роком).

Структура систем освіти КНР:

- дошкільна освіта;
- молодша середня школа;
- спеціальна корекційна освіта;
- середня школа старшого ступеня;
- вища освіта;
- школи для дорослих;

- приватна освіта;
- китайсько-іноземні спільні навчальні заклади зі статусом юридичної особи

1.1.2.2. Вивчення математики у школах КНР

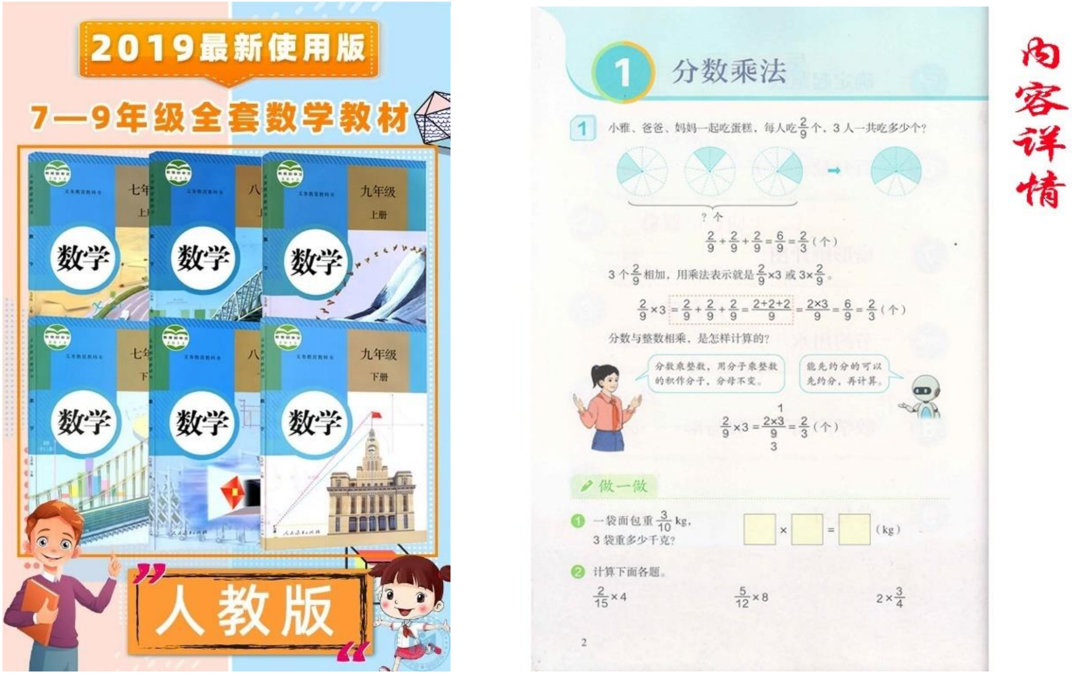


Рис. 1.1. Підручники з математики для молодшої середньої школи

У китайській загальноосвітній школі велика конкуренція. Її причина насамперед це «перенасиченість» класів. У школі, де проходять практику педагогічного столичного університету, у найменшому класі п'ятдесят шість осіб (шостий клас); є класи і по шістдесят, і по сімдесят чоловік в одному класі, причому лінійка класів до букви Е в одній школі. Це конкуренція, що носить зовнішню ознаку. Є конкуренція внутрішнього характеру. Її підтримує держава, яка стимулює методику навчання успіхи школярів.

Середня та вища школа в Китаї платні. Після дев'ятого класу навчання з десятого по дванадцятий класи оплачується батьками. Останні два класи можна назвати підготовчими до технічного інституту та класичного університету.

Рис. 1.2. Шанхайська навчальна програма з математики: підручник, зошит для вправ, книга для вчителя

Головне питання, як покращити сучасну природничо-технічну освіту, протягом кількох років експерименту одержало відповідь – необхідно постійно покращувати математичну освіту і цей висновок роблять наші китайські колеги, про що свідчать багато конференції останнього часу, що проводяться в Китаї.

Рис. 1.3. Шанхайська навчальна програма з математики: підручник, зошит для вправ, книга для вчителя – приклади сторінок

Державні програми, що застосовувалися у шкільній системі, зазнавали змін, в яких враховувалися поточні результати експерименту. У редакції останньої програми з математики 2000 року в пояснювальній записці повідомляється: об'єктом математичних досліджень є просторові форми та кількісні відносини. У даний час математика знаходить все ширше застосування. Математика – це інструмент, за допомогою якого людина бере участь у суспільному житті, вивчається продуктивна праця та навчання, досліджуються явища природи.

1.1.2.3. Зміст математики для 3-річної (обов'язкової) молодшої школи

Алгебра: тотожності - закони індексів, закони квадратного кореня, логарифми; рівняння та нерівності: першого ступеня, квадратні, системи рівнянь (лінійні та квадратичні), ірраціональні, логарифмічні; послідовності та ряди: арифметичні, геометричні.

Геометрія: рівність і подібність, помітні лінії і точки трикутника, кути трикутника, співвідношення між кутами і сторонами, теорема Піфагора, коло, теорема Фалеса, центральний кути, хордовий чотирикутник, дотичний чотирикутник; ймовірність і статистика.

На відміну від західної системи навчання математики з її підвищеною вимогою до еродуктивних форм знань, основний принцип китайського вчителя математики полягає в тому, щоб ставити проблему перед учнями і не втручатися в процес навчання, доки учні самі не знайдуть вирішення проблеми. Такий підхід можна заперечити, адже у наш час розвитку технологій заново винаходити велосипед не залишається часу. Важко сказати, як учні за цією методикою, вирішуватимуть «багатоходові» завдання, що вимагають комбінації знань з різних розділів математики, а не звичайні тестові завдання. Тим не менше, вміння вирішувати математичні тести і до того ж масово - це найважливіший показник рівня математичного знання.

Наступний принцип під час навчання математики у Китаї, полягає у навчанні через вирішення математичних завдань.

При цьому вчитель так організовує навчальний процес, щоб сприяти:

– набуттю учнями нового знання;

- розуміння учнями зв'язку нового матеріалу з попереднім матеріалом;

- оволодіння алгоритмами, операціями (технікою);

- розвитком здатності до гнучкого застосування отриманих знань у різних ситуаціях.

Основна теза у викладанні математики в Китаї така: «Нові знання формуються на основі існуючих знань». Учитель починає урок із повторення попереднього матеріалу і дає поштовх для освоєння нових знань. Новий матеріал подається таким чином, щоб учні могли відчути радість пізнання нового. Учителю дозволяється також і передача готових знань учневі, але в цьому випадку для успішного освоєння та запам'ятовування матеріалу потрібна розробка та використання у навчальному процесі практичної ситуації з життя (кейсу), що призводить до необхідності застосування математики у вирішенні життєвого завдання .

Учням пояснюється, що тільки практика робить знання досконалим, що лише коли базовий матеріал відомий, можна вирішити щось складніше, ніж пропонується на базовому рівні, і що тільки праця дозволяє отримати високі та заслужені результати. Учителі прагнуть домогтися глибокого розуміння учнями нового матеріалу, розуміння його зв'язку з попереднім матеріалом. Практичні навички відпрацьовуються на численних варіативних завданнях із подальшим ускладненням. Наголос робиться на розвиток у здобувачів освіти здатності гнучкого застосування отриманих знань у різних ситуаціях.

Використовуються два основні типи варіацій: концептуальні та процедурні. Концептульні варіації – це розгляд проблеми із різних точок зору. Процедурні варіації – використання різних операцій під час перебування рішення.

Процедурні варіації у свою чергу ділять на три види:

- розширення вихідної задачі шляхом зміни її умови та узагальнення результатів;

– кілька методів розв'язання задачі за різних умов;

– безліч додатків методу та застосування одного й того ж способу до групи подібних завдань.

Велику роль у процедурних варіаціях відіграють візуальні уявлення самих завдань та його розширень. В основі пояснення нового матеріалу лежить широке використання наочності (графічна ілюстрація), поєднання теорії та практики. Для розвитку математичного мислення широко використовується доказ протилежного. Викладання математики має сформувати у здобувачів уявлення про можливості використання математики у різних галузях знань та у практичному житті.

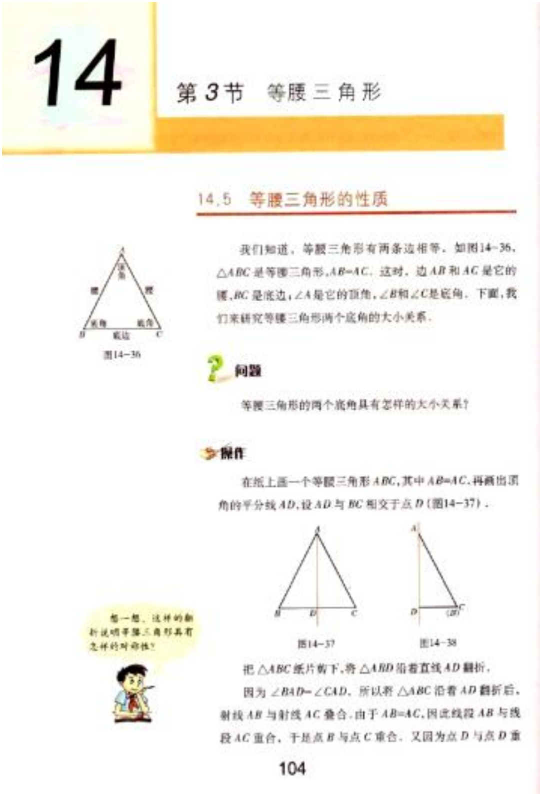
Учителі приділяють велику увагу розвитку в учнів математичного мислення, його гнучкості, творчого підходу до вирішення завдань. Учитель стимулює критичне мислення та дослідницький інтерес учнів, заохочує до розв'язання задачі декількома способами.

Перманентні іспити – це ще одна особливість китайської освіти. Учні часто перевантажені математичними завданнями, а практична цінність одержуваних з таким трудом математичних знань не завжди очевидна. На жаль, нині немає досконалих методик вимірювання глибини та повноти математичного мислення, відсутні об'єктивні методики оцінки трудомісткості навчального процесу здобувачів освіти.

На прикладі розгляду математичної освіти в Китаї можна зробити висновок, що для розвитку математичного мислення мають бути закладені базові знання з математики.

1.1.2.4. Вивчення трикутників у школах Китаю і України: порівняльний аналіз

Геометрія з її фундаментальним поняттям трикутників є наріжним каменем у навчальних програмах з математики багатьох країн. Китай і Україна не є винятком, кожна з яких має свій власний підхід до викладання цієї важливої галузі математики. У цьому порівняльному аналізі ми досліджуватимемо вивчення трикутників у школах Китаю та України, виділяючи ключові подібності та відмінності, а також конкретні приклади проблемних ситуацій, з якими стикаються учні.



14 第3节 等腰三角形

14.5 等腰三角形的性质

我们知道，等腰三角形有两条边相等。如图14-36，△ABC是等腰三角形，AB=AC，这时，边AB和AC是它的腰，BC是底边，∠A是它的顶角，∠B和∠C是底角。下面，我们来研究等腰三角形两个底角的大小关系。

图14-36

问题

等腰三角形的两个底角具有怎样的大小关系？

操作

在纸上画一个等腰三角形ABC，其中AB=AC，再画出顶角的平分线AD，设AD与BC相交于点D（图14-37）。

图14-37 图14-38

想一想，这样的翻折说明等腰三角形具有怎样的对称性？

把△ABC纸片剪下，将△ABD沿着直线AD翻折。

因为∠BAD=∠CAD，所以将△ABC沿着AD翻折后，射线AB与射线AC叠合。由于AB=AC，因此线段AB与线段AC重合，于是点B与点C重合。又因为点D与点D重

104

Рис. 1.4. Акцент на математичному міркуванні.

Сторінка з підручника 7 класу [2]

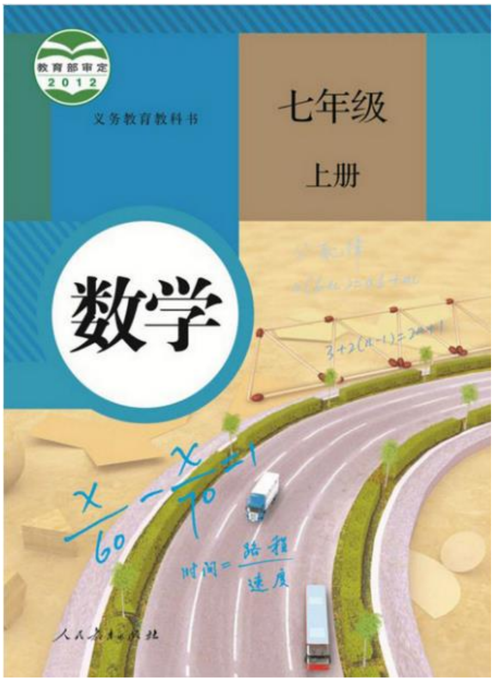
Спільність у вивченні трикутників

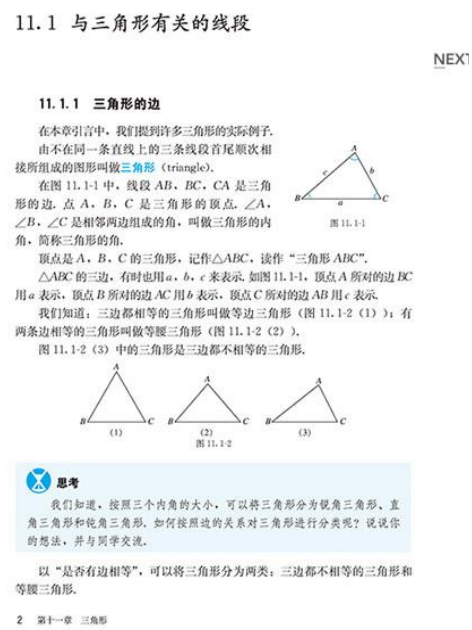
1. Основні визначення. І в китайських, і в українських школах учні знайомляться з основними поняттями трикутників. Вони вивчають визначення трикутника, його сторін, кутів і властивості різних типів трикутників, таких як рівносторонній, рівнобедрений і масштабний.

2. Теореми та постулати. Евклідова геометрія є основою для вивчення трикутників в обох країнах. Учні вивчають постулати Евкліда, які лежать в основі геометричних доказів, і досліджують різноманітні теореми, такі як

теорема Піфагора, теореми конгруенції та властивості подібних трикутників.

3. Геометричні побудови: як китайські, так і українські учні займаються геометричними побудовами за допомогою циркуля та лінійки. Вони вчаться будувати трикутники, ділити кути навпіл, проводити перпендикуляри, що є невід'ємною частиною розв'язування геометричних задач.





11.1 与三角形有关的线段

NEXT

11.1.1 三角形的边

在本章引言中，我们提到许多三角形的实际例子.

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形（triangle）.

在图 11.1-1 中，线段 AB，BC，CA 是三角形的边. 点 A，B，C 是三角形的顶点. $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 是相邻两边组成的角，叫做三角形的内角，简称三角形的角.

图 11.1-1

顶点是 A，B，C 的三角形，记作$\triangle ABC$，读作“三角形 ABC”.

$\triangle ABC$ 的三边，有时也用 a，b，c 来表示. 如图 11.1-1，顶点 A 所对的边 BC 用 a 表示，顶点 B 所对的边 AC 用 b 表示，顶点 C 所对的边 AB 用 c 表示.

我们知道：三边都相等的三角形叫做等边三角形（图 11.1-2（1））；有两条边相等的三角形叫做等腰三角形（图 11.1-2（2））.

图 11.1-2（3）中的三角形是三边都不相等的三角形.

(1) (2) (3)

图 11.1-2

思考

我们知道，按照三个内角的大小，可以将三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形. 如何按照边的关系对三角形进行分类呢？说说你的想法，并与同学交流.

以“是否有边相等”，可以将三角形分为两类：三边都不相等的三角形和等腰三角形.

2 第十一章 三角形

Рис. 1.5. Підручник з геометрії з прикладом

Відмінності у вивченні трикутників

1. Наголос у навчальній програмі:

Китай: китайські школи часто наголошують на ретельному розв'язанні задач і геометричних доказах, зосереджуючись на опануванні евклідової геометрії. Вивчення трикутників включає різноманітні теми для високого рівня складності, такі як теореми про кути, площі трикутників і властивості кіл, вписаних або описаних навколо трикутників.

Україна: українські школи зазвичай дотримуються більш стандартизованої навчальної програми, яка охоплює основні властивості та конструкції трикутників. Акцент робиться на практичних застосуваннях геометрії, таких як обчислення сторін і кутів трикутника в реальних ситуаціях.

2. Підхід до розв’язування задач.

Китай: китайських учнів заохочують до розв’язування складних геометричних задач, що вимагають критичного мислення та творчого підходу. Такі змагання, як Китайська математична олімпіада, часто містять складні задачі про трикутники. Наприклад, учні можуть розв`язувати задачі, пов’язані з точкою Ферма або площею трикутника із заданими кутами.

Україна: українські учні займаються розв’язуванням задач, але, як правило, стикаються з більш простими застосуваннями трикутників. Проблеми можуть включати обчислення кутів у практичних ситуаціях, таких як геодезія чи навігація. Наприклад, знайти висоту флагштока за допомогою подібних трикутників або знайти невідому довжину сторони в тригонометричних програмах.

3. Освітні ресурси:

Китай: доступність освітніх ресурсів у Китаї величезна, і учні часто мають доступ до широкого спектру підручників, онлайн-матеріалів і конкурентних ресурсів, щоб покращити своє розуміння трикутників і геометрії.

Україна: освітні ресурси можуть бути більш обмеженими в Україні, особливо в сільській місцевості. Для вивчення трикутників учні можуть покладатися на традиційні підручники та інструктаж у класі.

Приклади задач на трикутники

Китайський приклад:

Задача. У трикутнику ABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$ і $BC = 6$ см. Знайдіть довжину сторони AC.

Український приклад:

Проблема: геодезист вимірює два кути піднесення до вершини гори. Перший кут дорівнює 32°, а другий 48°. Відстань між двома точками вимірювання на землі становить 3 км. Обчисліть висоту гори.

Отже, Китай і Україна включають вивчення трикутників у свою математичну освіту, проте фокус, підхід до вирішення проблеми та освітні ресурси відрізняються. Китайські учні беруть участь у більш складних математичних змаганнях, наголошуючи на тонкощах евклідової геометрії, тоді як українські учні можуть зосередитися на практичному застосуванні трикутників у сценаріях реального життя. Розуміння цих відмінностей може пролити світло на освітні системи та пріоритети в цих двох країнах.

1.2. Висновки до першого розділу

Отже, вивчення розділу розв’язування трикутників є важливим у шкільному курсі математики з кількох причин, оскільки розв’язування трикутників передбачає розуміння та застосування різних тригонометричних понять, таких як синус, косинус і тангенс, а також закони синусів і косинусів. Вивчення трикутників і тригонометрії є основою для поглибленої математики, фізики, інженерії та інших галузей STEM. Розв’язування трикутників вимагає від учнів критичного мислення та застосування математичних принципів до реальних ситуацій. Адаптація методів навчання та матеріалів до онлайн-платформ, зберігаючи залучення учнів, є педагогічним завданням.

Китай і Україна включають вивчення трикутників у свою математичну освіту, проте фокус, підхід до вивчення проблеми та освітні ресурси відрізняються.

Розділ 2. Методичні особливості вивчення розділу "Розв’язування трикутників" в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання»

Враховуючи на розроблену концепцію, розглянемо методику навчання розділу «Розв’язування трикутників» в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

2.1. Проведення уроків розділу «Розв'язування трикутників» в умовах дистанційного навчання

Розглянемо методичні особливості уроків розділу «Розв’язування трикутників» в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

2.1.1. Розв’язування трикутників. Прикладні задачі.

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання, отримані на попередніх уроках;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати отримані знання та навички, правильно користуватися креслярським приладдям;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: закріплення знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання

- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

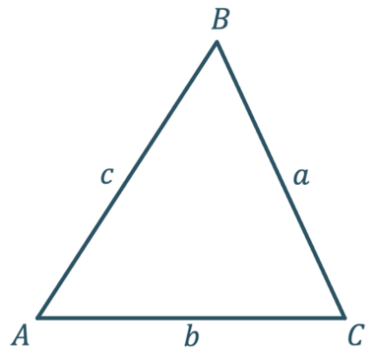
// Розв'язування трикутників

- Як на вашу думку, що означає розв'язати трикутник?

Розв'язати трикутник – *означає знайти його невідомі сторони і кути за відомими сторонами і кутами.*

- Які ви вже знаєте корисні співвідношення для розв'язування довільного трикутника?

(учні висловлюють власну думку)



- Чому дорівнює сума градусних мір кутів A, B і C?

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \left(\begin{array}{c}\textit{Теорема про}\\ \textit{суму кутів}\\ \textit{трикутника}\end{array}\right)$$

- Поясніть, що необхідно знати, щоб за теоремою косинусів знайти сторону BC?

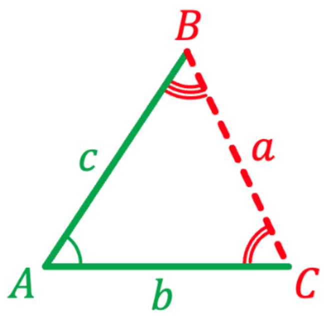
$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos\,B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,B \end{array}\right| \ (\textit{Теорема косинусів})$$

- Сформулюйте теорему синусів для трикутника ABC

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \ (\textit{Теорема синусів})$$

// Приклади розв’язування довільних трикутників

1. За двома сторонами і кутом між ними



Дано:

$c, b, \angle A$

Знайти:

$a, \angle B, \angle C$

Розв’язання:

- Поясніть, як за допомогою теореми косинусів знайти сторону a?

1. $a = \sqrt{c^2 + b^2 - 2cb\cos A}$

- Поясніть, як за допомогою наслідку з теореми косинусів знайти $\angle B$?

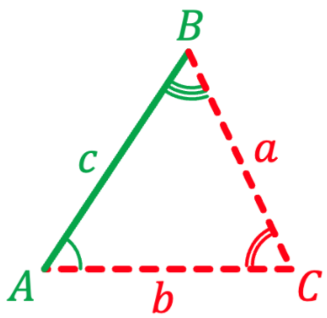
2. $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

**Далі знаходимо $\angle B$ за допомогою таблиць або калькулятора*

- Поясніть, як за допомогою теореми про суму кутів трикутника знайти $\angle C$?

3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$

2. За стороною і двома кутами



Дано:

$c, \angle A, \angle B$

Знайти:

$a, b, \angle C$

Розв'язання:

- Поясніть, як за допомогою теореми про суму кутів трикутника знайти $\angle C$?

1. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$

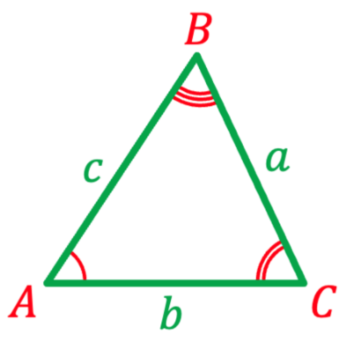
- Поясніть, як за допомогою теореми синусів знайти сторону b?

2. $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B} \to b = \dfrac{c \sin B}{\sin C}$

- Поясніть, як за допомогою теореми синусів знайти сторону a?

3. $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} \to a = \dfrac{c \sin A}{\sin C}$

3. За трьома сторонами



Дано:

a, b, c

Знайти:

$\angle A, \angle B, \angle C$

Розв'язання:

- Поясніть, як за допомогою наслідку з теореми косинусів знайти кути A і B?

1. $\cos A = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$
2. $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

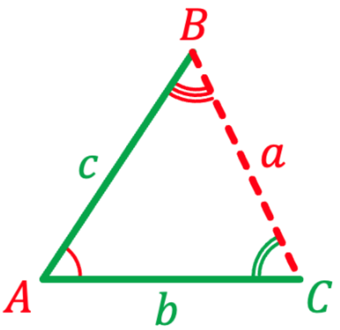
**Далі знаходимо кути A і B за допомогою таблиць або калькулятора*

- Поясніть, як за допомогою теореми про суму кутів трикутника знайти $\angle C$?

3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$

4. За двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них

**Ця задача має ІІ варіанти розв'язання, а також може мати 2, 1 або не мати розв'язку.*



І спосіб (за теоремою синусів)

Дано:

$c, b, \angle C$

Знайти:

$a, \angle A, \angle B$

Розв'язання:

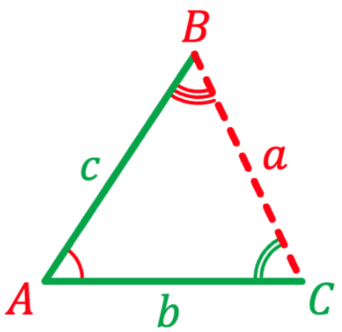
1. $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$; $\sin B = \dfrac{b \sin C}{c}$

В залежності від значення синуса кута В задача може мати 2, 1 або не мати розв'язку. Так як за теоремою про суму кутів трикутника $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$, то* ***має виконуватися умова* $\boldsymbol{\angle B + \angle C < 180°}$ **і** одночасно значення синуса кута B має задовольняти рівність $\boldsymbol{\sin B = \dfrac{b \sin C}{c}}$

2. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$

**Далі знаходимо $\angle B$ за допомогою таблиць або калькулятора*

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$; $a = \dfrac{c \sin A}{\sin C}$



II спосіб (за теоремою косинусів)

Дано:

$c, b, \angle C$

Знайти:

$a, \angle A, \angle B$

Розв’язання:

1. $$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$
   $$a^2 = \sqrt{c^2 - b^2 + 2ba\cos C}$$

В залежності від значення* a *задача може мати 2, 1 або не мати розв’язку. Значення* a *може бути від’ємним, але* ***сторона трикутника – це не від’ємна величина, також сторона трикутника не може дорівнювати нулю.*

2. $$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

**Далі знаходимо* $\angle B$ *за допомогою таблиць або калькулятора*

3. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$

III. Розв’язування завдань

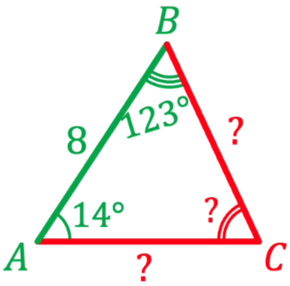
Невідомі сторони знаходити будемо з точністю до сотих сантиметра, кути в разі використання калькулятора – з точністю до мінути або з точністю до градуса у разі використання таблиць

№1

Розв’яжіть ΔABC за стороною і двома кутами:

1) $AB = 8$ см, $\angle A = 14°$, $\angle B = 123°$
2) $AB = 6$ см, $\angle A = 17°$, $\angle C = 76°$
3) $BC = 10$ см, $\angle B = 92°$, $\angle C = 54°$
4) $AC = 7$ см, $\angle C = 44°$, $\angle A = 28°$

Розв'язання:



1

За теоремою про суму кутів трикутника:

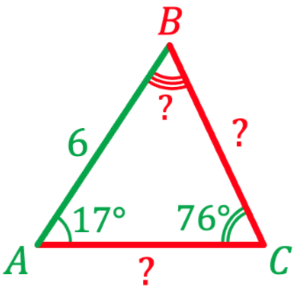
$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 137° = 43°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{8 \cdot 0{,}8387}{0{,}6810} \approx 9{,}85 \text{ см}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{8 \cdot 0{,}2419}{0{,}6810} \approx 2{,}84 \text{ см}$$

Відповідь: $\angle C = 43°$, $AC \approx 9{,}85$ см, $BC \approx 2{,}84$ см



2

За теоремою про суму кутів трикутника:

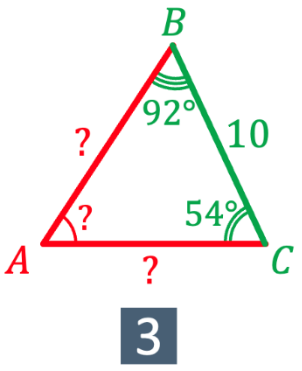
$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 93° = 87°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{6 \cdot 0{,}9986}{0{,}9703} \approx 6{,}17 \text{ см}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{6 \cdot 0{,}2924}{0{,}9703} \approx 1{,}8 \text{ см}$$

Відповідь: $\angle B = 87°$, $AC \approx 6{,}17$ см, $BC \approx 1{,}8$ см



За теоремою про суму кутів трикутника:

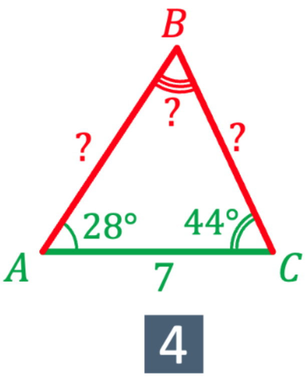
$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - 146° = 34°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \to AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{10 \cdot 0{,}8090}{0{,}5592} \approx 14{,}47 \text{ см}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \to AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{10 \cdot 0{,}9994}{0{,}5592} \approx 17{,}87 \text{ см}$$

Відповідь: $\angle A = 34°$, $AB \approx 14{,}47$ см, $AC \approx 17{,}87$ см



За теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 72° = 108°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \to AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{7 \cdot 0{,}6946}{0{,}9511} \approx 5{,}12 \text{ см}$$

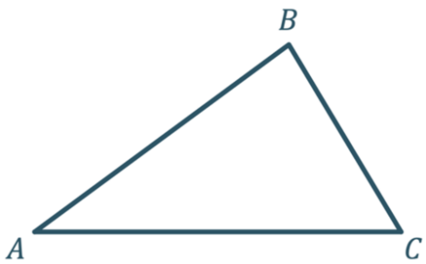
$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \to BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{7 \cdot 0{,}4695}{0{,}9511} \approx 3{,}46 \text{ см}$$

Відповідь: $\angle B = 108°$, $AB \approx 5{,}12$ см, $BC \approx 3{,}46$ см**№2**

Розв'яжіть ΔABC за трьома сторонами:

1) $AB = 5$ см, $AC = 4$ см, $BC = 8$ см
2) $AB = 9$ см, $AC = 7$ см, $BC = 13$ см

Розв'язання:



За наслідком з теореми косинусів:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{23}{40} = -0{,}575$$

$$\angle A \approx 125°5'$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{4^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{16 + 64 - 25}{64} = \frac{55}{64} \approx 0{,}8593$$

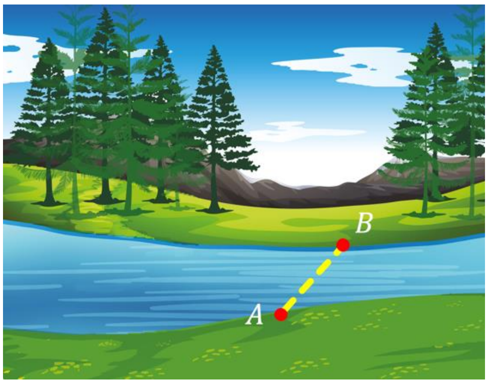
$\angle C \approx 30°45'$

За теоремою про суму кутів трикутника:

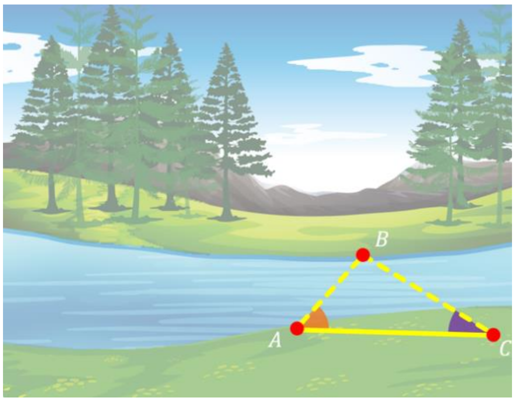
$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 155°50' \approx 24°10'$

Відповідь: $\angle A \approx 125°5'$; $\angle B \approx 24°10'$; $\angle C \approx 30°45'$

№3



1) Вам потрібно побудувати міст через річку. Щоб зробити попередній розрахунок довжини мосту і його вартості, необхідно знати його довжину. Складіть алгоритм знаходження дожини мосту, якщо ви знаходитеся біля точки початку мосту А і у вас є рулетка та прилад для вимірювання кутів між двома недосяжними точками.
2) Виразіть довжину мосту AB через AC, $\angle A$ і $\angle C$
3) Знайдіть довжину мосту AB, якщо $AC = 28$ м, $\angle A = 38°$ і $\angle C = 75°$. Відповідь округліть до 1 м



Розв'язання:

1) Потрібно обрати ще одну досяжну точку C так, щоб утворився ΔABC, потім рулеткою вимірюємо відстань від точки A до точки C, а приладом для вимірювання кутів вимірюємо кути A і C.

2) За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$

Так як $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$, то:

$\sin\big(180° - (\angle A + \angle C)\big) = \sin(\angle A + \angle C)$

Отже $\sin B = \sin(\angle A + \angle C)$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin(\angle A + \angle C)} \rightarrow \boldsymbol{AB} = \frac{\boldsymbol{AC \cdot \sin C}}{\boldsymbol{\sin(\angle A + \angle C)}}$$

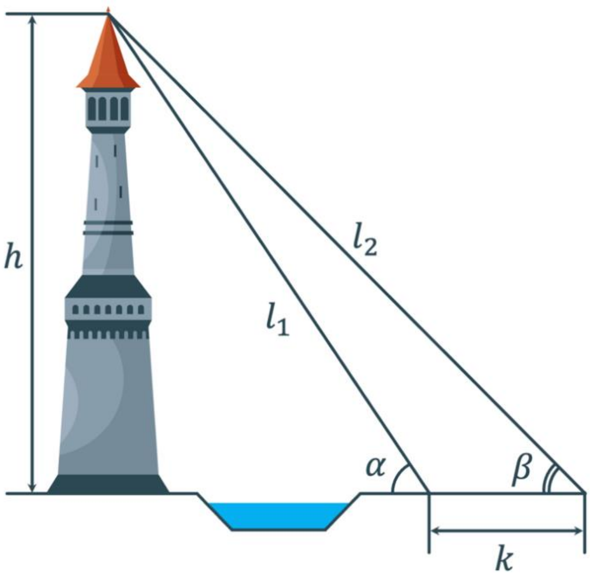
3)

$$AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin(\angle A + \angle C)} \approx \frac{28 \cdot 0{,}9659}{0{,}9205} \approx 29{,}38 \text{ м}$$

$AB \approx 29$ м

Якщо округлити довжину мосту до 1 м, то отримаємо ≈ 29 м, тобто менше від дійсної довжини – це ще одна причина того, що кінцева вартість будівництва зазвичай вища від попереденіх підрахунків.

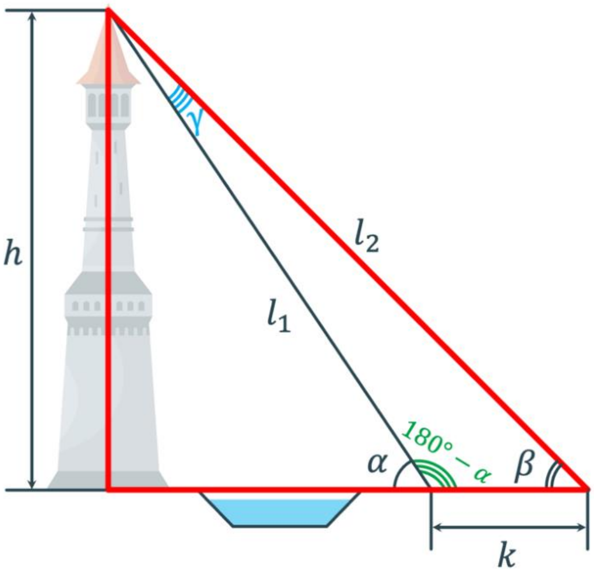
№4



1) Вам потрібно знайти висоту вежі h і довжину тросів l_1 і l_2, що направлені від вершини вежі до землі. Відстань до вежі виміряти не можливо, так як вежу оточує оборонний рів з водою, але ви можете виміряти відстань k, кути α і β. Поясніть, як це зробити?

2) Знайдіть висоту вежі і довжини тросів, якщо $k = 3$ м, $\angle\alpha = 74°$, $\angle\beta = 68°$. Відповідь округліть до 1 м

Розв'язання:



1) Знаючи кут α, можемо знайти суміжний з ним кут, а потім за теоремою про суму кутів трикутника знайдемо кут γ. Довжини тросів l_1 і l_2 можемо знайти за теоремою синусів. Висоту h легко знайти за означенням синуса, так як нам відома гіпотенуза l_2 і кут β

2)

Знайдемо кут, суміжни з кутом α:

$$180° - \alpha = 180° - 74° = 106°$$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$$\gamma = 180° - (106° + 68°) = 6°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{k}{\sin 6°} = \frac{l_2}{\sin 106°} \to l_2 = \frac{k \cdot \sin 106°}{\sin 6°} \approx \frac{3 \cdot 0{,}9613}{0{,}1045} \approx 27{,}59$$

$$\frac{k}{\sin 6°} = \frac{l_1}{\sin 68°} \to l_1 = \frac{k \cdot \sin 68°}{\sin 6°} \approx \frac{3 \cdot 0{,}9272}{0{,}1045} \approx 26{,}61$$

Якщо округлити довжину тросів до 1 м, то отримаємо, що:

$l_1 \approx 27$ м

$l_2 \approx 28$ м

За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника:

$$\sin \beta = \frac{h}{l_2}$$

$$h = \sin \beta \cdot l_2 = \sin 68° \cdot 26{,}61 \approx 0{,}9272 \cdot 26{,}61 \approx 24{,}67$$

Якщо округлити висоту h до 1 м, то отримаємо, що $h \approx 25$ м

Відповідь: $l_1 \approx 27$ м, $l_2 \approx 28$ м, $h \approx 25$ м

IV. Підсумок уроку

- Які співвідношення ми використовуємо, щоб розв’язати трикутник?
- За якою теоремою ми можемо розв’язати трикутник, якщо в ньому відомо:

  А) Три сторони і кут між ними

  Б) Дві сторони і кут, протилежний одній з них

  С) Сторона і прилеглі до неї кути
- Чи за будь-якими відомими трьома елементами трикутника, можна знайти його інші елементи? *(Трикутник не можливо розв’язати, якщо відомо тільки три його кути і не відома жодна сторона)*

V. Домашнє завдання

Опрацювати §13

Виконати № 584, 586, 590, 593

Тема: Розв’язування трикутників. Прикладні задачі.

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання, отримані на попередніх уроках;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати отримані знання та навички, застосовувати їх для розв’язування прикладних задач;

правильно користуватися креслярським приладдям;

- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: закріплення знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

VI. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

VII. Актуалізація опорних знань

- Які співвідношення ми використовуємо, щоб розв'язати трикутник?
- За якою теоремою ми можемо розв'язати трикутник, якщо в ньому відомо:

  А) Три сторони і кут між ними

  Б) Дві сторони і кут, протилежний одній з них

  С) Сторона і прилеглі до неї кути

- Чи за будь-якими відомими трьома елементами трикутника, можна знайти його інші елементи? *(Трикутник не можливо розв'язати, якщо відомо тільки три його кути і не відома жодна сторона)*

VIII. Розв'язування завдань

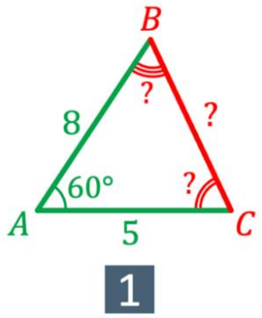
Невідомі сторони знаходити будемо з точністю до сотих сантиметра, кути в разі використання калькулятора – з точністю до мінути або з точністю до градуса у разі використання таблиць

№1

Розв’яжіть ΔABC за двома сторонами і кутом між ними

1) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 60°$
2) $AC = 6$ см, $BC = 7$ см, $\angle C = 47°$
3) $AB = 9$ см, $AC = 10$ см, $\angle A = 124°$
4) $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $\angle B = 114°$

Розв’язання:



За теоремою косинусів:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A}$$

$$BC = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{89 - 40}$$

$$= \sqrt{49} = 7 \text{ см}$$

За наслідком з теореми косинусів:

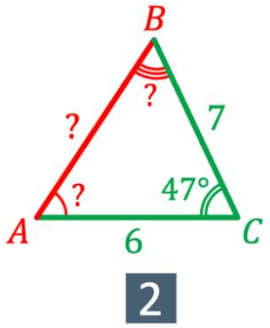
$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{64 + 49 - 25}{112} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$$

$\angle B \approx 38°12'$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle C = 180° - (\angle C + \angle B) \approx 180° - 98°12' \approx 81°48'$

Відповідь: $BC = 7$ см, $\angle B \approx 38°12'$, $\angle C \approx 81°48'$



За теоремою косинусів:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C}$$

$$AB \approx \sqrt{6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 0{,}6810} \approx \sqrt{85 - 57{,}2} \approx \sqrt{27{,}8} \approx 5{,}27 \text{ см}$$

За наслідком з теореми косинусів:

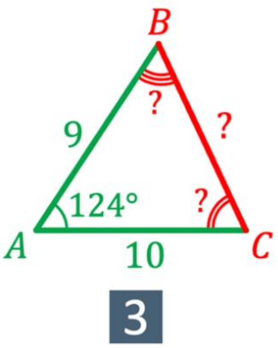
$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \approx \frac{5{,}27^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 5{,}27 \cdot 7} \approx \frac{27.77 + 49 - 36}{73.78}$$
$$\approx \frac{40.77}{73.78} \approx 0.5526$$

$\angle B \approx 56°27'$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle C = 180° - (\angle C + \angle B) \approx 180° - 103°27' \approx 76°33'$

Відповідь: $AB \approx 5.27$ см, $\angle B \approx 56°27'$, $\angle C \approx 76°33'$



За теоремою косинусів:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A}$$

$BC \approx \sqrt{9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot (-0{,}5592)} \approx \sqrt{181 + 100{,}66} \approx \sqrt{281{,}66} \approx 16{,}78$ смЗа наслідком з теореми косинусів:

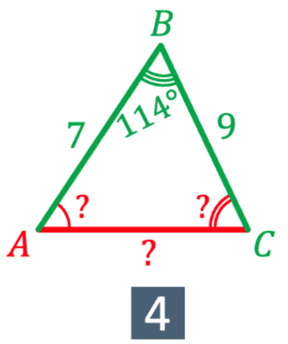
$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} \approx \frac{10^2 + 16{,}78^2 - 9^2}{2 \cdot 10 \cdot 16{,}78} \approx \frac{100 + 281{,}57 - 81}{335{,}6}$$
$$\approx \frac{300{,}57}{335{,}6} \approx 0.8956$$

$\angle C \approx 26°24'$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) \approx 180° - 150°24' \approx 29°36'$

Відповідь: $BC \approx 5.27$ см, $\angle B \approx 29°36'$, $\angle C \approx 26°24'$



За теоремою косинусів:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B}$$

$AC \approx \sqrt{7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (-0,4067)} \approx \sqrt{130 + 51,24} \approx \sqrt{181,24} \approx$ 13,46 смЗа наслідком з теореми косинусів:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \approx \frac{7^2 + 13,46^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 13,46} \approx \frac{49 + 181,17 - 81}{188,44}$$

$$\approx \frac{149,17}{188,44} \approx 0.7916$$

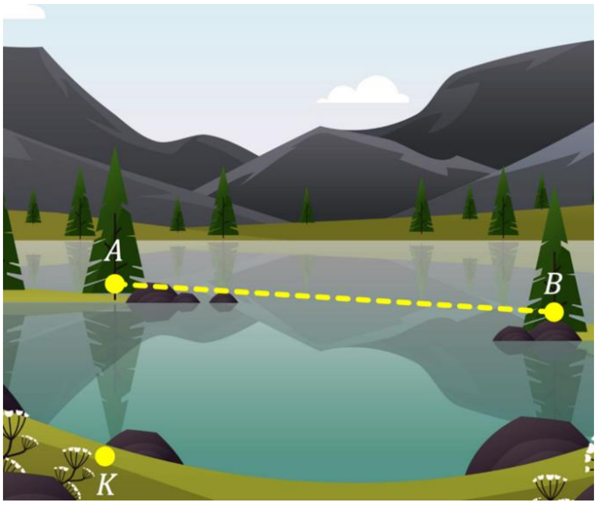
$\angle A \approx 37°39'$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) \approx 180° - 151°39' \approx 28°21'$

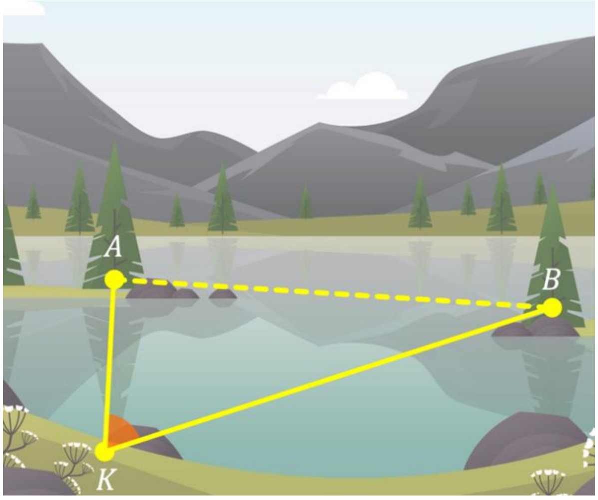
Відповідь: $AC \approx 13,46$ см, $\angle A \approx 37°39'$, $\angle C \approx 28°21'$

№2



Ви знаходитеся у точці K. Поясніть, як за допомогою дальноміра *(прилад для знаходження відстані до об'єкта без безпосередніх вимірювань на місцевості)* і астролябії *(прилад, за допомогою якого можна вимірювати кути)* дізнатися, більшою чи меншою за 45 м є відстань між двома недоступними точками A і B?

Нехай за вимірами $KA = 47$ м, $KB = 58$ м, $\angle AKB = 50°$. Дайте відповідь на запитання.



Розв'язання:

За теоремою косинусів:

$$AB = \sqrt{KA^2 + KB^2 - 2 \cdot KA \cdot KB \cdot \cos K} = \sqrt{47^2 + 58^2 - 2 \cdot 47 \cdot 58 \cdot 0{,}6428}$$
$$= \sqrt{2209 + 3364 - 3504{,}55} = \sqrt{2068{,}45} \approx 45{,}48$$

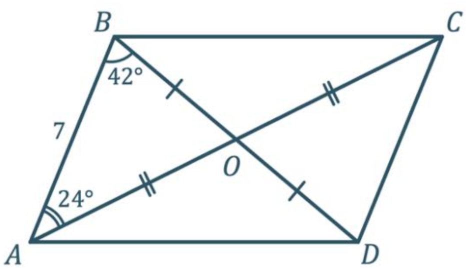
Отже $AB > 45$

Відповідь: $AB > 45$

№3

Сторона паралелограма дорівнює 6 см і утворює з діагоналями паралелограма кути $27°$ і $42°$. Знайдіть другу сторону і кути паралелограма.

Розв'язання:



- Що ми вже знаємо про діагоналі паралелограма?

Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, отже:

$AO = OC$

З ΔAOB за теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle AOB = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 66° = $$
$$= 114°$$

З ΔAOB за теоремою синусів:

$$\frac{AO}{\sin B} = \frac{AB}{\sin O} \rightarrow AO = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin O} = \frac{7 \cdot 0{,}6692}{0{,}9135} \approx 5{,}13$$

Так як $AO = OC$, то $AC = 2AO \approx 2 \cdot 5{,}13 \approx 10{,}26$

З ΔABC за теоремою косинусів:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{49 + 105{,}27 - 143{,}64 \cdot 0{,}9114}$$
$$= \sqrt{154{,}27 - 130{,}92} = \sqrt{23{,}35} \approx 4{,}8 \text{ см}$$

За теоремою про властивість суміжних кутів:

$$\angle BOC = 180° - \angle AOB = 180° - 114° = 66°$$

З ΔABC за наслідком з теореми косинусів:

$$\cos C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} \approx \frac{23.04 + 105{,}27 - 49}{98{,}49} \approx 0{,}8053$$

$$\angle C \approx 36°21'$$

З ΔBOC за теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle CBO = 180° - (\angle BOC + \angle BCO) \approx 180° - 102°21' \approx 77°39'$$

За основною властивістю вимірювання кутів:

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC \approx 42° + 77°39' \approx 119°39'$$

$$\angle BAD + \angle ABC = 180° \left(\begin{matrix}\textit{Як внутрішні односторонні кути} \\ \textit{при } AD \parallel BC \textit{ і січній } AB\end{matrix}\right)$$

$$\angle BAD = 180° - \angle ABC \approx 180° - 119°39' \approx 60°21'$$

За властивістю кутів паралелограма:

$$\angle BAD = \angle BCD \approx 60°21'$$

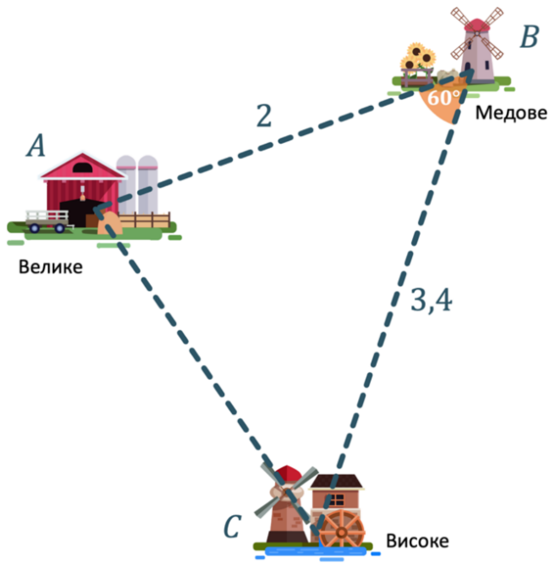
$$\angle ABC = \angle CDA \approx 119°39'$$

Відповідь: 4,8 см; $60°21'$; $119°39'$

№4

Між селами Велике, Медове і Високе вирішили заасфальтувати дороги. Відстань між Великим і Медовим дорівнює 2 км, між Медовим і Високим – 3,4 км, а відрізок дороги між Великим і Високим видно з медового під кутом 60°. Бригада, що буде працювати, може асфальтувати 0,4 км дороги в день. Чи встигне бригада впоратися до приїзду комісії, якщо роботи розпочато 22 липня, а комісія приїздить 8 серпня?

Розв'язання:



Знайдемо відстань між Великим і Високим:

З ΔABC за теоремою косинусів:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B}$$
$$= \sqrt{4 + 11{,}56 - 6{,}8} \approx 2{,}9$$

Загальна довжина дороги, яку необхідно асфальтувати бригаді, дорівнює периметру ΔABC:

$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC =$$
$$= 2 + 3{,}4 + 2{,}96 =$$
$$= 8{,}36 \text{ км}$$

Так як комісія вже приїде 8 серпня, то на виконання у бригади є 17 днів. За 17 днів бригада встигне асфальтувати:

$$17 \cdot 0{,}4 = 6{,}8 \text{ км дороги}$$

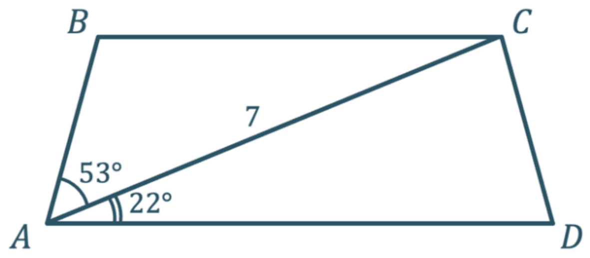
Отже бригада не встигне виконати роботу до приїзду комісії.

Відповідь: не встигне

№5

AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$, $AC = 7$ см, $\angle BAC = 53°$, $\angle CAD = 22°$. Знайдіть сторони і кути трапеції.

Розв'язання:



➢ Що ви вже знаєте про внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?

Ці кути є рівними, тому:

$\angle CAD = \angle BCA = 22°$

Розглянемо ΔABC:

За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 75° = 105°$

За теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \to AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{7 \cdot 0{,}3746}{0{,}9659} \approx 2{,}72 \text{ см}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \to BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{7 \cdot 0{,}7986}{0{,}9659} \approx 5{,}78 \text{ см}$$

За основною властивістю вимірювання кутів:

$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 53° + 22° = 75°$

Так як трапеція $ABCD$ – рівнобічна, то кути при основах є рівними, отже:

$\angle BAD = \angle CDA = 75°$

$\angle ABC = \angle BCD = 105°$

$AB = CD \approx 2{,}72$ см

Розглянемо ΔACD:

За теоремою про суму кутів трикутника:

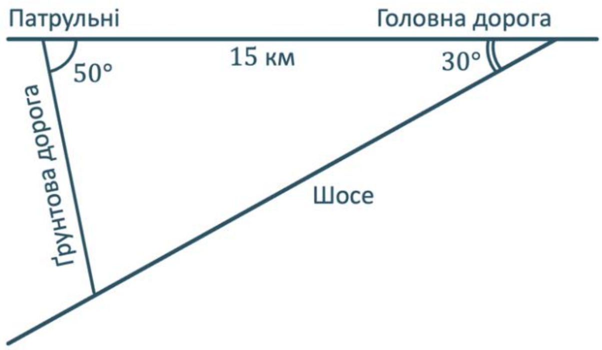
$\angle C = 180° - (\angle A + \angle D) = 180° - 97° = 83°$

За теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{AD}{\sin C} \rightarrow AD = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin D} = \frac{7 \cdot 0{,}9925}{0{,}9659} \approx 7{,}19 \text{ см}$$

Відповідь: $75°$; $105°$; $\approx 2{,}72$ см; $\approx 7{,}19$ см

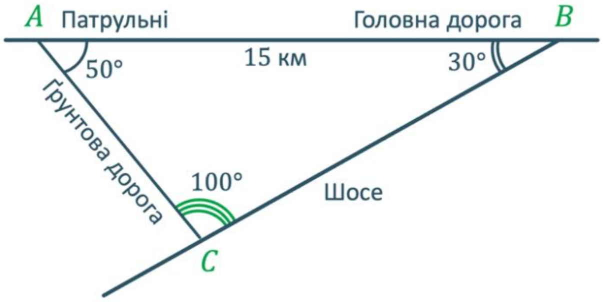
№6



О $7:00$ порушник правил дорожнього руху повернув з головної дороги і помчав уздовж шосе зі швидкістю 170 км/год.

О 7:01 екіпаж патрульної поліції отримав наказ затримати порушника й помчав йому навперейми ґрунтовою дорогою зі швидкістю 85 км/год. Чи встигнуть патрульні зупинити порушника на перехресті шосе і ґрунтової дороги? Чи варто одразу викликати вертоліт для допомоги?

Розв'язування:



Знайдемо відстань, яку необхідно подолати патрульним:

З ΔABC за теоремо про суму кутів трикутника:

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) =$$
$$= 180° - 80° = 100°$$

За теоремою косинусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \to AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{15 \cdot 0{,}5}{0{,}9848} \approx 7{,}62 \text{ км}$$

Знайдемо відстань від головної дороги до ґрунтової через шосе:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \to BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{15 \cdot 0{,}7660}{0{,}9848} \approx 11{,}67 \text{ км}$$

Дізнаємося, за який час подолають відстань 7,62 км патрульні:

$$t_{\text{патрульні}} = l_{\text{патрульні}} : v_{\text{патрульні}} = 7{,}62 : 85 \approx 0{,}09 \text{ год}$$

$$0{,}09 \text{ год} = 0{,}09 \cdot 60 \text{ хв} \approx 5{,}4 \text{ хв}$$

Дізнаємося, за який час порушник подолає відстань від головної дороги до ґрунтової по шосе:

$$t_{\text{порушник}} = l_{\text{порушник}} : v_{\text{порушник}} = 11{,}67 : 170 \approx 0{,}07 \text{ год}$$

$$0{,}09 \text{ год} = 0{,}07 \cdot 60 \text{ хв} \approx 4{,}2 \text{ хв}$$

Так як патрульні опиняться в точці C о 7 год 6,4 хв, а порушник мине цю точку о 7 год 4,2 хв, то патрульні не встигнуть зупини порушника і необхідно надати ще один наказ, що допоможе затримати порушника.

Відповідь: екіпаж не встигне затримати порушника на перехресті, тому необхідно одразу викликати вертоліт для допомоги.

IX. Підсумок уроку

- Дати відповідь на запитання учнів
- Індивідуальна робота з учнями, що не зрозуміли матеріал

X. Домашнє завдання

Повторити §13

Виконати № 582, 588, 595, 600

2.1.2. Формули для знаходження площі трикутника

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти формули для знаходження площі трикутника;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та доречно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

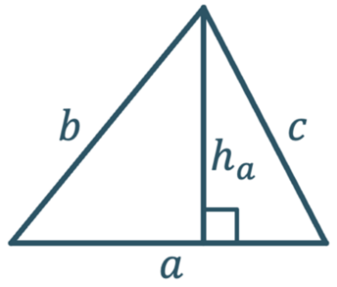
Хід уроку

XI. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

XII. Вивчення нового матеріалу

// Формули для знаходження площі трикутника



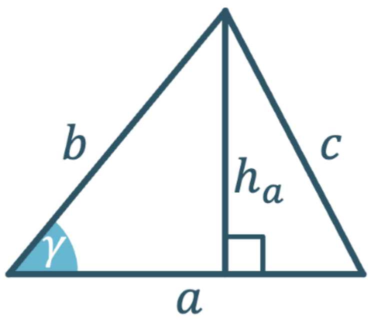
- За якою формулою ви вже знаходили площу трикутника у 8 класі?

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

- Спробуйте виразити висоту h_a через синус кута γ і отримане значення підставити у відому Вам формулу

$\sin\gamma = \frac{h_a}{b} \rightarrow \boldsymbol{h_a = b\sin\gamma}$

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a \\ h_a &= b\sin\gamma \end{aligned}\right| \rightarrow S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$



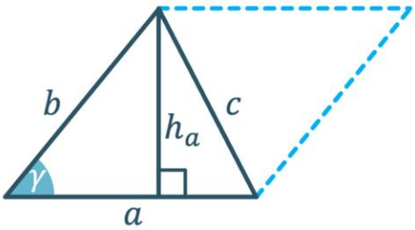
1. **Формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними**

Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

- Пригадайте формулу площі паралелограма, як тепер інакше можемо її записати?

(Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони $S = ah_a$)



НАСЛІДОК

Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сторін на синус кута між ними.

$$\boldsymbol{S_{\text{паралелограма}} = ab\sin\gamma}$$

2. **Формула Герона**

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника

- Поясніть, як знаючи тільки сторони трикутника знайти будь-яку його сторону?

Висоту, що проведена до певної сторони можна виразити з відомої нам формули площі трикутника, а саму площу можна знайти за формулою Герона.

$h_a = \dfrac{2S}{a}$

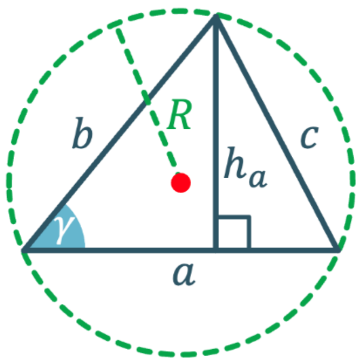
НАСЛІДОК

Найбільшою висотою є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та, що проведена до найбільшої сторони

3. Формула площі трикутника за радіусом описаного кола

$$\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R}}$$

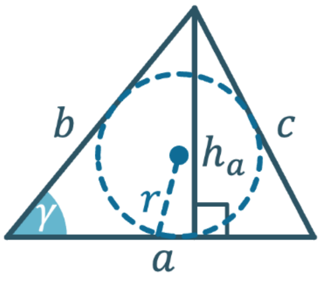
R – радіус кола, описаного навколо трикутника.



- Виразіть з цієї формули радіус описаного кола

Формула для обчислення радіуса описаного кола навколо довільного трикутника:

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S}}$$



4. Формула площі трикутника за радіусом вписаного кола

$$\boldsymbol{S = rp}$$

r – радіус кола, вписаного у трикутник;

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ – півпериметр трикутника;}$$

НАСЛІДОК

Площу S будь-якого описаного многокутника можна знайти за формулою:

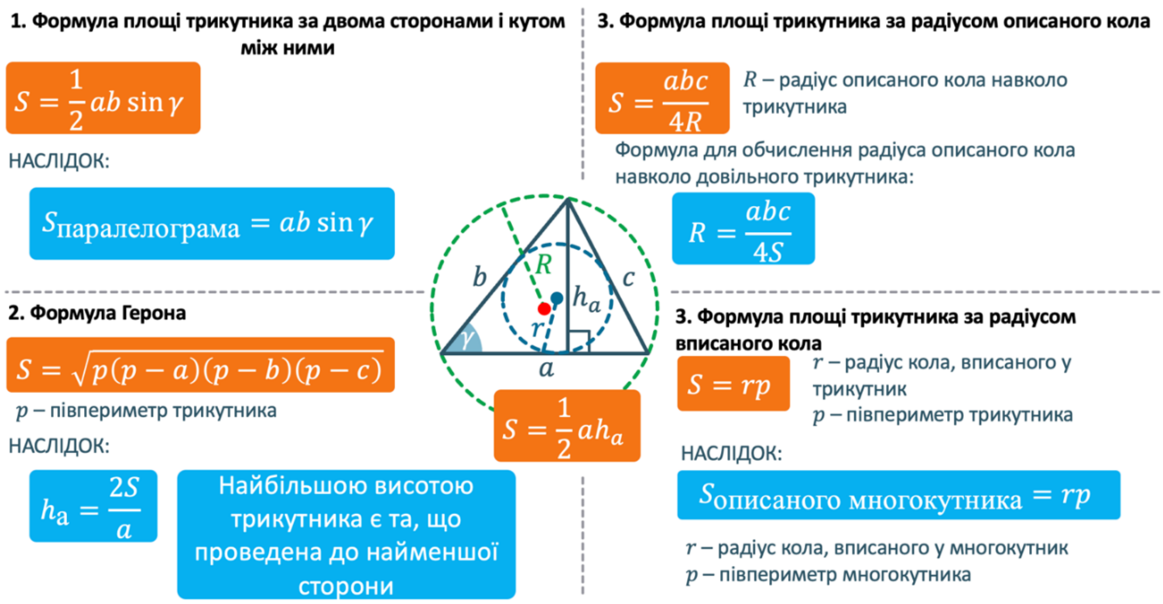
$$\boldsymbol{S_{\text{описаного многокутника}} = rp}$$

r – радіус кола, вписаного у многокутник;

p – півпериметр многокутника;

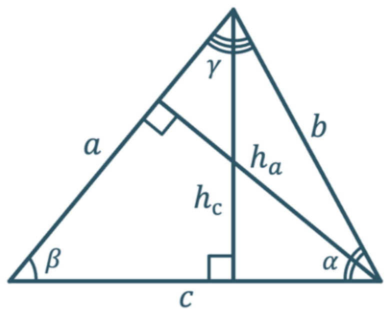
**За бажанням ці формули і наслідки можна довести за підручником на додаткових уроках чи гуртках.*

Можливий запис у зошиті:



XIII. Розв’язування завдань

№1



Укажіть формули, за якими можна знайти площу трикутника:

1) $S = ac\sin\beta$
2) $S = \frac{1}{2}ah_c$
3) $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ch_c}$
4) $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$
5) $\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$
6) $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}cb\sin\alpha}$

№2

m і n – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

1) $m = 4$ см, $n = 7$ см, $\gamma = 30°$
2) $m = 6$ см, $n = 8$ см, $\gamma = 135°$

Розв’язання:

$$S = \frac{1}{2}mn\sin\gamma$$

1) $S = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot \sin 30° = 14\cdot\frac{1}{2} = 7$ см^2

2) $S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot \sin 135° = 48\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}$ см^2

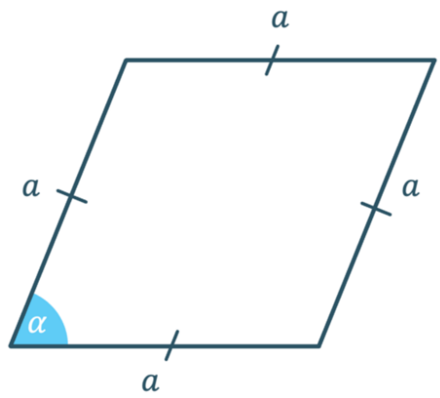
Відповідь: 1) 7 см^2; 2) $24\sqrt{2}$ см^2

№3

Обчисліть площу ромба:

1) Сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут – 30°
2) Сторона якого дорівнює 10 см, а тупий кут 120°

Розв'язання:



➢ Доведіть, що формула площі ромба $S_{\text{ромб}} = a^2 \sin\alpha$

Ромб – це *паралелограм*, у якого всі сторони рівні.

Отже:

$$S = a \cdot a \cdot \sin\alpha = a^2 \sin\alpha$$

1) $S = 8^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ см}^2$

2) $S = 10^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ см}^2$

Відповідь: 1) 32 см^2; 2) $50\sqrt{3} \text{ см}^2$

№4

А) Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють:

1) $13 \text{ см}, \ 14 \text{ см}, \ 15 \text{ см}$
2) $17 \text{ см}, \ 25 \text{ см}, \ 26 \text{ см}$

Б) Знайдіть найменшу висоту першого трикутника і найбільшу висоту другого трикутника

Розв'язання:

Знайдемо площу за допомогою формули Герона.

1) $13 \text{ см}, \ 14 \text{ см}, \ 15 \text{ см}$

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ см}^2$$

Так як найменша висота лежить навпроти найбільшої сторони, то:

$$h_{\text{найменша}} = \frac{2S}{\text{набільша сторона}} = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{168}{15} = 11{,}2 \text{ см}$$

2) $17 \text{ см}, \ 25 \text{ см}, \ 26 \text{ см}$

$$p = \frac{17 + 25 + 26}{2} = 34 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)} = \sqrt{34 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 8} = \sqrt{41616} = 204 \text{ см}^2$$

Так як найбільша висота лежить навпроти найменшої сторони, то:

$$h_{\text{найбільша}} = \frac{2S}{\text{найменша сторона}} = \frac{2 \cdot 204}{17} = \frac{408}{17} = 24 \text{ см}$$

Відповідь: 1) 84 см^2, $h_{\text{найменша}} = 11{,}2 \text{ см}$; 2) 204 см^2, $h_{\text{найбільша}} = 24 \text{ см}$

№5

Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $150°$, а його площа – 16 см^2. Знайдіть сторони трикутника.

Розв'язання:

Так як трикутник рівнобедрений, то його бічні сторони є рівними.

Нехай:

a – основа трикутника;

b – бічна сторона;

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \sin 150° = \frac{1}{2} b^2 \sin 30° = \frac{b^2}{4}$$

$$b^2 = 4S$$

$$b = \sqrt{4S} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}$$

За теоремою косинусів:

$$a = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 150^\circ} = \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos 150^\circ} =$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos 30^\circ} = \sqrt{2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

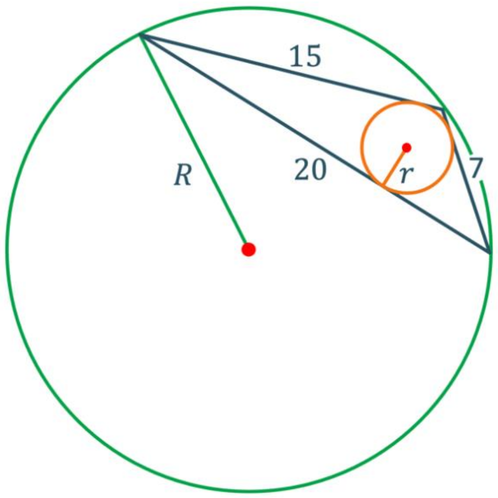
$$= \sqrt{8^2(2+\sqrt{3})} = 8\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ см}$$

Відповідь: 8 см, 8 см, $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см

№6

Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см

Розв'язання:



Радіуси вписаних і описаних кіл можна виразити з формул площі трикутника за радіусами вписаних і описаних кіл:

$$S = \frac{abc}{4R} \to R = \frac{abc}{4S}$$

$$S = rp \to r = \frac{S}{p}$$

Площу даного трикутника знайдемо за теоремою Герона:

$$p = \frac{7+15+20}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = \sqrt{1764} = 42 \text{ см}^2$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 15 \cdot 20}{4 \cdot 42} = \frac{2100}{168} = 12{,}5 \text{ см}$$

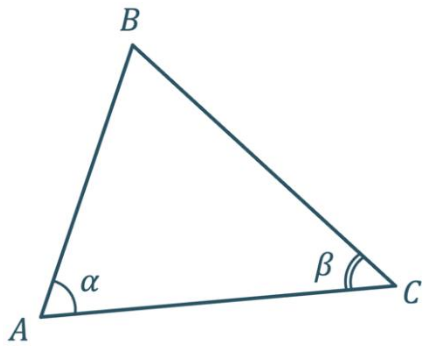
$$r = \frac{S}{p} = \frac{42}{21} = 2 \text{ см}$$

Відповідь: $R = 12{,}5$ см; $r = 2$ см

№7

Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R, а два його кути - α і β. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання:



З ΔABC за теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - (\alpha + \beta)$$

За узагальненою теоремою синусів:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big)} = 2R$$

$$\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{BC}{2\sin\alpha} = \frac{AB}{2\sin\beta} = \frac{AC}{2\sin(\alpha + \beta)} = R$$

$$BC = 2R\sin\alpha$$

$$AB = 2R\sin\beta$$

$$AC = 2R\sin(\alpha + \beta)$$

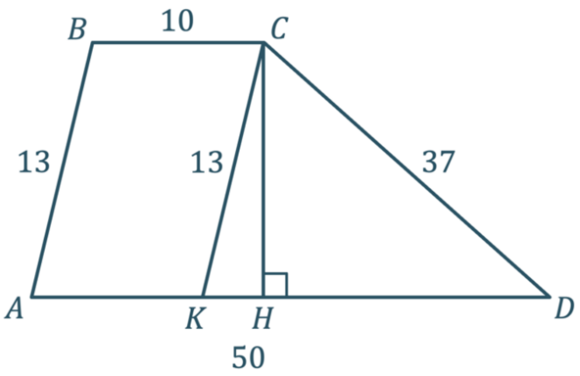
Знайдемо площу даного трикутника за радіусом описаного кола:

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{BC \cdot AB \cdot AC}{4R} = \frac{2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot 2R\sin(\alpha + \beta)}{4R}$$
$$= 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha + \beta)$$

Відповідь: $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha + \beta)$

№8

Паралельні сторони трапеції дорівнюють 10 см і 50 см, а непаралельні – 13 см і 37 см. Знайдіть площу трапеції.



Дано:

$ABCD$ – трапеція

$BC \parallel AD$

$BC = 10$ см

$AD = 50$ см

$AB = 13$ см

$CD = 37$ см

Знайти:

S_{ABCD}–?

Розв'язання:

Побудуємо:

$CK \parallel AD$

$CH \perp KD$

Тоді:

$CK = BA = 13$ см

CH – висота ΔKCD і трапеції $ABCD$

Знайдемо сторону KD трикутника KCD:

$KD = AD - BC = 50 - 10 = 40$ см

Виразимо висоту ΔKCD і трапеції $ABCD$ через площу ΔKCD:

$$S_{\Delta KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH$$

$$CH = \frac{S_{\Delta KCD} \cdot 2}{KD}$$

Знайдемо площу ΔKCD за теоремою Герона:

$$p = \frac{40 + 13 + 37}{2} = 45 \text{ см}$$

$$S_{KCD} = \sqrt{45(45-40)(45-13)(45-37)} = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 32 \cdot 8} = \sqrt{57600} = 240 \text{ см}^2$$

$$CH = \frac{S_{\Delta KCD} \cdot 2}{KD} = \frac{240 \cdot 2}{40} = 12 \text{ см}$$

З курсу геометрії 8 класу нам відомо, що площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{50 + 10}{2} \cdot 12 = 360 \text{ см}^2$$

Відповідь: 360 см^2

XIV. Підсумок уроку

- Як знайти площу трикутника, якщо відомі дві сторони і кут між ними?
- Як знайти площу трикутника, якщо відомі три його сторони?
- Як знайти висоту трикутника, якщо відомі три його сторони?
- Як знайти площу трикутника за радіусом описаного кола?
- Як знайти площу трикутника за радіусом вписаного кола?
- Як знайти радіус вписаного і описаного кіл трикутника?

XV. Домашнє завдання

Опрацювати §14

Виконати № 612, 617, 621, 629, 633, 638

2.1.3. Розв'язування типових вправ за темою «Формули для знаходження площі трикутника»

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання, отримані на попередніх уроках;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати отримані знання та навички, правильно користуватися креслярським приладдям;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: закріплення знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

XVI. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

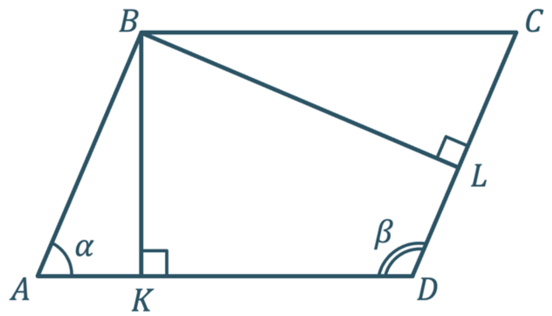
XVII. Актуалізація опорних знань

- Як знайти площу трикутника, якщо відомі дві сторони і кут між ними?
- Як знайти площу трикутника, якщо відомі три його сторони?
- Як знайти висоту трикутника, якщо відомі три його сторони?
- Як знайти площу трикутника за радіусом описаного кола?
- Як знайти площу трикутника за радіусом вписаного кола?
- Як знайти радіус вписаного і описаного кіл трикутника?

XVIII. Розв’язування завдань

№1

Укажіть формули, за якими можна знайти площу паралелограма:



1) $S = AB \cdot BC \sin\alpha$

2) $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\alpha$

3) $\boldsymbol{S = AB \cdot AD \sin\alpha}$

4) $\boldsymbol{S = AD \cdot BK}$

5) $\boldsymbol{S = CD \cdot BL}$

6) $\boldsymbol{S = DA \cdot DC \sin\beta}$

Відповідь: 3, 4, 5, 6

№2

m і n – сторони паралелограма, γ – кут між ними. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

1) $m = 3$ см, $n = 5$ см, $\gamma = 45°$
2) $m = 4$ см, $n = 12$ см, $\gamma = 120°$

Розв'язання:

1) $m = 3$ см, $n = 5$ см, $\gamma = 45°$

$S = ab \sin\gamma$

$$S = 3 \cdot 5 \cdot \sin 45° = 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7{,}5\sqrt{2} \text{ см}^2$$

2) $m = 4$ см, $n = 12$ см, $\gamma = 120°$

$\sin(180° - 60°) = \sin 60°$

$\sin 120° = \sin 60°$

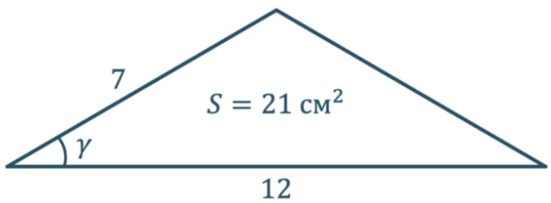
$$S = 4 \cdot 12 \cdot \sin 60° = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ см}^2$$

Відповідь: 1) $7{,}5\sqrt{2}$ см^2; 2) $24\sqrt{3}$ см^2

№3

Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 7 см і 12 см, а його площа дорівнює 21 см^2. Обчисліть кут між даними сторонами.

Розв'язання:



Дано:

$a = 7$ см

$b = 12$ см

$S = 21$ см^3

Знайти:

$\gamma - ?$

Розв'язання:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

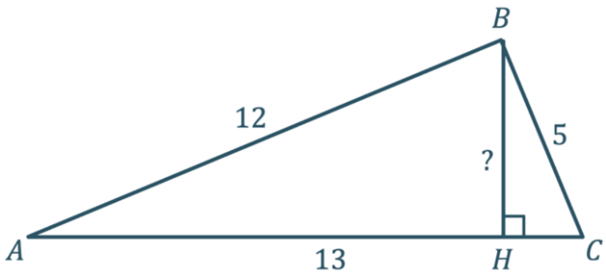
$$\sin\gamma = S : \frac{ab}{2} = \frac{S \cdot 2}{ab} = \frac{21 \cdot 2}{7 \cdot 12} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$$

Так як трикутник гострокутний, то $\gamma = 30°$

Відповідь: $30°$

№4

Довжини сторін трикутника дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см. Обчисліть найменшу висоту цього трикутника.



Розв'язання:

- Яка висота у трикутнику є найменшою?

Найменшою висотою у трикутнику є та, що проведена до найбільшої сторони

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH$$

$$BH = \frac{2S}{AC}$$

Знайдемо площу ΔABC за формулою Герона:

$$p = \frac{5 + 12 + 13}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$S = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30 \text{ см}^2$$

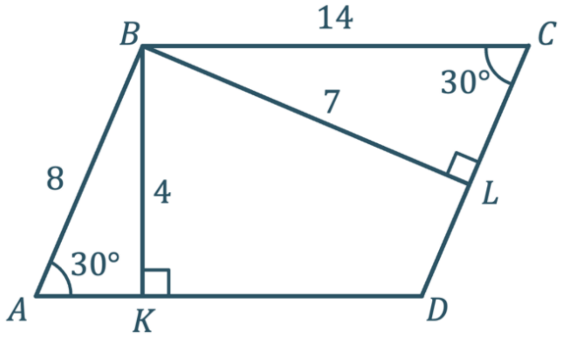
$$BH = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 30}{13} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13} \text{ см}$$

Відповідь: $4\frac{8}{13}$ см

№5

Висоти паралелограма дорівнюють 4 см і 7 см, а кут між сторонами дорівнює 30°. Знайдіть площу паралелограма.

Розв'язання:



➢ Що ви вже знаєте про катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°?

(Такий катет дорівнює половині гіпотенузи)

З ΔAKB $(\angle K = 90°, \angle A = 30°)$:

$$BK = \frac{1}{2}AB \rightarrow AB = 2BK = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см}$$

З ΔBLC $(\angle L = 90°, \angle C = 30°)$:

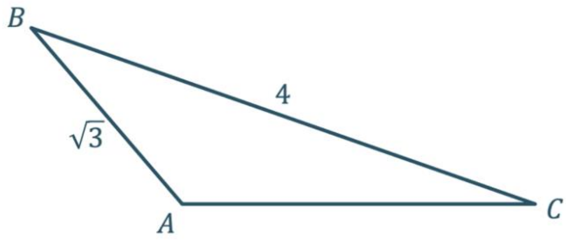
$$BL = \frac{1}{2}BC \rightarrow BC = 2BL = 2 \cdot 7 = 14 \text{ см}$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot BK = 14 \cdot 4 = 56 \text{ см}^2$$

Відповідь: 56 см^2

№6

В трикутнику ABC довжини сторін AB і BC дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 4 см. Обчисліть радіус описаного кола навколо цього трикутника, якщо його площа дорівнює $\sqrt{3}$ см^2



Розв'язання:

Знайдемо $\angle B$ ΔABC за допомого формули площі:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$\sin B = S_{ABC} : \frac{AB \cdot BC}{2} = S_{ABC} \cdot \frac{2}{AB \cdot BC} = \frac{2S_{ABC}}{AB \cdot BC} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\angle B = 30°$$

Знайдемо сторону AC за теоремою косинусів:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{3 + 16 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{19 - 12} = \sqrt{7} \text{ см}$$

Далі радіус описаного кола можна знайти двома способами, або за теоремою синусів, або за допомогою формули площі трикутника через радіус описаного кола.

I спосіб

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{7} \text{ см}$$

II спосіб

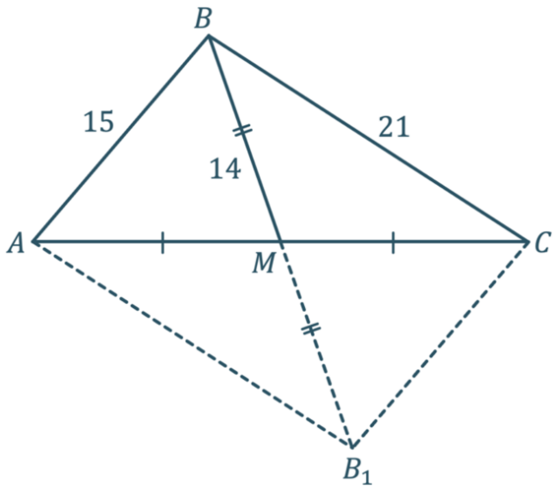
$$\frac{AC}{\sin B} = 2R$$

$$R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7} \text{ см}$$

Відповідь: $\sqrt{7}$ см

№7

Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 15 см і 21 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 14 см.



Розв'язання:

Продовжимо відрізок BM і відкладемо на ньому відрізок $MB_1 = BM$.

Розглянемо чотирикутник $ABCB_1$:

$$\left.\begin{array}{r} AM = MC \left(\begin{smallmatrix} \textit{за} \\ \textit{умовою} \end{smallmatrix}\right) \\ BM = MB_1 \left(\begin{smallmatrix} \textit{за} \\ \textit{побудовою} \end{smallmatrix}\right) \end{array}\right| \rightarrow ABCB_1 \underset{\textit{за ознакою}}{\overset{\textit{паралелограм}}{-}} ABCB_1 \text{ – паралелограм,}$$

отже у нього протилежні сторони попарно паралельні і рівні, тому:

$BC = AB_1$

Розглянемо ΔAMB_1 і ΔBMC:

$$\left.\begin{array}{r} AM = MC \begin{pmatrix} \textit{за} \\ \textit{умовою} \end{pmatrix} \\ BM = MB_1 \begin{pmatrix} \textit{за} \\ \textit{побудовою} \end{pmatrix} \\ BC = AB_1 \begin{pmatrix} \textit{за} \\ \textit{доведеним} \end{pmatrix} \end{array}\right| \rightarrow \Delta AMB_1 = \Delta BMC \begin{pmatrix} \textit{за трьома} \\ \textit{сторонами} \end{pmatrix}$$

$\Delta AMB_1 = \Delta BMC \rightarrow S_{BMC} = S_{AMB_1} \rightarrow S_{ABC} = S_{ABB_1}$

Знайдемо площу трикутника ABB_1 за теоремою Герона:

$$p = \frac{15 + 21 + 28}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

$$S_{ABB_1} = \sqrt{32(32-15)(32-21)(32-28)} = \sqrt{32 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 4} = \sqrt{23936}$$

$$= 8\sqrt{374} \approx 154{,}7 \text{ см}^2$$

Відповідь: $\approx 154{,}7$ см^2

XIX. Підсумок уроку

- Дати відповідь на запитання учнів

- Індивідуальна робота з учнями, що не зрозуміли матеріал

XX. Домашнє завдання

Повторити §14

Виконати №627, 631, 636, 644

2.1.4. Підсумковий урок «Розв'язування трикутників»

Мета:

- *Навчальна:* систематизувати та узагальнити знання учнів за темою «Розв'язування трикутників»;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати задачі, правильно їх розуміти та правильно використовувати отримані знання і навички під час розв'язування задач;
- *Виховна:* виховувати наполегливість, інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- *Соціальна та громадянська компетентності:*
  - **Уміння:** висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аргументувати та відстоювати свою позицію; співпрацювати в команді, виділяти та виконувати власну роль в командній роботі;
  - **Ставлення:** ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших незалежно від статків, соціального походження; відповідальність за спільну справу; налаштованість на логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновків; повага до прав людини, активна позиція щодо боротьби із дискримінацією.

Тип уроку: закріплення знань знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

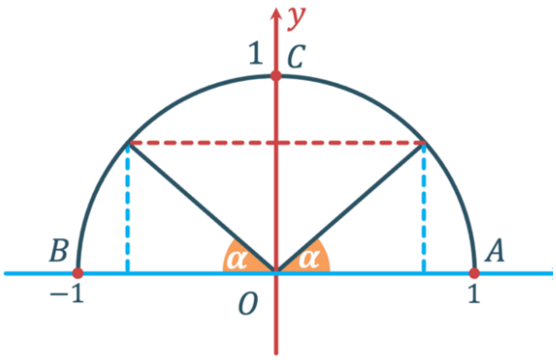
Хід уроку

XXI. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

XXII. Розв'язування завдань

№1



➢ Поясніть за допомогою рисунку, якому значенню дорівнює значення $\sin(180° - \alpha)$ і $\cos(180° - \alpha)$?

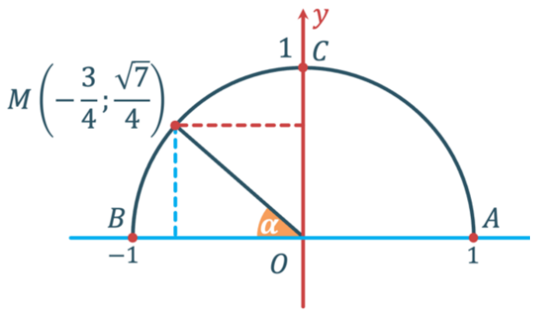
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Оберіть правильні твердження:

А) $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$ **Б)** $\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}}$

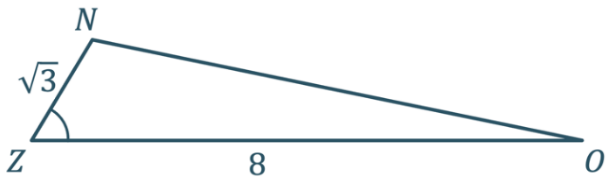
В) $\boldsymbol{\cos\alpha = -\frac{3}{4}}$ Г) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$



№2

У трикутнику ZNO $ZN = \sqrt{3}$ см, $ZO = 8$ см, $\angle NZO = 60°$. Знайдіть площу цього трикутника.

Розв'язання:



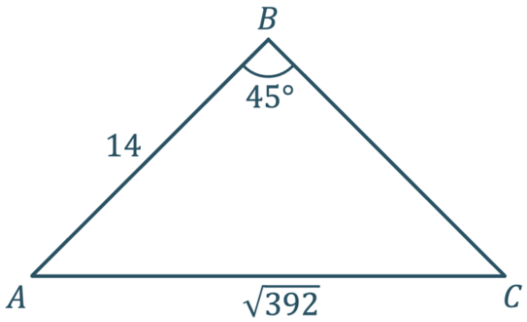
$$S=\frac{1}{2}ZN\cdot ZO\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot 8}{4}=6\text{ см}^2$$

Відповідь: 6 см^2

№3

Дві сторони трикутника дорівнюють 14 см і $\sqrt{392}$ см, а кут, протилежний більшій з них, дорівнює $45°$. Знайдіть інші кути цього трикутника.

Розв'язання:



$\sqrt{392}=14\sqrt{2}$

За теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{AB}{\sin C}\to\sin C=\frac{AB\cdot\sin 45°}{AC}$$

$$\sin C=\frac{14\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{14\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{14\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$\angle C=30°$

За теоремою про суму кутів трикутника:

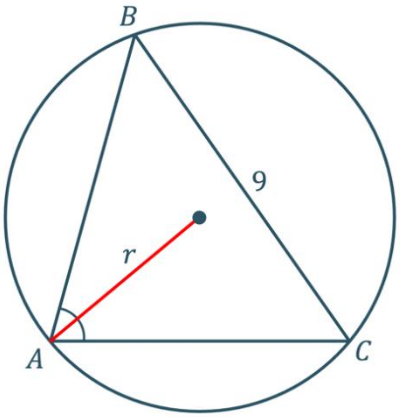
$$\angle A=180°-(\angle B+\angle C)=180°-75°=105°$$

Відповідь: $30°$ і $105°$

№4

Сторона трикутника дорівнює 9 см, а радіус описаного навколо цього трикутника кола – $3\sqrt{3}$ см. Якій градусній мірі може дорівнювати кут, що протилежний стороні 9 см?

Розв'язання:



За наслідком з теореми синусів *(узагальненою теоремою синусів)*:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \to \sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{9}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle A = 60°$Так як:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

То:

$$\sin(180° - 120°) = \sin 120°$$

$$\sin 60° = \sin 120°$$

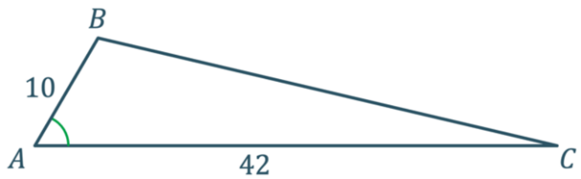
Отже кут A може дорівнювати $60°$ або $120°$

Відповідь: $60°$ або $120°$

№5

У трикутнику дві сторони дорівнюють 10 см і 42 см, а кут між ними 60°. Знайдіть третю сторону трикутника.

Розв'язання:



За теоремою косинусів:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A}$$

$$BC = \sqrt{10^2 + 42^2 - 2 \cdot 10 \cdot 42 \cdot \cos 60°} = \sqrt{1864 - \frac{840}{2}} = \sqrt{1444}$$

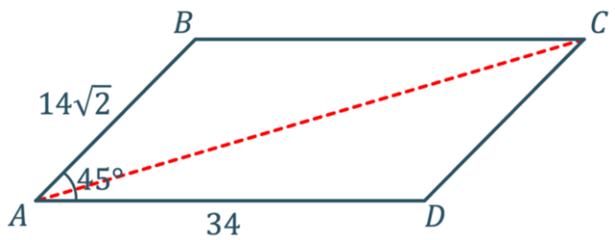
$$= 38 \text{ см}$$

Відповідь: 38 см

№6

Кут паралелограма дорівнює $45°$, а сторони $14\sqrt{2}$ см і 34 см. Знайдіть площу паралелограма і його більшу діагональ.

Розв'язання:



- Яка діагональ в цьому паралелограмі є більшою? Чому?

(В паралелограмі є більшою та діагональ, яка лежить проти більшого кута)

Знайдемо $\angle B$ паралелограма $ABCD$:

$$\angle A + \angle B = 180° \left(\begin{array}{c} \textit{як внутрішні} \\ \textit{односторонні} \\ \textit{при} \\ \textit{паралельних} \\ \textit{прямих} \end{array} \right)$$

$$\angle B = 180° - \angle A = 180° - 45° = 135°$$

$$\left. \begin{array}{r} \angle A = 45° \\ \angle B = 135° \end{array} \right| \rightarrow AC - \text{більша діагональ}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 14\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \sin 45° = 476\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 476 \text{ см}^2$$

За теоремою косинусів:

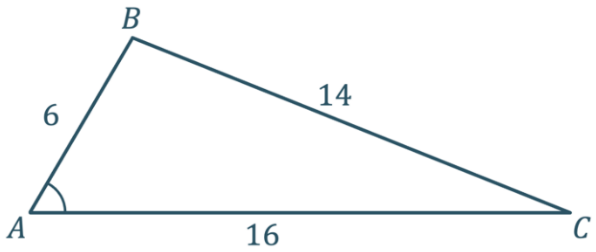
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B}$$
$$= \sqrt{392 + 1156 - 952\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{1548 + 952}$$
$$= \sqrt{2500} = 50 \text{ см}$$

Відповідь: 476 см^2, 50 см

№7

Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 10 см і 14 см. Знайдіть середній за мірою кут цього трикутника.

Розв'язання:



Так як у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута лежить більша сторона *(матеріал 7 класу)*, то проти сторони із довжиною 14 см знаходиться середній за величиною кут.

За наслідком з теореми косинусів:

$$\cos A = \frac{6^2 + 16^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 16} = \frac{36 + 256 - 196}{193} = \frac{96}{192} = \frac{1}{2}$$

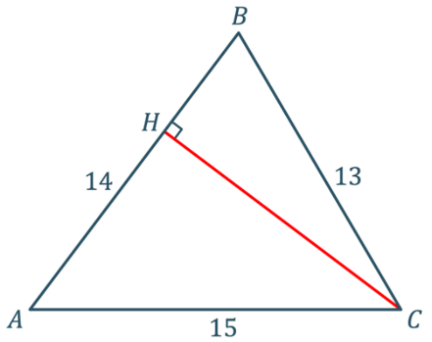
Отже $\angle A = 60°$

Відповідь: $60°$

№8

У трикутнику зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см знайдіть довжину висоти, що проведена до середньої по величині сторони.

Розв'язання:



Знайдемо площу ΔABC за теоремою Герона:

$$p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056}$$

$$= 84 \text{ см}^2$$

Виразимо висоту CH:

$$S_{CAB} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

$$CH = \frac{S_{CAB} \cdot 2}{AB} = \frac{84 \cdot 2}{14} = \frac{168}{14} = 12 \text{ см}$$

Відповідь: 12 см

XXIII. Підсумок уроку

- Дати відповідь на запитання учнів
- Індивідуальна робота з учнями, що не зрозуміли матеріал

XXIV. Домашнє завдання

Повторити §11-14

Виконати завдання для перевірки знань №3 до §11-14 (ст.132)

2.1.5. Контрольна робота №3 «Розв'язування трикутників»

Мета:

- *Навчальна:* перевірити рівень знань учнів, передбачений програмою з цього тематичного блоку, і вміння застосовувати отримані знання під час розв'язування задач;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння виконувати завдання

застосовуючи набуті знання;

- *Виховна:* виховувати наполегливість; вміння робити правильні висновки та бачити кінцеву мету;

Компетенції:

- *Загальнонавчальні:* спроможність організовувати власну діяльність під час виконання завдань;

Тип уроку: контроль знань, умінь та навичок;

Обладнання: конспект, презентація, картки із завданнями та розв'язками контрольної роботи, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

XXV. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу *(пояснити учням вимоги до оформлення контрольної роботи, правила оформлення та розподіл часу на виконання)*;

XXVI. Виконання контрольної роботи

Геометрія 9 клас

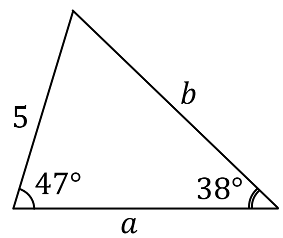
Контрольна робота «Розв'язування трикутників»

І Варіант

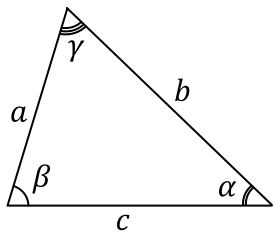
1. *(1 б)* Оберіть правильне твердження:

А) $\frac{a}{b} = \frac{47°}{38°}$ Б) $\frac{b}{5} = \frac{\sin 47°}{\sin 38°}$

В) $\frac{b}{\sin 47°} = \frac{a}{\sin 38°}$ Г) $\frac{5}{\sin 38°} = \frac{b}{\sin 47°}$



2. *(1 б)* Косинус кута β можна знайти за формулою:



А) $\cos\beta = \dfrac{a+c-b}{2a^2c^2}$

Б) $\cos\beta = \dfrac{a+b-c}{2ab}$

В) $\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2$

Г) $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

3. *(1 б)* Площу трикутника зі сторонами a, b і c та радіусом описаного кола R можна знайти за формулою:

   А) $S = \sqrt{R(R-a)(R-b)(R-c)}$ Б) $S = \dfrac{4R}{abc}$

   В) $S = \dfrac{abc}{4R}$ Г) $S = \dfrac{1}{2}abR$

4. *(1,5 б)* Знайдіть найбільший кут трикутника, якщо його сторони дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см

5. *(2 б)* У трикутнику два кути дорівнюють 7° і 38°, а сторона між ними дорівнює $\sqrt{8}$ см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

6. *(2,5 б)* Знайдіть меншу діагональ паралелограма, сусідні сторони якого дорівнюють 1 і $2\sqrt{2}$, а більший кут більший за менший у 3 рази

7. *(3 б)* У ΔKLM $KL = 3LM$, $\sin K = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Якому значенню може дорівнювати кут M?

Геометрія 9 клас

Контрольна робота «Розв'язування трикутників»

ІІ Варіант

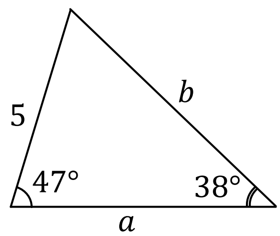
1. *(1 б)* Оберіть правильне твердження:

   А) $5 = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos 38°}$

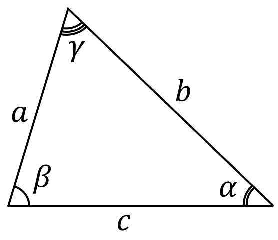
   Б) $5b = 4\sin 47$

   В) $5 = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos 47°}$

   Г) $5b = 4\cos 47°$



2. *(1 б)* b – найбільша сторона трикутника, тоді якщо:



А) $a^2 + c^2 - b^2 > 0$, то $\angle\beta$ – гострий

Б) $a^2 + c^2 - b^2 = 0$, то $\angle\beta$ – гострий

В) $a^2 + c^2 - b^2 < 0$, то $\angle\beta$ – гострий

Г) Визначити не можливо

3. *(1 б)* Площу трикутника зі сторонами a, b і c, півпериметром p та радіусом вписаного кола r можна знайти за формулою:
   А) $S = \sqrt{r(r-a)(r-b)(r-c)}$ Б) $S = rp$
   В) $S = \dfrac{abc}{4pr}$ Г) $S = \dfrac{1}{2}abcr$

4. *(1,5 б)* У трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$, $AB = \sqrt{2}$. Знайдіть BC.

5. *(2 б)* Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 5 см, а косинус кута між ними дорівнює 0,4. Знайдіть третю сторону цього трикутника.

6. *(2,5 б)* У трикутнику KLM $KL = 8$ см, $LM = 17$ см, $\sin M = \frac{8}{17}$. Знайдіть $\sin L$

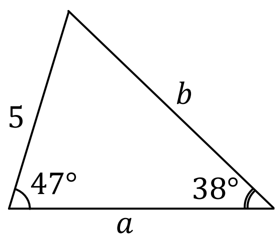
7. *(3 б)* У ΔKLM $KL = 2LM$, $\sin K = \frac{1}{4}$. Якому значенню може дорівнювати кут M?

Контрольна робота «Розв'язування трикутників»

І Варіант

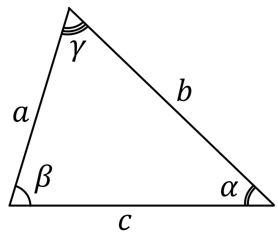
Початковий рівень

8. Оберіть правильне твердження:



   А) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{47°}{38°}$ Б) $\dfrac{b}{5} = \dfrac{\sin 47°}{\sin 38°}$
   В) $\dfrac{b}{\sin 47°} = \dfrac{a}{\sin 38°}$ **Г)** $\boldsymbol{\dfrac{5}{\sin 38°} = \dfrac{b}{\sin 47°}}$

9. Косинус кута β можна знайти за формулою:



А) $\cos\beta = \frac{a+c-b}{2a^2c^2}$

Б) $\cos\beta = \frac{a+b-c}{2ab}$

В) $\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2$

Г) $\boldsymbol{\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$

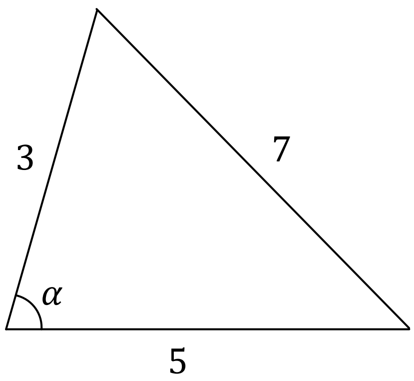
10.*(1 б)* Площу трикутника зі сторонами a, b і c та радіусом описаного кола R можна знайти за формулою:

А) $S = \sqrt{R(R-a)(R-b)(R-c)}$	Б) $S = \frac{4R}{abc}$
В) $\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R}}$	Г) $S = \frac{1}{2}abR$

Середній рівень

11.*(1,5 б)* Знайдіть найбільший кут трикутника, якщо його сторони дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см

Розв'язання:



Так як у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута лежить більша сторона *(матеріал 7 класу)*, то проти сторони із довжиною 7 см знаходиться найбільший за величиною кут.

За наслідком з теореми косинусів:

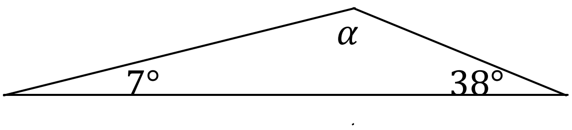
$$\cos\alpha = \frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5} = \frac{9+25-49}{30} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$

Отже $\alpha = 120°$

Відповідь: $120°$

12.*(2 б)* У трикутнику два кути дорівнюють 7° і 38°, а сторона між ними дорівнює $\sqrt{8}$ см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

Розв'язання:



За теоремою про суму кутів трикутника:

$\alpha = 180° - (7° + 38°) = 135°$

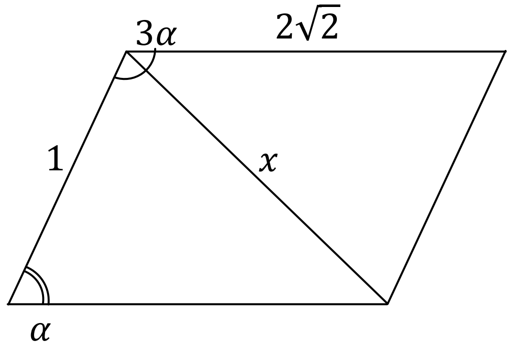
За узагальненою теоремою синусів:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sin 135°} = 2R$$

$$\sin(180° - 45°) = \sin 45°$$
$$\sin 135° = \sin 45°$$
$$R = \frac{\sqrt{8}}{2\sin 45°} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

Відповідь: 2

13.*(2,5 б)* Знайдіть меншу діагональ паралелограма, сусідні сторони якого дорівнюють 1 і $2\sqrt{2}$, а більший кут більший за менший у 3 рази



Розв'язання:

$\alpha + 3\alpha = 180°$ (*як внутрішні односторонні при паралельних прямих*)

$$4\alpha = 180°$$
$$\alpha = 45°$$

Отже менший кут дорівнює $\alpha = 45°$

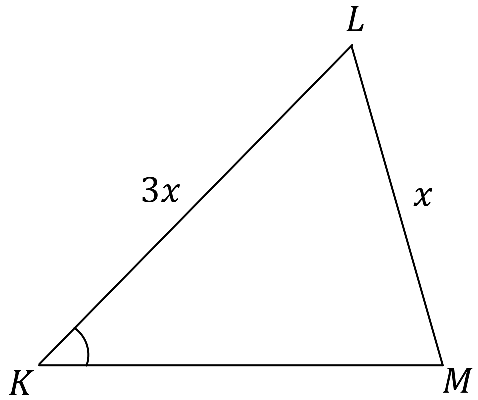
За теоремою косинусів:

$$x^2 = 1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 45°$$
$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 - 4 = 1$$
$$x = 1$$

Відповідь: 1

14.*(3 б)* У ΔKLM $KL = 3LM$, $\sin K = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Якому значенню може дорівнювати кут M?

Розв'язання:



Нехай:

$KL = 3x$

Тоді:

$LM = x$

За теоремою синусів:

$$\frac{LM}{\sin K} = \frac{KL}{\sin M}$$

$$\frac{x}{\sin K} = \frac{3x}{\sin M} \to \sin M = \frac{3x \cdot \sin K}{x} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle K = 60°$

Так як:

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$

То:

$\sin(180° - 60°) = \sin 60°$

$\sin 120° = \sin 60°$

Отже кут M може дорівнювати $60°$ або $120°$

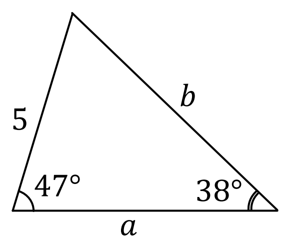
Відповідь: $60°$ або $120°$

Контрольна робота «Розв'язування трикутників»

II Варіант

Початковий рівень

8. Оберіть правильне твердження:



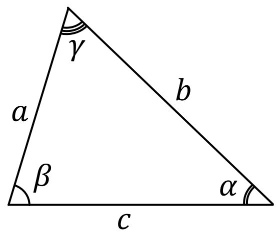
А) $\boldsymbol{5 = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos 38°}}$

Б) $5b = 4\sin 47$

В) $5 = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos 47°}$

Г) $5b = 4\cos 47°$

9. b – найбільша сторона трикутника, тоді якщо:



А) $\boldsymbol{a^2 + c^2 - b^2 > 0}$, то $\angle\boldsymbol{\beta}$ – гострий

Б) $a^2 + c^2 - b^2 = 0$, то $\angle\beta$ – гострий

В) $a^2 + c^2 - b^2 < 0$, то $\angle\beta$ – гострий

Г) Визначити не можливо

10. *(1 б)* Площу трикутника зі сторонами a, b і c, півпериметром p та радіусом вписаного кола r можна знайти за формулою:

А) $S = \sqrt{r(r-a)(r-b)(r-c)}$

Б) $\boldsymbol{S = rp}$

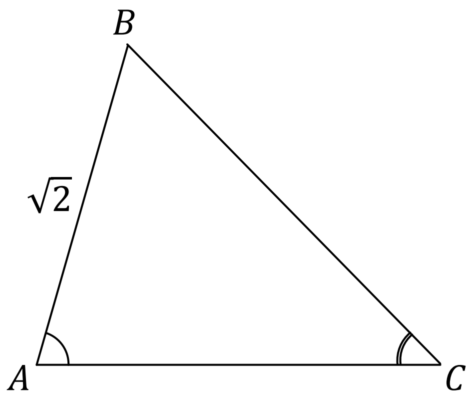
В) $S = \dfrac{abc}{4pr}$

Г) $S = \dfrac{1}{2}abcr$

Середній рівень

11. *(1,5 б)* У трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle C = 45°$, $AB = \sqrt{2}$. Знайдіть BC.

Розв'язання:



За теоремою синусів:

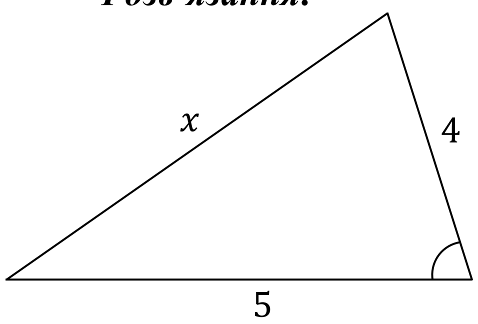
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C}$$

$$BC = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

Відповідь: 1

12. *(2 б)* Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 5 см, а косинус кута між ними дорівнює 0,4. Знайдіть третю сторону цього трикутника.

Розв'язання:



За теоремою косинусів:

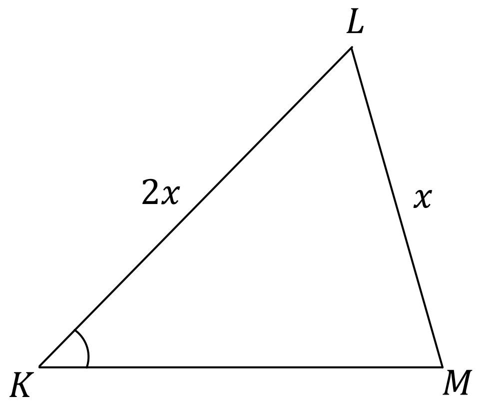
$$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0{,}4 = 16 + 25 - 16 = 25$$

$$x = 5$$

Відповідь: 5

13.*(2,5 б)* У трикутнику KLM $KL = 8$ см, $LM = 17$ см, $\sin M = \frac{8}{17}$.

Розв'язання:



Нехай:

$KL = 2x$

Тоді:

$LM = x$

За теоремою синусів:

$$\frac{LM}{\sin K} = \frac{KL}{\sin M}$$

$$\frac{x}{\sin K} = \frac{2x}{\sin M} \to \sin M = \frac{2x \cdot \sin K}{x} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\angle K = 30°$

Так як:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

То:

$\sin(180° - 30°) = \sin 30°$

$\sin 150° = \sin 30°$

Отже кут M може дорівнювати $30°$ або $150°$

Відповідь: $30°$ або $150°$

XXVII. Підсумок уроку

XXVIII. Домашнє завдання

Повторити § 11-14

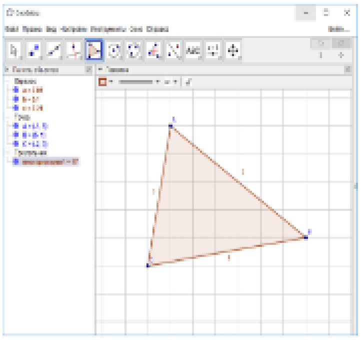
Приклад презентації до уроку наведено у додатку А.

2.2. GeoGebra і роз’язування трикутників

Програму GeoGebra широко використовують у світі мільйони користувачів для навчання алгебри та геометрії. Процес навчання наочний завдяки візуальній формі використання програми.

Спробуємо накреслити трикутник у програмі GeoGebra. Для цього потрібно буде перейти в «геометричний» режим, щоб увімкнути відображення сітки, та вимкнути відображення осі координат.

Клацніть правою кнопкою миші по осі координат, у контекстному меню виберіть пункт «Сітка», а потім натисніть по «Осі» для відключення



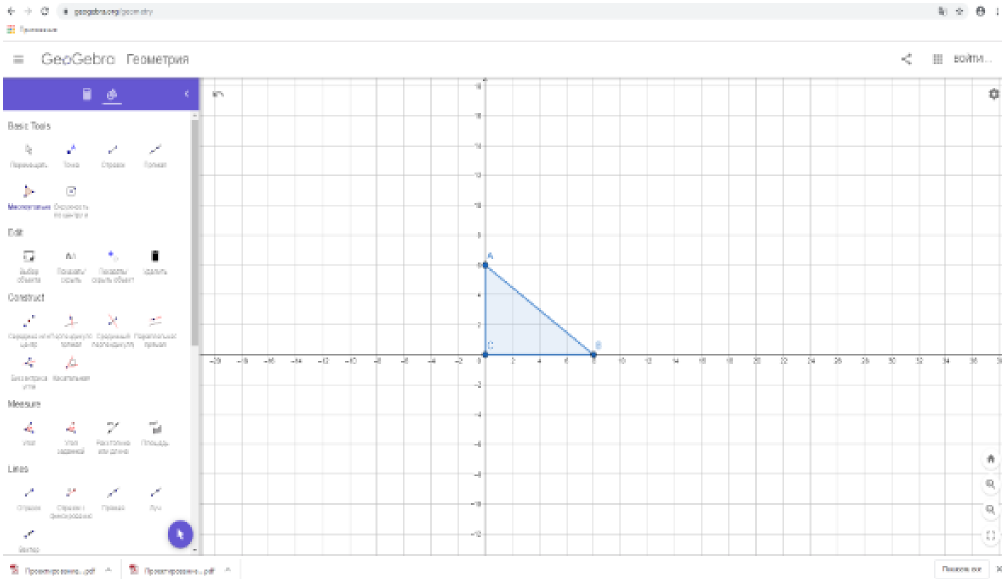
осі координат. На панелі інструментів натисніть кнопку «Багатокутник».

Після цього намалюйте трикутник, послідовно встановивши три вершини. За потреби ви можете ввести точні координати. Для цього вам потрібно буде клацнути по точці правою кнопкою миші.

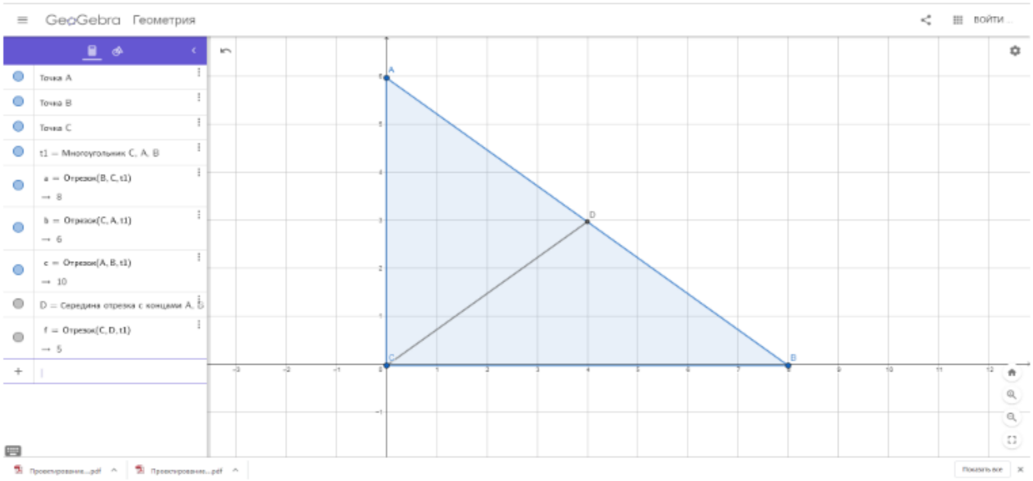
Завдання. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом відомі катети: AC=6, BC=8. Знайдіть медіану CD цього трикутника.

Побудуємо трикутник ABC. На панелі інструментів виберіть пункт «Точка». Побудуйте три довільні точки на полотні. Клікнути на полотно крапку правою кнопкою миші, зайти у властивості. Задати координати точок: A(0,6), B(8,0), C(0,0).

Створити трикутник ABC. Вибравши інструмент «Багатокутник», клацніть по точках ABC.



За допомогою інструмента «Середина або центр» побудувати точку D, яка ділитиме відрізок AB на два рівні відрізки. На панелі об'єктів можна побачити, що довжина відрізка CD, що шукається, дорівнюватиме 5.



У системи GeoGebra нами розроблено методичне забезпечення до розділу «Розв'язування трикутників» (рис. 2.1)

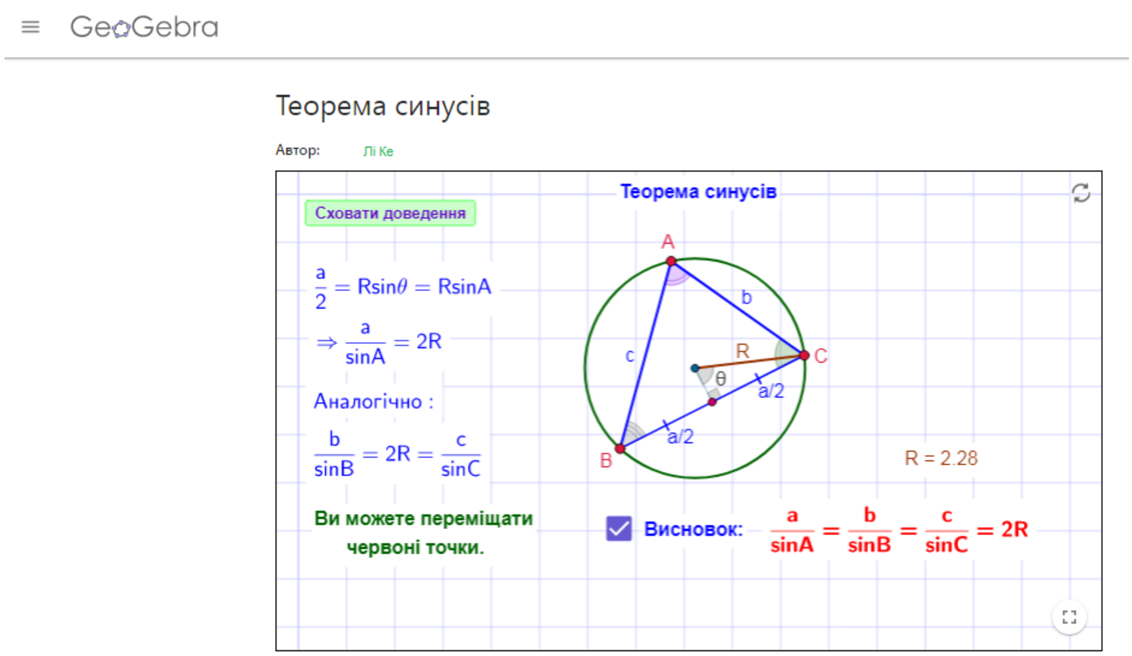


Рис. 2.1. GeoGebra: теорема синусів

2.3. Дослідно-експериментальна перевірка результатів дослідження

Педагогічний експеримент з перевірки отриманих у запропонованому дослідженні результатів проводився у період з 2022 року по 2023 рік і був розбитий на три етапи: констатуючий; пошуковий; навчальний і контролюючий .

Експериментальна база. Педагогічний експеримент проводився на базі Глухівської ЗОШ №1. Експеримент проводився у 9 «А» і 9 Б класі, урок у 9Б проходив з використанням підготовлених методів і засобів розв'язування трикутників, а саме:

- інтерактивне програмне забезпечення;
- покрокове розв'язування задач;
- взаємонавчання та співпраця учнів;
- формувальне оцінювання;
- практичні заняття на кожному уроці;

- онлайн-ресурси та навчальні посібники;
- постійна практика;
- індивідуальне навчання у дистанційному режимі;
- наочний посібникі та діаграми, розроблені у середовищі GeoGebra.

Для перевірки сформованості умінь розв'язування трикутників у процесі навчання було проведено проміжну діагностику. Для цього розроблялися спеціальні завдання, суть яких полягала у вмінні розв'язувати задачі на:

1) теорема синусів і теорема косінусів;
2) розв'язання трикутників за стороною та двома кутами;
3) розв'язання трикутника за двома сторонами та куту між ними;
4) розв'язуванння трикутника за трьома сторонами.

Результати виконання чотирьох завдань, що відповідають видам діяльності, які перевіряються, представлені на рис. 2.2.

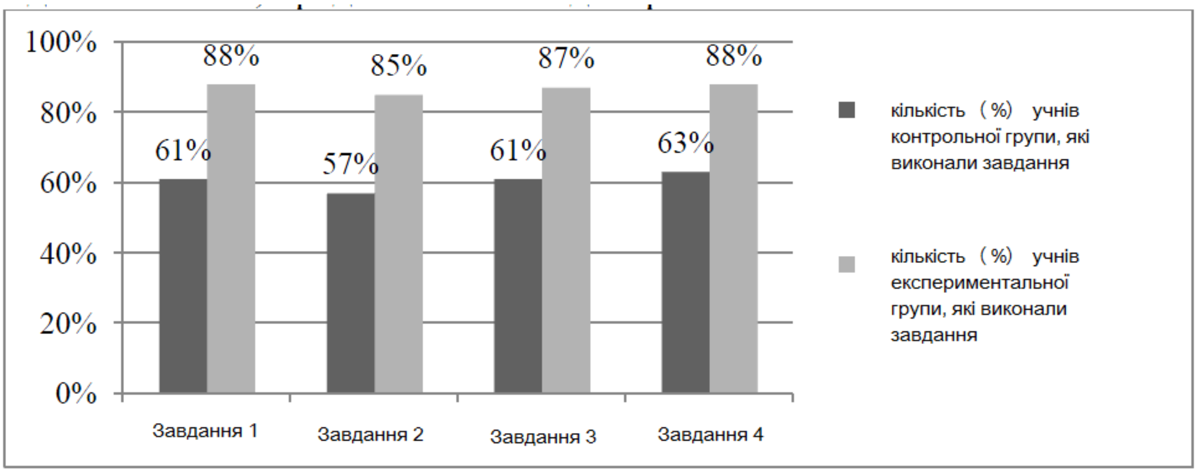


Рис. 2.2. Результати виконання завдань проміжного контролю

На підсумковому контролі з метою оцінки результатів педагогічного експерименту, використовувалася порядкова шкала, що дозволяє встановлювати рівні сформованості в учнів вміння розв’язувати трикутники. Це вміння перевірялося під час реального процесу навчання школярів у період проходження педагогічною практики.

У порядковій шкалі було обрано три рівні співвідношення отриманих результатів: низький, середній та високий. Для отримання даних за кожним рівнем використовувався критерій однорідності χ2 («хі-квадрат»), емпіричне значення якого обчислюється за такою формулою:

$$\chi^2 = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{L} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i} \qquad (2.1)$$

де N = 54 – число учнів контрольної групи; M = 55 – кількість учнів експериментальної групи; L = 3 – число рівнів, на які було розбито оцінка сформованості кожного виду діяльності (низький, середній, високий); n_i – кількість учів контрольної групи, оцінки яких належать і-му рівню (і=1, 2, … n); m_i – кількість учнів експериментальної групи, оцінки яких належать і-му рівню (і=1, 2, … n). За результатами проведених розрахунків оцінок, отриманих учнями, отримано результат χ^2 рівний 6,37, більший у порівнянні з критичним значенням (χ^2 кр = 5,99).

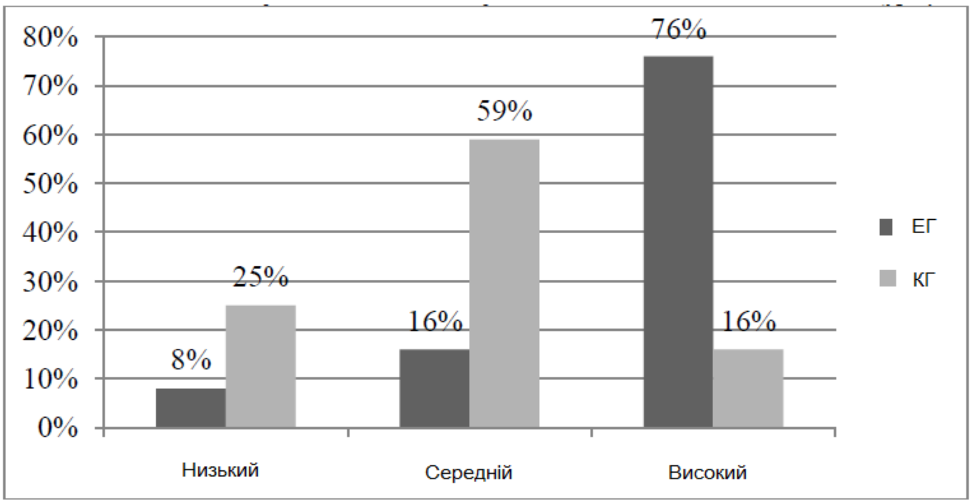


Рис. 2.3. Результати оволодіння учнями вміння розв’язувати трикутники, які отримали у результаті підсумкового контролю

Виходячи з отриманих даних педагогічного експерименту, можна стверджувати, що застосування в процесі навчання розробленої методики дозволяє сформувати в учнів вміння розв’язувати трикутники в основному на середньому та високому рівнях, що дозволяє зробити висновок про підтвердження висунутої гіпотези дослідження.

2.4. Висновки до розділу

На основі викладеного вище можна зробити такі висновки.

Розроблена методика навчання розділу «Розв’язування трикутників» в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання заснована на використання методів і засобів: інтерактивне програмне забезпечення, покрокове розв’язування задач, взаємонавчання та співпраця учнів, формувальне оцінювання, практичні заняття на кожному уроці, онлайн-ресурси та навчальні посібники, постійна практика у розв’язувнні задач, індивідуальне навчання у дистанційному режимі, наочний посібник та діаграми, розроблені у середовищі GeoGebra.

Завдяки розробленій методиці, у якій застосовуються підготовлені методи і засоби вміння розв’зування трикутників в учнів експериментального класу виявилося вище, ніж в учнів контрольного класу.

Висновки

У магістерській роботі наведене теоретичне узагальнення і результати вирішення проблеми навчання розділу «Розв'язування трикутників» в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

1. Проведений аналіз методологічної, психолого-педагогічної, навчально-методичної, математичної літератури з досліджуваної проблеми, дозволив розробити методику навчання розділу «Розв'язування трикутників» в курсі геометрії 9-го класу закладів загальної середньої освіти в умовах дистанційного навчання.

2. Здійснено порівняльний аналіз вивчення трикутників у школах України та Китайської Народної Республіки.

3. З'ясовано важливу позитивну роль методів: програми реального світу, інтерактивне програмне забезпечення, застосування аналогії та метафори у розповіді, покрокове розв'язування задач, взаємонавчання та співпраця учнів, формувальне оцінювання, практичні заняття на кожному уроці, онлайн-ресурси та навчальні посібники, постійна практика, індивідуальне навчання у дистанційному режимі, наочний посібник та діаграми, розроблені у середовищі GeoGebra.

Беручи до уваги те, що навчання математики базується на створенні образів математичних об'єктів й оперування ними, спеціалізоване динамічне середовище GeoGebra акцентує увагу на таких можливостях цього середовища як наочність, моделювання, динаміка, використання яких приносить інновації в традиційну методику викладання математики.

Програма дозволяє виконувати креслення будь-якого ступеня складності, створювати візуальне уявлення навчального матеріалу, роблячи його цікавим, більш інформативним, зрозумілим. Допомагає організовувати самостійну дослідницьку роботу учнів, підвищує різноманітність форм роботи, особливо під час дистанційного навчання, значно збільшує частку активної творчої роботи в їх навчальній діяльності, підвищує інтерес до вивчення математики та дослідницької діяльності за рахунок використання інтерактивності побудов та досліджень.

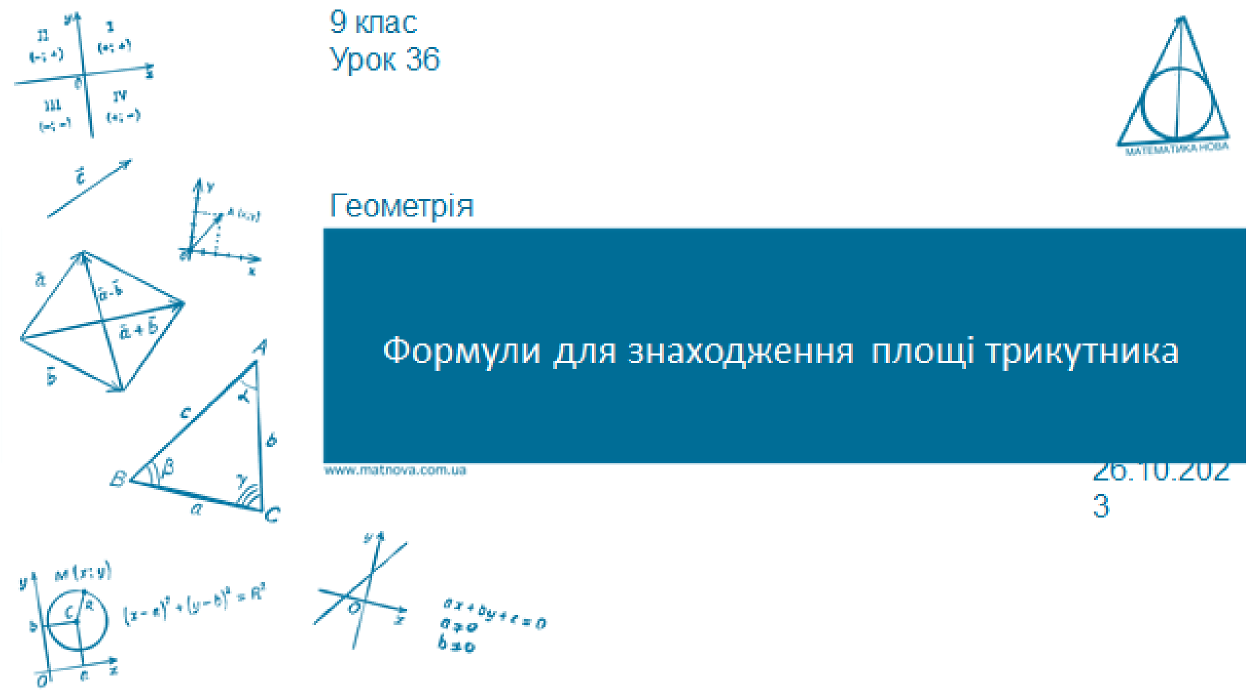
4. Проведений педагогічний експеримент показав, що розроблена методика сприяє зростанню успішності навчання.

Таким чином, означений підхід збагачує навчальний процес в цілому і сприяє досягненню цілей навчання математики. Подальші дослідження є перспективними щодо пошуку нових методів вивчення стереометрії.

2.5. Додаток А

Зразок презентації до уроку «Формули для знаходження площі трикутника»

в курсі геометрії 9-го класу

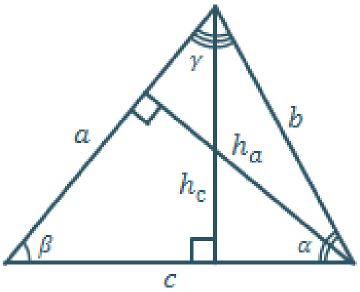


Розв'язування завдань 1

1) $S = ac\sin\beta$

2) $S = \frac{1}{2}ah_c$

3) $S = \frac{1}{2}ch_c$



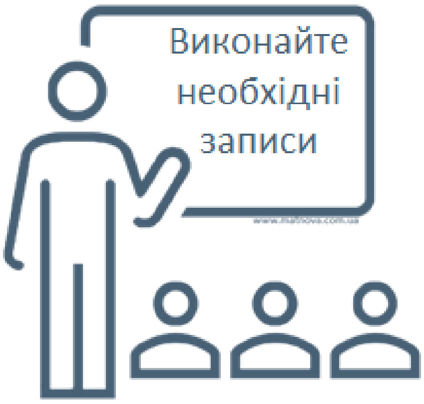
4) $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

6) $S = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$

Укажіть формули, за якими можна знайти площу трикутника

Розв'язування завдань 2

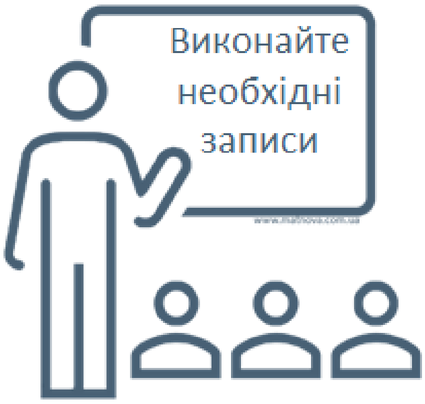


m і n – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

1) $m = 4$ см, $n = 7$ см, $\gamma = 30°$

2) $m = 6$ см, $n = 8$ см, $\gamma = 135°$

Розв’язування завдань 3

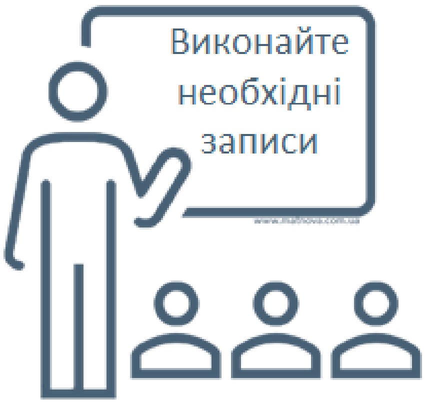


Обчисліть площу ромба:

1) Сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут - 30°

2) Сторона якого дорівнює 10 см, а тупий кут 120°

Розв’язування завдань 4



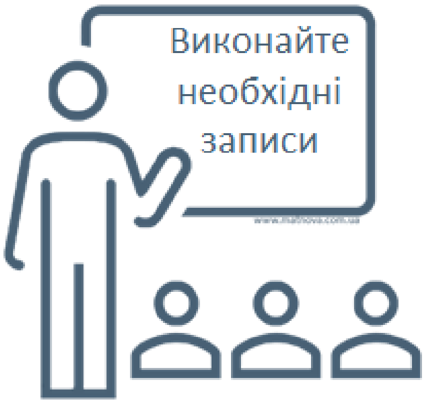
А) Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють:

1) 13 см, 14 см, 15 см

2) 17 см, 25 см, 26 см

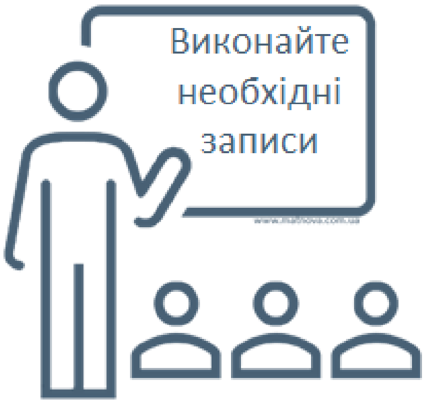
Б) Знайдіть найменшу висоту першого трикутника і найбільшу висоту другого трикутника

Розв’язування завдань 5



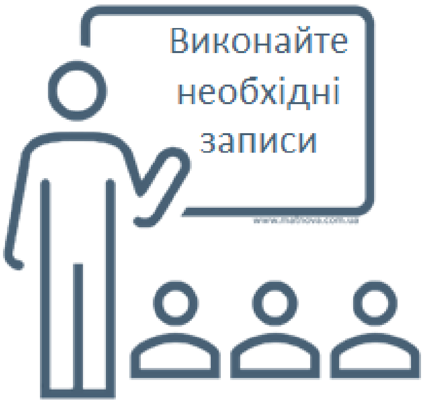
Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 150°, а його площа – 16 $см^2$. Знайдіть сторони трикутника

Розв’язування завдань 6



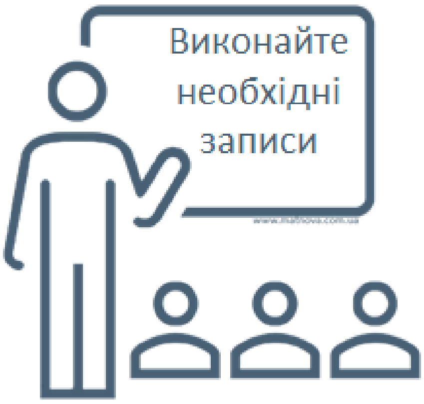
Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см

Розв’язування завдань 7



Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R, а два його кути - α і β. Знайдіть площу трикутника.

Розв’язування завдань 8



Паралельні сторони трапеції дорівнюють 10 см і 50 см, а непаралельні – 13 см і 37 см. Знайдіть площу трапеції

Відповідаємо

Як знайти площу трикутника, якщо відомі дві сторони і кут між ними?

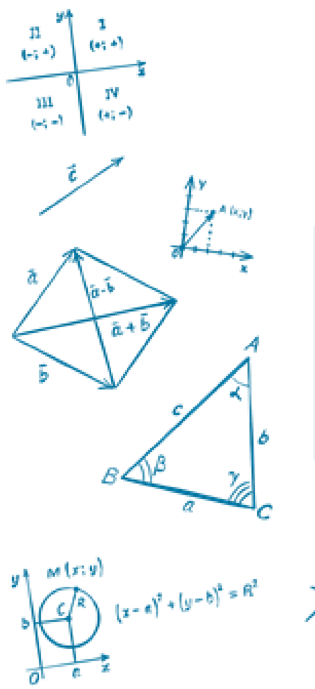
Як знайти площу трикутника, якщо відомі три його сторони?

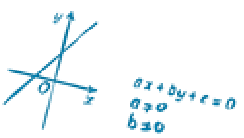
Як знайти висоту трикутника, якщо відомі три його сторони?

Як знайти площу трикутника за радіусом описаного кола?

Як знайти площу трикутника за радіусом вписаного кола?

Як знайти радіус вписаного і описаного кіл трикутника?





Домашнє

Опрацювати §14

Виконати № 612, 617, 621, 629, 633, 638

26.10.202
3

Бажаю творчих

Література

1. Mun Yee Lai, Sara Murray. Teaching with Procedural Variation: A Chinese Way of Promoting Deep Understanding of Mathematics [Electronic resource]. – URL: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/lai.pdf.
2. Shanghai Math https://www.wpi.edu/sites/default/files/docs/Offices/Dean-of-Engineering/Xingfeng%20Huang-%20Shanghai%20Model.pdf
3. Shu L., Peijun M. & Dong L. The Exploration and Practice of Gradually Industrialization Model in Software Engineering Education – A Factual Instance of the Excellent Engineer Plan of China / CSEE&T 12. IEEE 25th Conference on Software Engineering Education and Training. – P.23–31.
4. Tu Rongbao. Characteristics of Mathematics Education in China [Electronic resource]. –URL: http://math.unipa.it/~grim/Characteristics of Mathematics EducationinChina(Englishversion)pdf.
5. Zhang Dianzhou. Introduction to the theory of Mathematics education. 1st edition. – Higher Education Publishing House of China. – April 2003.
6. Авраменко М. І. Уроки алгебри і початків аналізу в 10 і 11 класах: пос. для вчителя. К.: Рад. школа, 1989. 320 с.
7. Антоненко М. І. Розв'язування геометричних задач: Кн. для вчителя. К.: Рад. школа, 1991. 128 с.
8. Апостолова Г.В. Геометрія. 7 клас. К.:«Генеза», 2004. 216 с.
9. Астряб О.А., Дубинчук О.С. Методика стереометрії. К.: Рад. школа, 1985. 580 с.
10. Бевз В. Г., Бевз Г. П. Алгебра у VII класі: Методичний посібник для вчителів. К.: Укр. Центр духовної культури, 2000. 128 с.
11. Бевз Г. П. Методика викладання математики. Київ, 1989.
12. Бевз Г. П. Методика розв’язування алгебраїчних задач. К.: Рад. шк., 1975. 240 с.
13. Бевз Г. П. Методика розв’язування алгебраїчних задач. К.: Рад. школа, 1975. 240 с.

14. Бевз Г. П. Методика розв’язування стереометричних задач. К.: Рад. школа, 1988. 190 с.
15. Бевз Г. П. Методика розв’язування стереометричних задач. Київ: Рад. школа, 1988. 190 с.
16. Бевз Г.П. «Уроки геометрії в 7 класі». Посібник для вчителів. К., «Вежа», 2008. 128 с.
17. Бевз Г.П. Математика: Посібник для факультативних занять у 7 класі К.: Рад. школа, 1982. 232 с.
18. Бевз Г.П. Методи навчання математики. Х.: Основа, 2003. 96 с.
19. Бевз Г.П. Урок математики в школі К.: Рад. школа, 1977. 158 с.
20. Бескін Л. Н., Бескін В. Л. Многогранники. К.: Вища школа, 1984. 88 с.
21. Бондаренко М.Ф. Математика для вступників до вузів: Навчальний посібник. Харків: Компанія СМІТ, 2002. 1120 с.
22. Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення. К.: Рад. школа, 1963. 87 с.
23. Вдовенко В. В. Використання дивергентних задач на уроках математики як необхідна умова розвитку творчої особистості учня. *Актуальні питання природничо-математичної освіти.* № 1. 2013. С. 69-73.
24. Возняк Г. М., Маланюк Е. П. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики: Розв’язування екстремальних задач: Метод. посіб. К.: Рад. школа, 1984. 80 с.
25. Возняк Г. М., Маланюк М. П. Взаємозв’язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Пос. для вчителя. К.: Рад. школа, 1989. 128 с.
26. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. Розв’язування алгебраїчних задач: Посібник для вчителів. К.: Рад. школа, 1991. 203 с.
27. Грицаєнко М. П. Математичні диктанти для 6–8 класів. – К.: Рад. школа, 1983. 143 с.

28. Дубинчук О. С., Мальований Ю. І., Дичек Н. П. Методика викладання алгебри в 7–9 класах: Пос. для вчителя. К.: Рад. школа, 1991. 254 с.
29. Дубинчук О. С., Слєпкань З. І. Алгебра і елементарні функції. – К.: Рад. школа, 1968. 580 с.
30. Дубинчук О. С., Слєпкань З. І., Філіппова С. М. Методичні особливості навчання геометрії в середньому ПТУ. К.: Вища школа, 1992. 271 с.
31. Єгерєв В. К. Збірник задач з математики для вступників до вузів. К.: Вища школа, 1992. 445с.
32. Єршова А. П. Геометрія. 7 клас: підручник Х.: Ранок, 2015. 224 с.
33. Жовнір Я. М. Позиційні задачі в стереометрії: Посібник для вчителя. К.: Освіта, 1991. 96 с.
34. Значимість принципів Я. А. Коменського для творчого вивчення математики: Науково-методична розробка для вчителів та учнів. Полтава, 1992. 72с.
35. Капіносов А. М. Алгебра, 10 клас: Дидактичні матеріали для різнорівневого навчання. Тернопіль, 1994. 63 с.
36. Капіносов А. М. Алгебра, 8 клас: Дидактичні матеріали для різнорівневого навчання. К.: Витоки, 1991. 104 с.
37. Капіносов А. М. Алгебра. Геометрія. 10 клас: Заключне повторення: Тести. Тернопіль, 1994. 58 с.
38. Капіносов А. М. Геометрія, 9 клас: Заключне повторення: Тести. Дніпропетровськ, 1994. 92 с.
39. Касьяненко М. Д. Підвищення ефективності вивчення математики: Організація творчої діяльності учнів: Навч.-метод. посібник. К.: Рад. школа, 1980. 142 с.
40. Коба В. І., Чуб О. Т., Нікулін М. А. Бесіди про рівняння. К.: Рад.школа, 1986. 88 с.
41. Коваленко В. Г. Лекційно-практична форма навчання математики учнів 9–10 класів. К.: Рад. школа, 1983. 72 с.

42. Коваленко В. Г., Тесленко І. Ф. Проблемний підхід до навчання математики. К.: Рад. школа, 1985. 87 с.
43. Конфорович А. Г. Визначні математичні задачі. К.: Рад. школа, 1981. 189 с.
44. Конфорович А. Г. Колумби математики. К.: Рад. школа, 1982. 223 с.
45. Конфорович А. Г. Математика служить людині: Для ст. шк. віку. К.: Рад. школа, 1984. 580 с.
46. Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси. К.: Рад.школа, 1983. 207 с.
47. Конфорович А.Г. Добрий день, Архімеде!: Цікаві задачі, ігри, головоломки. К.: Молодь, 1988. 150 с.
48. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла: Для учнів середніх шкіл. К.: Рад. школа, 1990. 250 с.
49. Конфорович А.Г., Сорока М.О. Дорогами Унікурсалії: Мат.мандрівники: Для серед. шк. віку. К.: Веселка, 1988. 310 с.
50. Кравчук В.Р., Алгебра. Підручник для загальноосвітніх навч. закл. 7 клас. Тернопіль, Підручники і посібники, 2014. 224 с.
51. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом векторів: Навч.-метод. пос. К.: Рад. школа, 1980. 96 с.
52. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом координат: Посібник для вчителя. К.: Рад. школа, 1983. 127 с.
53. Кудусова Е. Н. Особливості розвитку варіативності мислення учнів гуманітарних і технічних спеціальностей у процесі професійної підготовки : автореф. дис. … канд. психол. наук : 19.00.07 / Е.Н.Кудусова; НАПН України, Ін-т психології ім. Г.С. Костюка. Київ, 2014. 20 с.
54. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії: Кн. для вчителя. К.: Абрис, 1994. 464 с.
55. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр у задачах. К.: Рад. школа, 1991. 206 с.

56. Ланков О. В. До історії розвитку передових ідей в російській методиці математики. К.: Рад. школа, 1953. 176 с.
57. Лоповок Л. М. Збірник задач з геометрії для 9–10 кл.: Дидактичні матеріали для вчителів. К.: Рад. школа, 1984. 120 с.
58. Лоповок Л. М. Розв'язування геометричних задач у середній школі К.: Рад. школа, 1972. 262 с.
59. Лященко М. Я. Похідна та її застосування: Пос. для самоосвіти вчителів. К.: Рад. школа, 1985. 153 с.
60. Маланюк М. П., Лукавецький В. І. Олімпіади юних математиків: Пос. для вчителів. К.: Рад. школа, 1985. 88 с.
61. Малярова О. Роль та місце дивергентних математичних задач у розвитку варіативного мислення учнів. Глухівські цитання-2021. Актуальні питання суспільних та гуманітарних наук: Збірник матеріалів XI міжнародної науково-практицної інтернет-конференчії. Глухів, 2021. С. 58-59
62. Марченко В. О., Москаленко О. А., Москаленко Ю. Д. Роль математики у формуванні в учнів системності знань з циклу природничих наук. *Організація навч.-вих. процесу в серед. загальноосв. закладах нов. типу: досягнення, проблеми, перспективи: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. Полтава*, 1996. С. 310–313.
63. *Математика в школі*: Метод. зб. К.: Рад. школа, 1958–1967. Вип. I–IX.
64. *Математика в школі*: Наук.-методичний журнал МОН України та АПН України, 1997–2006.
65. Математика нова: Розробки уроків з математики, алгебри, геометрії, календарне планування з математики, алгебри, геометрії, підручники, навчальні програми. URL : https://www.matnova.com.ua
66. Математична хрестоматія: Для 6–8 кл. К.: Рад. школа, 1968. 319с.
67. Математична хрестоматія: Для ст. кл.: Геометрія. К.: Рад.школа, 1970. 383 с.

68. Медяник А.Г. Учителеві про шкільний курс геометрії. Книга для вчителя. К.: Рад. шк., 1988. 124 с.
69. Мерзляк А.Г. Алгебра. 7 клас. Книга для вчителя. Х.: Гімназія, 2015. 96 с.
70. Мерзляк А.Г. Алгебра. 7 клас. Підручник. Х.: Гімназія, 2015. 288 с.
71. Мехед Д. Використання дивергентних задач для оцінювання навчальних досягнень учнів з математики. *Математика в школі.* 2008. № 33. С. 16-20.
72. Момот Л. Л. Проблемно-пошукові методи навчання в школі. К.: Рад. школа, 1984. 63 с.
73. Москаленко О. А., Москаленко Ю. Д. Роль і місце індивідуальних задач у системі професійної підготовки вчителя математики. *Нові пед. технології викладання фіз.-мат. дисциплін у серед. навч. закладах нового типу: Матеріали Всеукр. наук.-практ. конф.* Полтава, 2001. С. 150–153.
74. Москаленко О.А. До питання розвитку в учнів творчого стилю мислення. *Імідж сучасного педагога*. № 3(6), 2000. С. 24–28.
75. Москаленко О.А. Інноваційні освітні моделі в системі фаховоорієнтовних дисциплін педуніверситету. *Особистісно орієнтоване навчання математики: Матер. Всеукр. конф*. Полтава: ПДПУ, 2003. С. 25–28.
76. Москаленко О.А. Сучасні підходи до методичної підготовки вчителя математики. *Нові пед. технології викладання фіз.-мат. дисциплін у серед. навч. закладах нового типу: Матеріали Всеукр. наук.-практ. конф*. Полтава, 2001. С. 149–150.
77. Моторіна В. Г. Технології навчання математики в сучасній школі. Х., 2001. 262 с.
78. Моторіна В. Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: Навч. пос. для студ. Х.: ХДПУ, 1998. 154 с.

79. Навчальні програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів України. 5 – 9 класи. К.: Освіта, 2017. 56 с.
80. Підласий І. П. Як підготувати ефективний урок: Кн. для вчит. К.: Рад. школа, 1989. 204 с.
81. Полонський В.Б., Рабинович Є.М., Якір М. С. Вчимося розв’язувати задачі з геометрії: Навч.-метод. пос. К.: Магістр, 1998. 256 с.
82. Придатко М.О. Виготовлення стереометричних моделей: Метод. посібник. К.: Рад. школа, 1986. 64 с.
83. Раухман А. С., Сень Я. Г. Усні вправи з геометрії для 7–11 кл.: Посібник для вчителя. К.: Рад. школа, 1989. 160 с.
84. Семиченко В.А., Кудусова Е.Н. Варіативність мислення як об’єкт психологічного аналізу. *Проблеми сучасної педагогічної освіти*. Вип. 38.Ч. 1.Ялта, 2013.
85. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. Київ: Вища школа, 2006.
86. Слєпкань З.І. Методика навчання математики» Підручник для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак - Еко, 2000. 512 с.
87. Тадеєв В.О. Геометрія. 7 клас. Поглиблений курс. Підручник. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. 352 с.
88. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. Черкаси: Відлуння-Плюс, 2004. 400 с.
89. Тарасенкова Н.А. Математика. На допомогу вчителю. Київ: Освіта, 2013. 56 с.
90. Ушаков Р.П. Повторювальний курс математики: Навчальний посібник. К.: Техніка, 2003. 416 с.
91. Хабіб Р.А. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики. К.: Рад. школа, 1986. 153 с.
92. Хмара Т.М. Навчання учнів математичної мови. К.: Рад. школа, 1985. 95 с.
93. Чашечніков С. М., Чашечнікова Л. Г., Чертков Й. Я. Вивчення алгебри в 6–8 класах. К.: Рад. школа, 1981. 206 с.

94. Черкасов Р. С., Столяр А. А. Методика викладання математики. Харків: Основа, 1992.
95. Четверухін М. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії: Посібник для вчителів. К.: Рад. школа, 1953. 188 с.
96. Шунда Н. М. Функції та їх графіки: Пос. для учителів. К.: Рад. школа, 1983. 190 с.
97. Шунда Н.М. та ін. Вступний курс математики: Навчальний посібник. К.: Вища школа, 1990. 152 с.
98. 吴思远. "三角形外心的平面向量问题的解决探究." 中学生数学: 高中版 3 (2018): 37-37.
99. 商卫民, and 吕爱生. "三角形的一个极值问题的解决." 中学数学研究 10 (2011): 48-48.
100. 徐文建. "两 “板斧” 解决三角形的形状判断问题." 中学生数理化: 高二高三版 18 (2017): 34-35.
101. 李圣春, and 万春. "利用全等三角形解决实际问题." 初中生世界: 八年级 10 (2014): 29-30.
102. 郭晓辉. "用平面向量解决三角形四心问题." 理科考试研究: 高中版 1 (2015): 20-20.
103. 陈世平, and 刘忠. "一类三角形几何不等式的自动证明." 计算机应用研究 29.5 (2012): 1732-1736. 初中生世界 https://www.fuyoutech.club/web/mag_dir/72169