Міністерство освіти і науки України

**Глухівський національний педагогічний університет
імені Олександра Довженка**

**Наталія КУГАЙ
Микола КАЛІНІЧЕНКО**

ОСНОВИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ
(практикум)

Навчально-методичний посібник

УДК 517.9

Рекомендовано до друку вченою радою Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка (протокол № 3 від 01 листопада 2023 року)

Рецензенти:

Бігун Я. Й. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Станиславський О. О. – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Радіоастрономічний інститут НАН України

Бурчак С. О. – доктор педагогічних наук, доцент, декан факультету технологічної і професійної освіти, Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка

Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (практикум) : навчально-методичний посібник. Харків, 2023. 153 с.

Навчально-методичний посібник складається з двох розділів. У першому розділі пропонуються практичні заняття з основних тем варіаційного числення. Другий розділ містить матеріал, необхідний для виконання студентами лабораторних робіт. Наведено приклади розв’язування ключових задач варіаційного числення.

Для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика). Навчально-методичний посібник буде корисним й для здобувачів освіти спеціальностей із галузі знань 11 Математика.

УДК 517.9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Варіаційне числення – це галузь математики, яка фокусується на оптимізації функціоналів, заданих на певних просторах функцій. Процес оптимізації полягає у відшуканні оптимальних кривих чи поверхонь, які задовольняють певним критеріям і обмеженням. У пропонованому посібнику розглянуто задачі оптимізації функціоналів вигляду

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx, \quad I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')dx,$$

$$I[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')dx.$$

Початок виникнення варіаційного числення можна віднести до кінця 17 століття, коли математики, зокрема Й. Бернуллі та Л. Ейлер, почали досліджувати проблеми, пов'язані з брахістохроною та ізопериметричною задачею. Відтоді варіаційне числення перетворилося на багату та різноманітну галузь математики, яка знаходить застосування у фізиці, техніці, економіці та інших галузях науки. На сьогодні варіаційне числення відносять до до сучасних розділів математики.

Пропонований навчально-методичний посібник є продовженням нашого попереднього посібника «Основи варіаційного числення(курс лекцій)» і складається з двох розділів.

У першому розділі пропоновано теми практичних занять – тут їх сім. До кожної теми наведено перелік теоретичних запитань, список літератури, запропоновано запитання для самоконтролю, запитання для повторення необхідного для відповідного заняття матеріалу, навчальні завдання (розв'язані ключові задачі), завдання для аудиторної роботи. До останніх наведено відповіді.

У другому розділі розміщено матеріал для проведення лабораторних занять з варіаційного числення. Для кожної лабораторної роботи (пропонується 6 робіт) наведено мету роботи, коротко теоретичний матеріал, контрольні запитання, контрольний приклад (розв'язане завдання), порядок виконання роботи та варіанти завдань для розв'язання студентами в аудиторії. У Додатку В наведено вимоги до оформлення звіту про виконання лабораторної роботи. Посібник ілюстрований графічно.

Під час добору завдань для практичних і лабораторних робіт акцент зроблено на узагальненні й поглибленні знань, опанованих студентами у процесі вивчення математичних дисциплін на бакалавраті. Підібрані завдання адаптовано до ОПП Середня освіта «Математика» другого (магістерського) рівня.

Автори

РОЗДІЛ 1. ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Тема 1. Основні поняття варіаційного числення

Теоретичні питання

1. Поняття функціонала, його області визначення, множини значень
2. Поняття про лінійний функціонал
3. Поняття про неперервність функціонала
4. Варіація функції й приріст функціонала
5. Перша й друга варіація функціонала

Література:

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с. С. 5-6
2. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008, 368 с. С. 26-28
3. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с. С. 5-28
4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. С. 5-32

Дайте відповіді на запитання (письмово):

1. Порівняйте відстані між двома функціями в просторах $C([a;b])$ і $C^1([a;b])$. Відповідь обґрунтуйте.
2. Виберіть правильне твердження:

а) якщо можна знайти відстань між функціями в просторі $C([a;b])$, то можна знайти відстань між цими самими функціями і в просторі $C^1([a;b])$;

б) якщо можна знайти відстань між функціями в просторі $C^1([a;b])$, то можна знайти відстань між цими самими функціями і в просторі $C([a;b])$;

в) відстань між функціями в просторі $C([a;b])$ завжди більша, ніж відстань в просторі $C^1([a;b])$.

3. Наведіть приклади функціоналів з курсу математичного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії. Вкажіть їхні області визначення, області значень. Які з них є лінійними?

4. Як зміниться відстань між функціями, якщо відрізок $[a;b]$ розширити? Звузити?

6. Заповніть таблицю (за темою цього заняття)

Нові поняття	Відомі поняття (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)	Нові теоретичні твердження	Відомі теоретичні твердження (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)

Повторіть:

1. Таблиця основних інтегралів
2. Методи інтегрування
3. Таблиця похідних елементарних функцій
4. Правила диференціювання

Навчальні завдання

1. Знайдіть відстань між вказаними функціями в просторі: а) $C([a;b])$; б) $C^1([a;b])$. Зробіть відповідний рисунок: 1) $y(x)=x^2,\quad g(x)=x+2,\quad [a;b]=[-1;1]$; 2) $y(x)=e^{2x},\quad g(x)=x,\quad [a;b]=[-2;0]$.

Розв'язання

1) а) У просторі $C([a;b])$ відстань між функціями $y=f(x)$ та $y=g(x)$ знаходимо за формулою

$$\rho(f,g) = \|f-g\|_C = \max_{x\in[a;b]} |f(x)-g(x)|.$$

Тоді $\rho(x^2, x+2) = \|x^2 - x - 2\|_C = \max_{x\in[-1;1]} |x^2 - x - 2|$. Функція $h(x) = x^2 - x - 2$ неперервна на R, має нулі в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Легко перевірити, що на відрізку $[-1;1] \subset [-1;2]$ функція недодатна (геометрично це зображено на рис. 1.1).

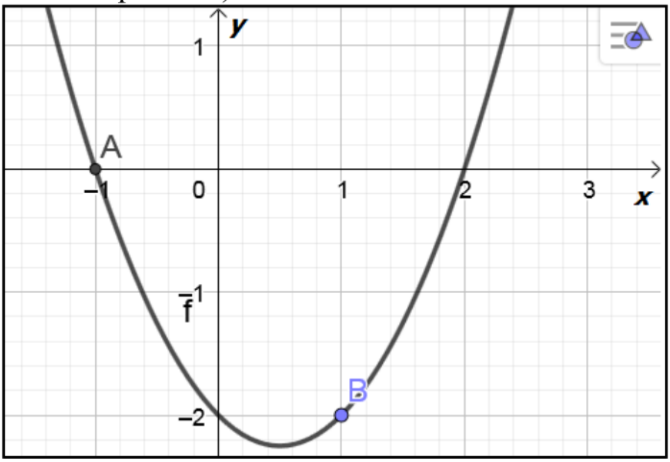

Рис. 1.1. Графік функції $h(x) = x^2 - x - 2$

Тому для $\forall x \in [-1;1] \, |x^2 - x - 2| = -x^2 + x + 2$. Позначимо $\varphi(x) = -h(x) = -x^2 + x + 2$. Скористаємося відомою з курсу математичного аналізу схемою знаходження найбільшого значення неперервної на відрізку функції. $\varphi'(x) = -2x + 1$, $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in [-1;1]$. Далі знаходимо значення функції в 3-х точках:

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{4};$

$\varphi(-1) = -(-1)^2 - 1 + 2 = 0;$

$\varphi(-1) = -1^2 + 1 + 2 = 2$.

Найбільше з одержаних чисел $2\frac{1}{4}$. Отже, $\rho(x^2, x+2) = 2\frac{1}{4}$ в просторі $C([-1;1])$. Це проілюстровано на рис. 1.2 (довжина відрізка CD).

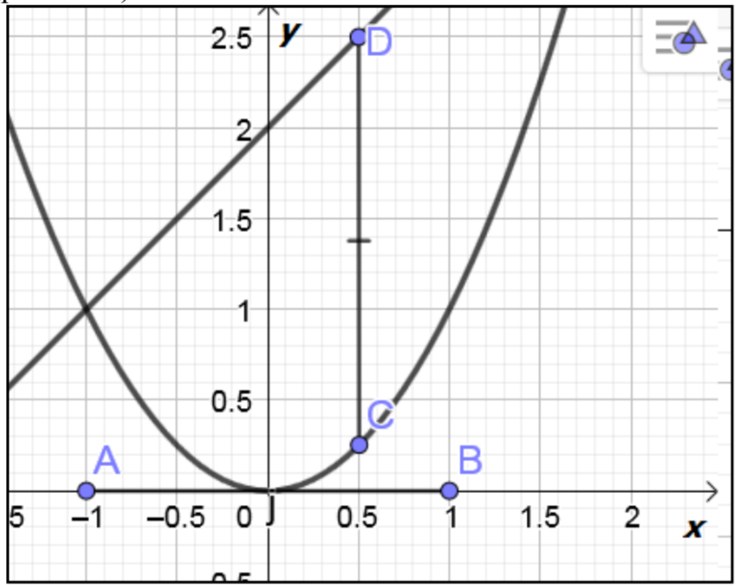

Рис. 1.2. Відстань між функціями $y(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ в просторі $C([-1;1])$

б) У просторі $C^1([a;b])$ відстань знаходимо як $\rho(f,g) = \|f - g\|_{C^1} = \max\limits_{x\in[a;b]}|f(x) - g(x)| + \max\limits_{x\in[a;b]}|f'(x) - g'(x)|$. Тоді у нашому випадку $\rho(x^2, x+2) = \max\limits_{x\in[-1;1]}\left|x^2 - x - 2\right| + \max\limits_{x\in[-1;1]}|2x - 1|$. Перший доданок обчислено в пункті а). На відрізку $[-1;1]$ функція $\psi(x) = 2x - 1$ змінює знак в точці $x = \frac{1}{2}$, а саме:

$\psi(x)\geq 0$ на відрізку $\left[\frac{1}{2};1\right]$ і $\psi(x)<0$ на проміжку $\left[-1;\frac{1}{2}\right)$. Тоді

$$|2x-1|=\begin{cases}-2x+1, & x\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]\\ 2x-1, & x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\end{cases}$$

Функція $y_1(x)=-2x+1$ спадна, тому найбільше значення на відрізку $\left[-1;\frac{1}{2}\right)$ досягає в точці $x=-1$: $y_1(-1)=-2\cdot(-1)+1=3$; функція $y_2(x)=2x-1$ зростає, тому найбільшого значення на відрізку $\left[\frac{1}{2};1\right]$ набуває в точці $x=1$: $y_2(1)=2-1=1$. Отже, найбільше значення виразу $|2x-1|$ на відрізку $[-1;1]$ буде 3 (ілюстрація цього факту на рис. 1.3). Отже, $\rho(x^2,x+2)=2\frac{1}{4}+3=5\frac{1}{4}$ в просторі $C^1([a;b])$.

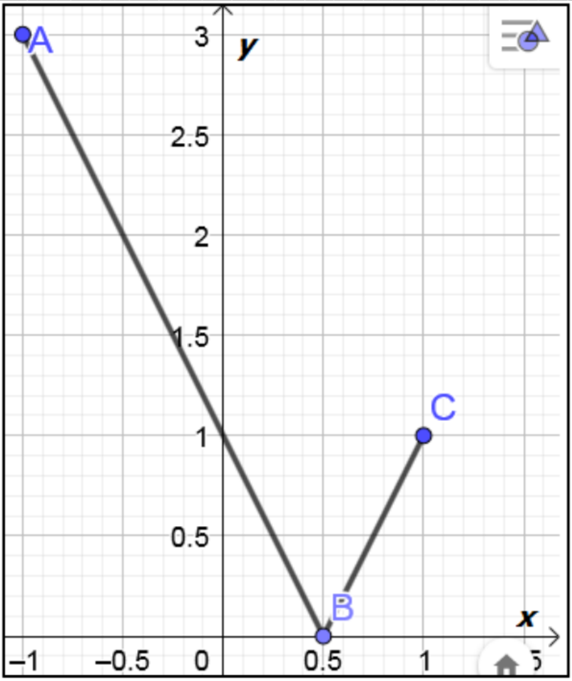

Рис.1.3. Графік функції $y=|2x-1|$ на відрізку $[-1;1]$

2) а) $\rho(e^{2x},x)=\left\|e^{2x}-x\right\|_C=\max\limits_{x\in[-2;0]}\left|e^{2x}-x\right|$. Вираз $e^{2x}-x>0$ на відрізку $[-2;0]$, бо $e^{2x}>0$, а $x\le 0$ (рис. 1.4). Тому $\rho(e^{2x},x)=\max\limits_{x\in[-2;0]}\left(e^{2x}-x\right)$. Позначимо $\varphi(x)=e^{2x}-x$. Тоді $\varphi'(x)=2e^{2x}-1$. $2e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\ln 2$. Число $-\dfrac{1}{2}\ln 2\in[-2;0]$.

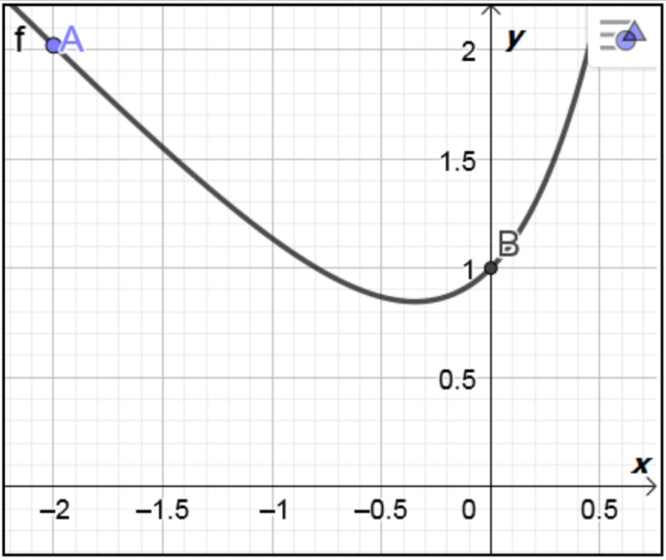

Рис. 1.4. Графік функції $y = e^{2x} - x$

Тоді обчислимо

$$\varphi(-2) = e^{-4} + 2 = 2 + \frac{1}{e^4};$$

$$\varphi(0) = e^0 - 0 = 1;$$

$$\varphi(-\frac{1}{2}\ln 2) = e^{-\ln 2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Найбільшим з обчислених чисел є $2 + \frac{1}{e^4}$. Отже, в просторі $C([-2;0])$ $\rho(e^{2x}, x) = 2 + \frac{1}{e^4}$.

б) $\rho(e^{2x}, x) = \max\limits_{x\in[-2;0]}\left|e^{2x} - x\right| + \max\limits_{x\in[-2;0]}\left|2e^{2x} - 1\right|$. Перший доданок обчислено. Функція $h(x) = 2e^{2x} - 1$ змінює знак на відрізку $\left[-2;0\right]$ в точці $x = -\frac{1}{2}\ln 2$ (див. рис.1.5).

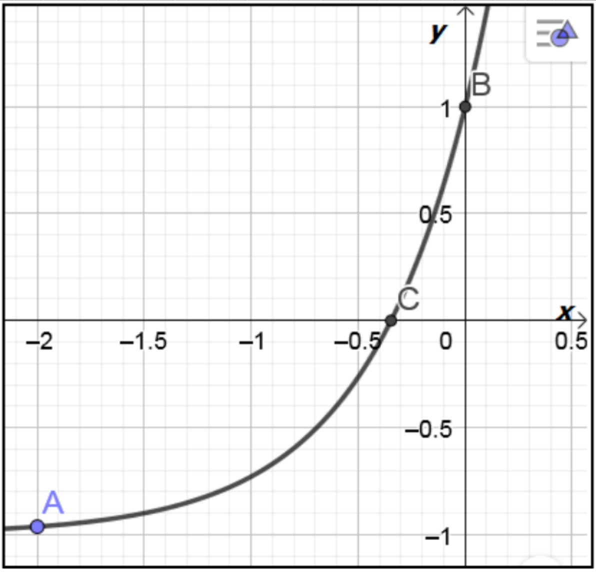

Рис. 1.5. Графік функції $h(x)=2e^{2x}-1$

Тоді

$$\left|2e^{2x}-1\right|=\begin{cases}-2e^{2x}+1, & x\in\left[-2;-\dfrac{1}{2}\ln 2\right]\\ 2e^{2x}-1, & x\in\left[-\dfrac{1}{2}\ln 2:0\right]\end{cases}$$

Функція $y_1(x)=-2e^{2x}+1$ спадає на відрізку $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$, тому найбільшого значення досягає в точці $x=-2$: $y_1(-2)=-2e^{-4}+1=1-\dfrac{2}{e^4}$. Функція $y_2(x)=2e^{2x}-1$ зростає на відрізку $\left[-\dfrac{1}{2}\ln 2:0\right]$, тому найбільшого значення набуває в точці $x=0$: $y_2(0)=2e^0-1=1$ (рис.1.6).

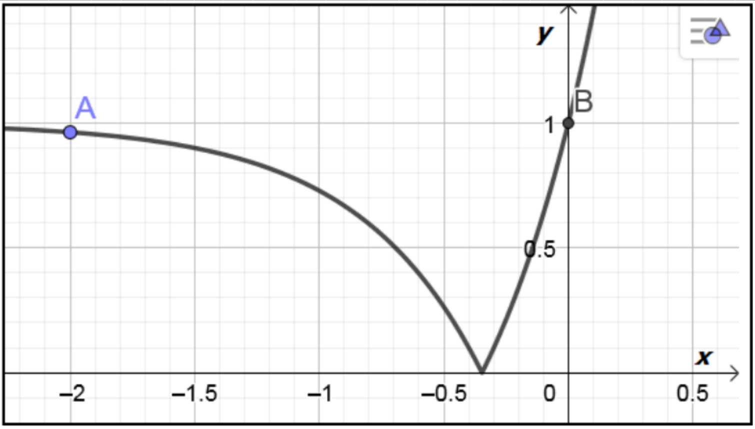

Рис. 1.6. Графік функції $y(x)=\left|2e^{2x}-1\right|$

Із чисел $1-\dfrac{2}{e^4}$ і 1 більшим є 1. Отже, $\max\limits_{x\in[-2;0]}\left|2e^{2x}-1\right|=1.$

Тоді в просторі $C^1([-2;0])$ $\rho(e^{2x},x)=2+\dfrac{1}{e^4}+1=3+\dfrac{1}{e^4}$.

Порівняйте з відстанню між цими самими функціями в просторі $C([-2;0])$.

2. **З'ясуйте, чи є задані функціонали лінійними**:

а) $I[y]=\lim\limits_{x\to x_0} y(x)$;

б) $I[y]=\int\limits_a^b x(y(x)+y'(x))dx$;

в) $I[y]=\int\limits_a^b (x^2y(x)+\left(y'(x)\right)^2)dx$.

Розв'язання

Нагадаємо означення лінійного функціонала:

Функціонал *I*, визначений на лінійному просторі *V*, називають *лінійним*, якщо

$\forall \alpha, \beta \in R\ \forall y_1(x), y_2(x) \in V\ I[\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)] = \alpha I[y_1(x)] + \beta I[y_2(x)]$.

а) Нехай $V = C([a;b])$. Розглянемо $\forall \alpha, \beta \in R$ і $\forall y_1(x), y_2(x) \in C([a;b])$. Тоді $I[\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)] =$ $= \lim\limits_{x \to x_0}(\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)) = \alpha \lim\limits_{x \to x_0}(y_1(x)) + \beta \lim\limits_{x \to x_0}(y_2(x)) =$ $= \alpha I[y_1(x)] + \beta I[y_2(x)]$. Отже, функціонал є лінійним.

б) Нехай $V = C^1([a;b])$. Розглянемо $\forall \alpha, \beta \in R$ і $\forall y_1(x), y_2(x) \in C^1([a;b])$. Тоді $I[\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)] =$ $= \int\limits_a^b x(\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x) + \alpha \cdot y_1'(x) + \beta \cdot y_2'(x))dx$. Згрупуємо підінтегральні доданки:

$$\int\limits_a^b x(\underline{\underline{\alpha \cdot y_1(x)}} + \underline{\beta \cdot y_2(x)} + \underline{\underline{\alpha \cdot y_1'(x)}} + \underline{\beta \cdot y_2'(x)})dx =$$

$$= \int\limits_a^b x(\alpha \cdot (y_1(x) + y_1'(x)) + \beta \cdot (y_2(x) + y_2'(x)))dx =$$

$$= \alpha \int\limits_a^b x(y_1(x) + y_1'(x))dx + \beta \int\limits_a^b x(y_2(x) + y_2'(x))dx = \alpha I[y_1(x)] +$$

$+\ \beta I[y_2(x)]$. Отже, функціонал є лінійним.

в) Нехай $V = C^1([a;b])$. Розглянемо $\forall \alpha, \beta \in R$ і $\forall y_1(x), y_2(x) \in C^1([a;b])$. Тоді $I[\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)] =$

$$= \int\limits_a^b (x^2(\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)) + \left(\alpha \cdot y_1'(x) + \beta \cdot y_2'(x)\right)^2)dx =$$

$$= \int\limits_a^b (x^2(\alpha \cdot y_1(x) + \beta \cdot y_2(x)) + \alpha^2 \left(y_1'(x)\right)^2 + 2\alpha\beta y_1(x) y_2(x) + \beta^2 \left(y_2'(x)\right)^2)dx \neq$$

$\neq \alpha I[y_1(x)] + \beta I[y_2(x)]$ хоча би із-за доданка $2\alpha\beta y_1(x) y_2(x)$.

3. Знайдіть значення функціонала $I[y]=\int\limits_0^1 x(y(x)+y'(x))dx$ **в заданих точках** $y_1(x)=x^2;\ y_2(x)=xe^x$.

Розв'язання

Нехай $y_1(x)=x^2$. Знайдемо $y_1'(x)=2x$, обчислимо інтеграл:

$$I[y_1]=\int\limits_0^1 x(x^2+2x)dx=\int\limits_0^1 (x^3+2x^2)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}.$$

Якщо $y_2(x)=xe^x$, то $y_2'(x)=e^x+xe^x$. Тоді

$$I[y_2]=\int\limits_0^1 x(xe^x+x+xe^x)dx=\int\limits_0^1 x^2(2e^x+1)dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & dv=2e^x+1 \\ du=2xdx & v=2e^x+x \end{vmatrix}=$$

$$I[y_2]=\int\limits_0^1 x(xe^x+x+xe^x)dx=\int\limits_0^1 x^2(2e^x+1)dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & dv=2e^x+1 \\ du=2xdx & v=2e^x+x \end{vmatrix}=$$

$$=x^2(2e^x+x)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 x(2e^x+x)dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=2e^x+x \\ du=dx & v=2e^x+\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix}=2e+1-$$

$$-2\left(x\left(2e^x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1-\int\limits_0^1\left(2e^x+\frac{x^2}{2}\right)dx\right)==2e+1-2\left(2e+\frac{1}{2}\right)+2\left(\left(2e^x+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1\right)=$$

$$=2e+1-4e-1+4e+\frac{1}{3}-4=2e-3\frac{2}{3}.$$

4. Знайдіть приріст і варіацію вказаних функціоналів. Обчисліть їх для конкретних значень функції і її приросту: а) $I[y]=\int\limits_0^1\left(y^2+ye^x\right)dx$, $y=x^2$, $\delta y=2x$; **б)** $I[y]=\int\limits_0^\pi\left(y^2+y\cos x\right)dx$, $y=\dfrac{1}{2}\sin x$, $\delta y=-x$.

Розв'язання

а) Знайдемо приріст функціонала.

$$\Delta I=\int_0^1\left((y+\delta y)^2+(y+\delta y)e^x\right)dx-\int_0^1\left(y^2+ye^x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(y^2+2y\delta y+(\delta y)^2+ye^x+\delta ye^x-y^2-ye^x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2y\delta y+(\delta y)^2+\delta ye^x\right)dx=\int_0^1(2y+e^x)\delta ydx+\int_0^1(\delta y)^2dx.$$

Тоді варіація функціонала $\delta I=\int_0^1(2y+e^x)\delta ydx$. Для $y=x^2$, $\delta y=2x$ маємо $\delta I=\int_0^1(2x^2+e^x)2xdx=4\int_0^1 x^3dx+2\int_0^1 xe^xdx=$ $=x^4\Big|_0^1+2(xe^x-e^x)\Big|_0^1=1+2(e-e+1)=3$. Приріст функціонала для $y=x^2$, $\delta y=2x$ буде $\Delta I=3+\int_0^1(2x)^2dx=$ $=3+4\int_0^1 x^2dx=3+\frac{4}{3}=4\frac{1}{3}$.

б) Знайдемо приріст функціонала.

$$\Delta I=\int_0^\pi\left((y+\delta y)^2+(y+\delta y)\cos x\right)dx-\int_0^\pi\left(y^2+y\cos x\right)dx=$$

$$=\int_0^\pi\left(y^2+2y\delta y+(\delta y)^2+y\cos x+\delta y\cos x-y^2-y\cos x\right)dx=$$

$$=\int_0^\pi\left(2y\delta y+(\delta y)^2+\delta y\cos x\right)dx=\int_0^\pi\left(2y+\cos x\right)\delta ydx+\int_0^\pi(\delta y)^2dx.$$

Тоді варіація функціонала $\delta I=\int_0^\pi\left(2y+\cos x\right)\delta ydx$. Для

$y=\frac{1}{2}\sin x$, $\delta y=-x$ маємо $\delta I=\int\limits_0^{\pi}\left(2y+\cos x\right)\delta y dx=$

$$=-\int\limits_0^{\pi}\left(\sin x+\cos x\right)x dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=(\sin x+\cos x)dx \\ du=dx & v=-\cos x+\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=-(x(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}(-\cos x+\sin x)dx)=-(\pi+$$

$+(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\pi})=2-\pi$. Приріст функціонала для $y=\frac{1}{2}\sin x$, $\delta y=-x$ буде $\Delta I=2-\pi+\int\limits_0^{\pi}x^2dx=2-\pi+\frac{\pi^3}{3}$.

5. Знайдіть варіацію вказаних функціоналів двома способами:

а) $I[y]=\int\limits_a^b\left(y^2(x)+y(x)\right)dx$**;**

б) $I[y]=\int\limits_a^b y(x)\left(y(x)+\cos x\right)dx$**.**

Розв'язання

а.1) Знайдемо приріст функціонала:

$$\Delta I=\int\limits_a^b\left((y(x)+\delta y)^2+y(x)+\delta y\right)dx-\int\limits_a^b\left(y^2(x)+y(x)\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(\underline{y^2(x)}+2y(x)\delta y+(\delta y)^2+\underline{\underline{y(x)}}+\delta y\underline{-y^2(x)}\underline{\underline{-y(x)}}\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(2y(x)\delta y+(\delta y)^2+\delta y\right)dx=\int\limits_a^b\left(\left(2y(x)+1\right)\delta y+(\delta y)^2\right)dx=$$

$= \int_a^b \left(\left(2y(x) + 1 \right) \delta y \right) dx + \int_a^b (\delta y)^2 dx$. Тоді лінійна відносно δy частина приросту функціонала і є варіацією функціонала, тобто $\delta I = \int_a^b \left(\left(2y(x) + 1 \right) \delta y \right) dx$.

а.2) Варіацію функціонала розглянемо як похідну по параметру, тобто

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha} \left(\int_a^b \left((y(x) + \alpha \delta y)^2 + y(x) + \alpha \delta y \right) dx \right) \Bigg|_{\alpha = 0}.$$

Тоді $\delta I = \int_a^b \left((y(x) + \alpha \delta y)^2 + y(x) + \alpha \delta y \right)' \Bigg|_{\alpha = 0} dx =$

$= \int_a^b \left(2(y(x) + \alpha \delta y) \delta y + \delta y \right) \Bigg|_{\alpha = 0} dx = \int_a^b \left(2y(x) \delta y + \delta y \right) dx =$

$= \int_a^b \left(2y(x) + 1 \right) \delta y dx$.

б.1) Знайдемо приріст функціонала:

$\Delta I = \int_a^b \left((y(x) + \delta y)(y(x) + \delta y + \cos x \right) dx - \int_a^b \left(y(x)(y(x) + \cos x \right) dx =$

$= \int_a^b \left(\underline{y^2} + y\delta y + \underline{\underline{y \cos x}} + y \delta y + (\delta y)^2 + \delta y \cos x \underline{- y^2} \underline{\underline{- y \cos x}} \right) dx =$

$= \int_a^b \left(2y(x) \delta y + \delta y \cos x + \left(\delta y \right)^2 \right) dx = \int_a^b \left(2y(x) + \cos x \right) \delta y dx +$

$+ \int_a^b \left(\delta y \right)^2 dx$. Отже, $\delta I = \int_a^b \left(2y(x) + \cos x \right) \delta y dx$.

б.2)

$\delta I = \frac{d}{d\alpha} \left(\int_a^b \left((y(x) + \alpha \delta y)(y(x) + \alpha \delta y + \cos x) \right) dx \right) \Bigg|_{\alpha = 0} =$

$$= \left(\int_a^b \left(\delta y(y(x) + \alpha\delta y + \cos x) + (y(x) + \alpha\delta y)\delta y \right) dx \right) \Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\delta y(y(x) + \cos x) + y(x)\delta y \right) dx = \int_a^b \left(y(x)\delta y + \cos x\delta y + y(x)\delta y \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(2y(x)\delta y + \cos x\delta y \right) dx = \int_a^b \left(2y(x) + \cos x \right) \delta y dx .$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайдіть відстань між вказаними функціями в просторі: а) $C([a;b])$**; б)** $C^1([a;b])$**. Зробіть відповідний рисунок:**

1) $f(x) = x^3; \quad g(x) = -x^2 + 2, \quad [a;b] = [2;3];$

2) $f(x) = \ln x;\ g(x) = x - 3, \quad [a;b] = [1;e].$

2. З'ясуйте, чи є задані функціонали лінійними:

а) $I[y] = y'(x_0)$; б) $I[y] = \int_a^b y(x)dx$; в) $I[y] = \int_a^b y^3(x)dx$.

3. Знайдіть значення вказаних функціоналів у заданих точках:

а) $I[y] = \int_0^1 y(x)dx$, $y_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; $y_2(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$;

б) $I[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy(x)dx$, $y_1(x) = \sin x$; $y_2(x) = \operatorname{arctg} x$;

в) $I[y] = \int_0^1 xy'(x)dx$, $y_1(x) = \ln(1 + x^2)$; $y_2(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Знайдіть приріст і варіацію вказаних функціоналів. Обчисліть їх для конкретних значень

функції і її приросту: а) $I[y]=\int\limits_0^1\left(y^3+xy\right)dx$**,** $y=x^3$**,** $\delta y=-2x$**; б)** $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y+y^2\sin x\right)dx$**,** $y=\cos x$**,** $\delta y=x$**.**

5. Знайдіть варіацію вказаних функціоналів двома способами: 1) $I[y]=\int\limits_a^b y(x)\sqrt{x}dx$ **; 2)** $I[y]=\int\limits_a^b\left(y^3(x)+x\right)dx$**.**

Відповіді: **1**. 1а) 34, 1б) 67, 2а) 2, 2б) $3-\frac{1}{e}$. **2.** а) так, б) так, в) ні. **3.** а) $\frac{1}{2}\ln 2$, $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{(\pi^2+16)\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}}{32}-\frac{\pi}{8}$; в) $2-\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$. **4.** а) $\delta I=-\frac{17}{12}$, $\Delta I=-\frac{17}{12}$; б) $\delta I=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}$, $\delta I=\frac{\pi^2}{8}+\frac{5\pi}{4}-2$. **5.** 1) $\delta I=\int\limits_a^b\sqrt{x}\delta y dx$; 2) $\delta I=\int\limits_a^b 3y^2\delta y dx$.

Тема 2. Елементарна задача варіаційного числення
Теоретичні питання

1. Функціонал виду $I[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$
2. Диференціальне рівняння Ейлера
3. Окремі випадки рівняння Ейлера

Література:

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с. С. 8-13, 15-21.
2. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008, 368 с. С 29-31, 35-36
3. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с. С. 29-36
4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. С. 87-101

Дайте відповіді на запитання (письмово):

1. Вкажіть область визначення функціонала $I[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$.

2. Що таке граничні умови? Скільки їх може бути сформульовано для функціонала $I[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$? Відповідь обгрунтуйте.

3. Чим відрізняються граничні умови від початкових умов?

4. Скільки розв’язків може мати задача

$$I[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \to extr$$

$$y(a)=y_a, \quad y(b)=y_b?$$

Чи не суперечить ваша правильна відповідь теоремі з курсу диференціальних рівнянь про існування і єдиність розв'язку задачі Коші?

5. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функціонала.

6. Для кожного поняття або твердження диференціального числення (**1–7**) доберіть аналогічне йому поняття або твердження варіаційного числення (**А–Ж**)

1.Стаціонарна точка функції	**А**) Числова (числові) функція (ї)
2.Другий диференціал функції d^2y	**Б**) Варіація функції δy
3. Приріст функції Δy	**В**) Приріст функціонала ΔI
4.Числова (числові) змінна (і)	**Г**) Варіація функціонала δI
5. Приріст аргументу	**Д**) Друга варіація функціонала $\delta^2 I$
6. Диференціал функції dy	**Е**) Необхідна умова існування екстремума $\delta I = 0$
7.Необхідна умова існування екстремуму $dy = 0$	**Є**) Значення функціонала
	Ж) Допустима екстремаль функціонала

7. Запишіть рівняння Ейлера. Чи завжди воно диференціальне? Назвіть порядок диференціального рівняння Ейлера.

8. Заповніть таблицю (за темою цього заняття)

Нові поняття	Відомі поняття (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)	Нові теоретичні твердження	Відомі теоретичні твердження (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)

Повторіть:

1. Розв’язування диференціальних рівнянь вигляду $y^{(n)} = f(x)$.
2. Розв’язування диференціальних рівнянь 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.

Навчальні завдання

1. Знайдіть екстремалі вказаних функціоналів:

а) $I[y] = \int\limits_0^5 ((2x+4)y + \left(y'\right)^2)dx$;

б) $I[y] = \int\limits_{-1}^1 (4y^2 - 3yy' + \left(y'\right)^2)dx$;

в) $I[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - 2y\sin x + 4y')dx$;

г) $I[y] = \int\limits_0^{\pi} (3\left(y'\right)^2 + 2y\cos x - 3y^2)dx$.

Розв’язання

а) Складемо і розв’яжемо диференціальне рівняння Ейлера. $F(x,y,y') = (2x+4)y + \left(y'\right)^2$, тоді частинні похідні

$\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} = 2x+4;\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 2y'$. Повна похідна по змінній x від $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ матиме вигляд $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = \dfrac{d}{dx}(2y') = 2y''$. Тоді диференціальне рівняння Ейлера $2x+4-2y''=0$. Тоді $y''=x+2$, $y' = \int (x+2)dx = \dfrac{x^2}{2}+2x+c_1$, $y = \int\left(\dfrac{x^2}{2}+2x+c_1\right)dx$, тобто $y = \dfrac{x^3}{6}+x^2+c_1x+c_2$ – двопараметричне сімейство екстремалей. Побудуємо кілька з них для різних значень c_1 та c_2 (рис. 2.1).

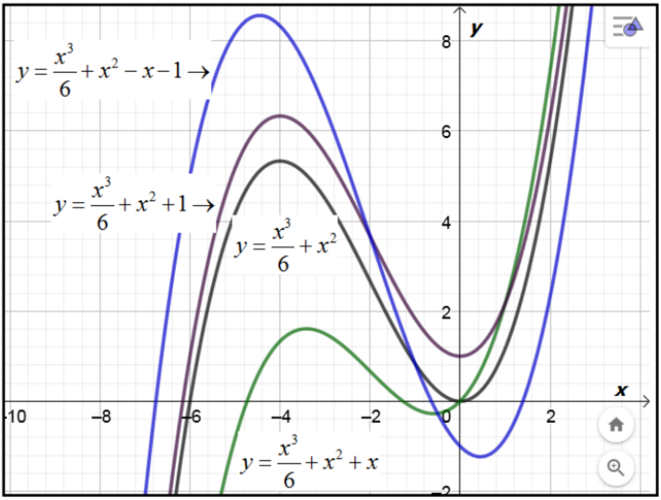

Рис. 2.1. Графіки екстремалей

б) $F(x,y,y')=4y^2-3yy'+\left(y'\right)^2$, тоді частинні похідні $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}=8y-3y'$; $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=-3y+2y'$. Повна похідна по змінній x від $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ матиме вигляд $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(-3y+2y'\right)=-3y'+2y''$. Тоді диференціальне рівняння Ейлера $8y-3y'+3y'-2y''=0$. Після спрощення $y''-4y=0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2-4=0$. Його розв'язки $k_1=2, k_2=-2$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вигляд $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$, де c_1, c_2 – довільні сталі. Це і є загальний вигляд екстремалей. На рис. 2.2 зображено кілька екстремалей для різних значень c_1 та c_2.

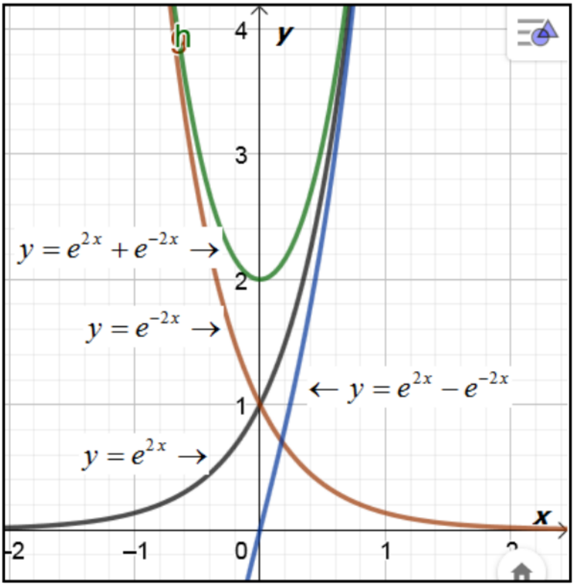

Рис. 2.2. Графіки екстремалей

в) $F(x,y,y') = y^2 - 2y\sin x + 4y'$, тоді частинні похідні $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} = 2y - 2\sin x;\ \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 4$. Повна похідна по змінній x від $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ матиме вигляд $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(4) = 0$. Тоді рівняння Ейлера $2y - 2\sin x = 0$ або $y = \sin x$ – єдина екстремаль (рис.2.3).

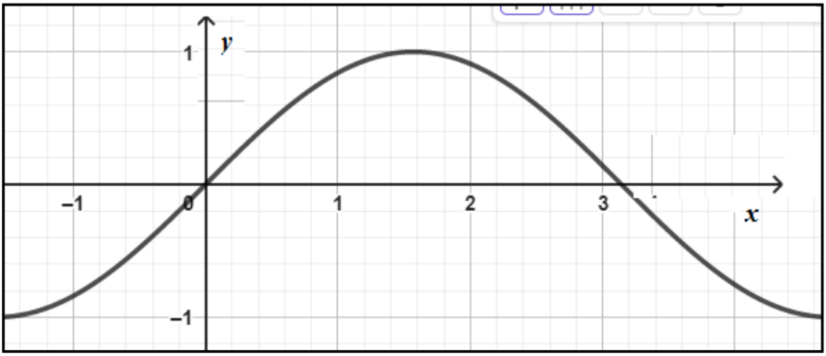

Рис. 2.3. Графік екстремалі $y = \sin x$

г) Запишемо підінтегральну функцію $F(x,y,y') = 3(y')^2 + 2y\cos x - 3y^2$, тоді частинні похідні $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} = 2\cos x - 6y;\ \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 6y'$. Повна похідна по змінній x від $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ матиме вигляд $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(6y') = 6y''$. Тоді диференціальне рівняння Ейлера $2\cos x - 6y - 6y'' = 0$. Після спрощення $y'' + y = \frac{1}{3}\cos x$.

Отримали неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку. Розв'яжемо відповідне однорідне: $y'' + y = 0$

Складемо характеристичне рівняння: $k^2+1=0$. Його розв'язки $k_1=i, k_2=-i$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{зо}=c_1\cos x+c_2\sin x$, де c_1, c_2 – довільні сталі. Число $0+i$ є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного будемо шукати у вигляді $y_{чн}=x(A\cos x+B\sin x)$. Тоді $y'_{чн}=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$,
$y''_{чн}=-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)$.
Підставимо $y_{чн}$ та $y''_{чн}$ в неоднорідне диференціальне рівняння:

$$-2A\sin x+2B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)+x(A\cos x+B\sin x)\equiv\frac{1}{3}\cos x.$$

$$-2A\sin x+2B\cos x+\underline{x(-A\cos x-B\sin x)}+\underline{x(A\cos x+B\sin x)}\equiv\frac{1}{3}\cos x.$$

Тоді $\begin{cases}-2A=0,\\ 2B=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ або $\begin{cases}A=0,\\ B=\dfrac{1}{6}\end{cases}$. Отже, $y_{чн}=\dfrac{1}{6}x\sin x$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $y_{зн}=c_1\cos x+c_2\sin x+\dfrac{1}{6}x\sin x$. Маємо двопараметричне сімейство екстремалей: $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\dfrac{1}{6}x\sin x$. На рис. 2.4 зображено кілька екстремалей для різних значень c_1 та c_2.

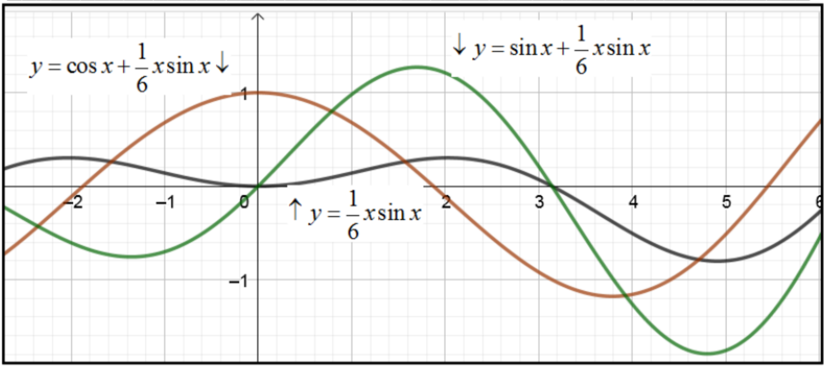

Рис. 2.4. Графіки екстремалей

2. Для заданих функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють вказані граничні умови. Побудуйте графіки цих екстремалей:

а) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y^3-12y\sin^2 x+10y')dx$, $y(0)=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2;$

б) $I[y]=\int\limits_0^{2}(y'^2+y^2+2ye^x)dx$, $y(0)=0,\ y(2)=e^{-2};$

в) $I[y]=\int\limits_0^{\pi}(y'^2-y^2)dx$, $y(0)=1,\ \ y(\pi)=-1.$

Розв'язання

а) Запишемо підінтегральну функцію $F(x,y,y')=y^3-12y\sin^2 x+10y'$, тоді частинні похідні $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}=3y^2-12\sin^2 x;\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=10$. Повна похідна по змінній x від $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ матиме вигляд $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}(10)=0.$ Рівняння Ейлера $3y^2-12\sin^2 x=0.$

Після спрощення $y^2 - 4\sin^2 x = 0$. Тоді $y = 2\sin x$ або $y = -2\sin x$. Перевіримо виконання граничних умов: нехай $y = 2\sin x$, тоді $y(0) = 2\sin 0 = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$, тобто граничні умови виконуються; нехай тепер $y = -2\sin x$, тоді $y(0) = -2\sin 0 = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2 \neq 2$, тобто граничні умови не виконуються. Отже, існує єдина допустима екстремаль $y = 2\sin x$ (рис. 2.5а).

Як бачимо, задача має єдиний розв'язок. Чи можна змінити умову задачі так, щоб вона не мала розв'язків? Так, можна, наприклад, якщо $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Чи можна змінити умову задачі так, щоб розв'язком була екстремаль $y = -2\sin x$? Так, якщо $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ (рис. 2.5б).

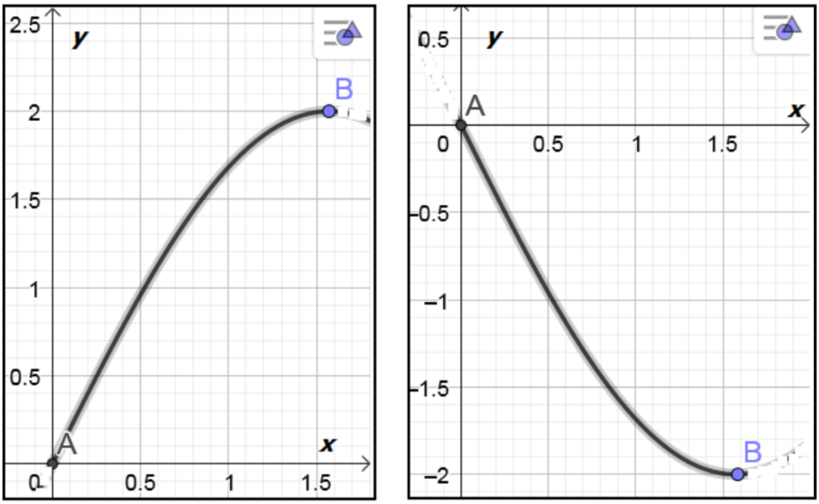

Рис. 2.5. Графіки екстремалей

а) $y = 2\sin x$; б) $y = -2\sin x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

б) Підінтегральна функція $F(x, y, y') = y'^2 + y^2 + 2ye^x$, її частинні похідні $\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} = 2y + 2e^x$; $\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 2y'$. Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = \dfrac{d}{dx}(2y') = 2y''$. Рівняння Ейлера $2y + 2e^x - 2y'' = 0$ або $y'' - y = e^x$. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' - y = 0$. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд $k^2 - 1 = 0$, його корені $k_1 = 1, k_2 = -1$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вигляд $y_{зо} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, де c_1, c_2 – довільні сталі. Число 1 є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного будемо шукати у вигляді $y_{чн} = Axe^x$. Тоді $y'_{чн} = Ae^x + Axe^x$, $y''_{чн} = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$. Тоді маємо $2Ae^x + Axe^x - Axe^x \equiv e^x$, звідки $A = \dfrac{1}{2}$ і $y_{чн} = \dfrac{1}{2}xe^x$. Отже, загальний розв'язок $y_{зн} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \dfrac{1}{2}xe^x$. Врахуємо граничні умови. $y(0) = 0$, тоді $0 = c_1 + c_2$; $y(2) = e^{-2}$, то $e^{-2} = c_1 e^2 + c_2 e^{-2} + e^2$. Маємо систему $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^2 + c_2 e^{-2} + e^2 = e^{-2}. \end{cases}$ Її розв'язки $c_1 = -1, c_2 = 1$. Тоді допустима екстремаль $y = -e^x + e^{-x} + \dfrac{1}{2}xe^x$ і вона єдина (рис.2.6).

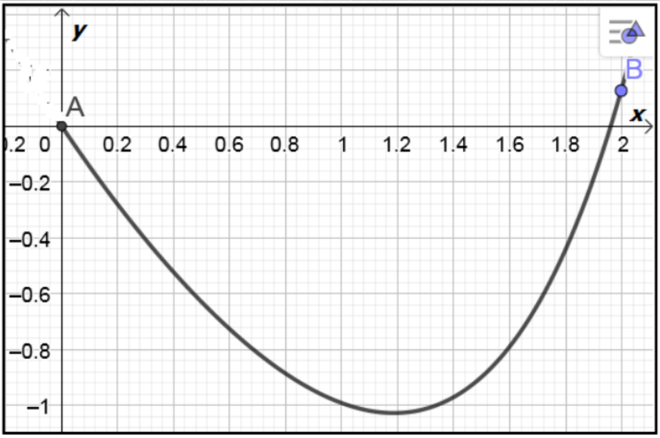

Рис. 2.6. Графік екстремалі

в) Підінтегральна функція $F(x,y,y') = y'^2 - y^2$, її частинні похідні $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} = -2y$; $\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 2y'$. Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = \dfrac{d}{dx}(2y') = 2y''$. Рівняння Ейлера $-2y - 2y'' = 0$ або $y'' + y = 0$. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 1 = 0$, його корені $k_1 = i, k_2 = -i$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, де c_1, c_2 – довільні сталі. Врахуємо граничні умови. $y(0) = 1$, тоді $1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0$; $y(\pi) = -1$, то $-1 = c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 0$. Маємо систему $\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 \in R. \end{cases}$

Отже, $y = \cos x + c_2 \sin x$ – однопараметричне сімейство допустимих екстремалей (на рис. 2.7 побудовано кілька з них).

Чи можна змінити граничні умови так, щоб:

1) задача не мала розв'язків;
2) мала єдиний розв'язок?

Нехай $y(0)=a$, $y(\pi)=b$. Тоді система для знаходження сталих c_1, c_2 має вигляд $\begin{cases} c_1\cdot 1+c_2\cdot 0=a, \\ c_1\cdot(-1)+c_2\cdot 0=b. \end{cases}$

Після спрощення $\begin{cases} c_1=a, \\ c_1=-b. \end{cases}$ Отже, якщо $a\neq -b$, то допустимих екстремалей не існує; якщо $a=-b$, то матимемо однопараметричне сімейство екстремалей.

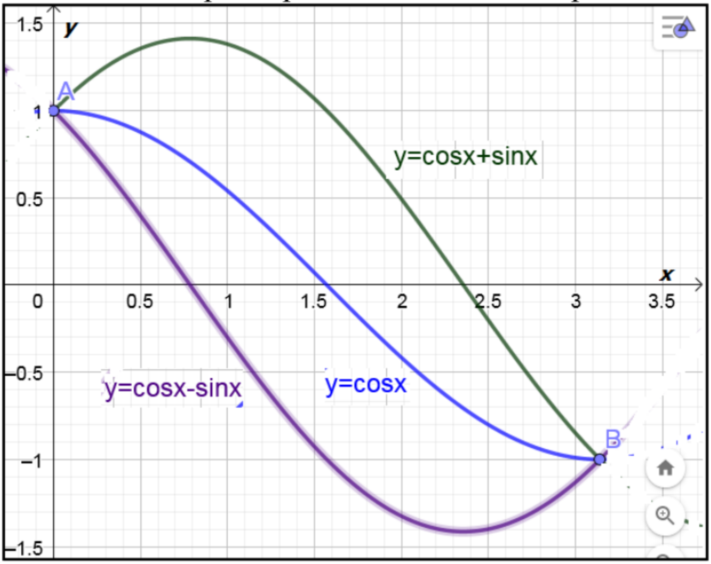

Рис. 2.7. Графіки допустимих екстремалей

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайдіть екстремалі вказаних функціоналів:

а) $I[y]=\int\limits_0^1 (2y-2xy'+y'^2)dx$;

б) $I[y]=\int\limits_0^{\pi} (y'^2-2y+4y\cos x)dx$;

в) $I\left[y\right]=\int\limits_0^1 (2xy-y'^2)dx$;

г) $I\left[y\right]=\int\limits_0^7 (y'^3-y'^2)dx$;

д) $I\left[y\right]=\int\limits_a^b (2xy+(x^2+e^y)y')dx$;

е) $I\left[y\right]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2-y'^2-2y\sin x)dx$; є) $I\left[y\right]=\int\limits_0^1 yy'^2dx$.

2. Для заданих функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють вказані граничні умови. Побудуйте графіки цих екстремалей:

а) $I[y]=\int\limits_0^2 (y'^2+32yx+6y)dx,\ y(0)=1,\ y\left(2\right)=3$;

б) $I[y]=\int\limits_0^1 (y'^2+4y^2)dx,\ y(0)=e^2,\ y\left(1\right)=1$;

в) $I[y]=\int\limits_{-1}^1 (y'+x^2y'^2)dx,\ y(-1)=0,\ y\left(1\right)=1$;

г) $I[y]=\int\limits_1^e (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0,\ y\left(e\right)=1$;

д) $I[y]=\int\limits_0^2 (y'^2+y^2+2ye^{-x})dx,\ y(0)=0,\ y\left(2\right)=-e^{-2}$;

е) $I[y]=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (y^2\cos x+2yy'\sin x)dx,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$;

є) $I[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} (y+xy')dx,\ y(x_0)=y_0,\ y\left(x_1\right)=y_1$.

Відповіді: **1.** а) $y = x^2 + c_1 x + c_2$; б) $y = -\frac{x^2}{2} - 2\cos x + c_1 x + c_2$; в) $y = -\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$; г) $y = c_1 x + c_2$; д) будь-яка неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$ функція; е) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$; є) $y = \left(c_1 x + c_2\right)^{\frac{2}{3}}$. **2.** а) $y = \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{38}{3}x + 1$; б) $y = e^{2-2x}$; в) нема екстремалей. *Вказівка.* Допустима екстремаль є неперервно диференційовна на вказаному відрізку функція; г) $y = \frac{e}{e-1}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$; д) $y = -\frac{1}{2} x e^{-x}$; е) будь-яка неперервно диференційовна на відрізку $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ функція, яка задовольняє вказані граничні умови; є) будь-яка неперервно диференційовна на відрізку $\left[x_0; x_1\right]$ функція, яка задовольняє вказані граничні умови.

Тема 3. Функціонали, які залежать від двох функцій

Теоретичні питання

1. Функціонал $I[y,z]=\int_a^b F(x,y,z\,y',z')dx$ та граничні умови.
2. Система диференціальних рівнянь Ейлера

Література:

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с. С. 74-78
2. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008, 368 с. С. 31-33
3. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с. С. 52-57
4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. С. 101-106

Дайте відповіді на запитання (письмово):

1. Вкажіть область визначення функціонала $I[y,z]=\int_a^b F(x,y,z\,y',z')dx$.

2. Що таке граничні умови? Скільки їх може бути сформульовано для функціонала $I[y,z]=\int_a^b F(x,y,z\,y',z')dx$? Відповідь обгрунтуйте.

3. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функціонала $I[y,z]=\int_a^b F(x,y,z\,y',z')dx$.

4. Запишіть систему рівнянь Ейлера. Чи завжди вона диференціальна?

5. Заповніть таблицю (за темою цього заняття)

Нові поняття	Відомі поняття	Нові	Відомі

	(під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)	теоретичні твердження	теоретичні твердження (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)

Повторіть: Методи розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь

Навчальні завдання

1. **Для заданих функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють вказані граничні умови. Побудуйте графіки цих екстремалей**:

а) $I[y,z]=\int\limits_0^1\left(3y'^2+3z'^2+6yz\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y(1)=1$, $z(1)=-1$;

б) $I[y,z]=\int\limits_1^2\left(12xy+y'+z'+yz'\right)dx$, $y(1)=0$, $z(1)=2$, $y(2)=0$, $z(2)=-16$;

в) $I[y,z]=\int\limits_0^1\left(y'z'+6xy+12x^2z\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y(1)=1$, $z(1)=1$;

г) $I[y,z]=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(y'^2-2xyz'\right)dx$. $y\left(\frac{1}{2}\right)=2$, $z\left(\frac{1}{2}\right)=15$, $y(1)=1$, $z(1)=1$.

Розв'язання

а) $F(x,y,z,y',z') = 3y'^2 + 3z'^2 + 6yz$. Знайдемо частинні похідні, які входять в систему диференціальних рівнянь: $\frac{\partial F}{\partial y} = 6z$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 6y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(6y') = 6y''$; $\frac{\partial F}{\partial z} = 6y$, $\frac{\partial F}{\partial z'} = 6z'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{d}{dx}(6z') = 6z''$. Складемо систему: $\begin{cases} 6z - 6y'' = 0, \\ 6y - 6z'' = 0. \end{cases}$ Після спрощення $\begin{cases} z - y'' = 0, \\ y - z'' = 0. \end{cases}$

З 1-го рівняння $z = y''$. Тоді $z'' = y^{IV}$. Тоді 2-ге рівняння має вигляд $y^{IV} - y = 0$. Складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його: $k^4 - 1 = 0$; $(k-1)(k+1)(k-i)(k+i) = 0$; $k_1 = 1$; $k_1 = -1$; $k_1 = i$; $k_1 = -i$. Тоді

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x .$$

Оскільки $z = y''$, то $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 \cos x - c_4 \sin x$, $y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \sin x - c_4 \cos x$.

Отже, $z = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \sin x - c_4 \cos x$.

Обчислимо сталі, враховуючи граничні умови.

$y(0) = 0$, тоді $c_1 + c_2 + c_4 = 0$;

$z(0) = 0$, тоді $c_1 + c_2 - c_4 = 0$;

$y(1) = 1$, тоді $c_1 e + c_2 e^{-1} + c_3 \sin 1 + c_4 \cos 1 = 1$;

$z(1) = -1$, тоді $c_1 e + c_2 e^{-1} - c_3 \sin 1 - c_4 \cos 1 = -1$.

Маємо систему $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 + c_2 - c_4 = 0, \\ c_1 e + c_2 e^{-1} + c_3 \sin 1 + c_4 \cos 1 = 1, \\ c_1 e + c_2 e^{-1} - c_3 \sin 1 - c_4 \cos 1 = -1. \end{cases}$ Розв'язок цієї системи $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $c_3 = \dfrac{1}{\sin 1}$.

Отже, $y = \dfrac{\sin x}{\sin 1}$, $z = -\dfrac{\sin x}{\sin 1}$ – допустимі екстремалі (рис.3.1).

б) $F(x, y, z, y', z') = 12xy + y' + z' + yz'$. Знайдемо частинні похідні, які входять в систему диференціальних рівнянь: $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 12x + z'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 1$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = \dfrac{d}{dx}(1) = 0$; $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z'} = 1 + y$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = \dfrac{d}{dx}(1 + y) = y'$. Складемо систему: $\begin{cases} 12x + z' = 0, \\ -y' = 0. \end{cases}$

З 1-го рівняння $z' = -12x$. Тоді $z = -6x^2 + c_1$. З 2-го рівняння має вигляд $y = c_2$.

Обчислимо сталі, враховуючи граничні умови. Оскільки $y(1) = 0$ та $y(2) = 0$, то $c_2 = 0$. Отже, $y = 0$.
$z(1) = 2$, тоді $2 = -6 + c_1$, тобто $2 = -6 + c_1$, $c_1 = 8$. Тоді $z = -6x^2 + 8$. Перевіримо, чи виконується умова $z(2) = -16$. $z(2) = -6 \cdot 2^2 + 8 = -24 + 8 = -16$ – виконується. Отже, допустимі екстремалі $y = 0$, $z = -6x^2 + 8$ (рис. 3.2).

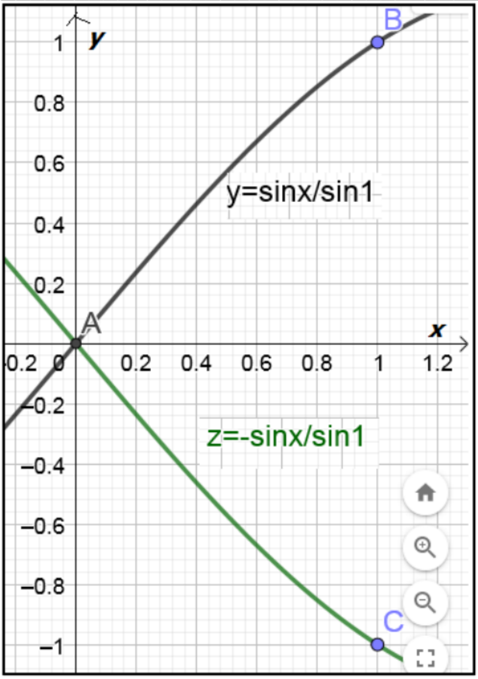

Рис. 3.1.

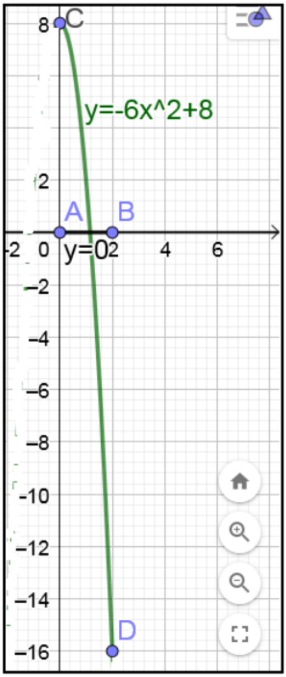

Рис. 3.2.

Графіки екстремалей

в) $F(x,y,z,y',z')=y'z'+6xy+12x^2z$. Знайдемо частинні похідні, які входять в систему диференціальних рівнянь: $\frac{\partial F}{\partial y}=6x$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=z'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}(z')=z''$; $\frac{\partial F}{\partial z}=12x^2$, $\frac{\partial F}{\partial z'}=y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=\frac{d}{dx}(y')=y''$. Складемо систему: $\begin{cases} 6x-z''=0, \\ 12x^2-y''=0. \end{cases}$ Розв'яжемо кожне з рівнянь. 1-е рівняння: $6x-z''=0$, тоді $z''=6x$, $z'=3x^2+c_1$, $z=x^3+c_1x+c_2$. 2-ге рівняння: $y''=12x^2$, тоді $y'=4x^3+c_3$, $y=x^4+c_3x+c_4$.

Визначимо невідомі сталі з граничних умов. Матимемо систему: $\begin{cases} c_4 = 0, \\ 1 + c_3 = 1, \\ c_2 = 0, \\ c_1 + 1 = 1. \end{cases}$ Всі сталі рівні нулю і допустимі екстремалі $y = x^4$, $z = x^3$ (рис. 3.3).

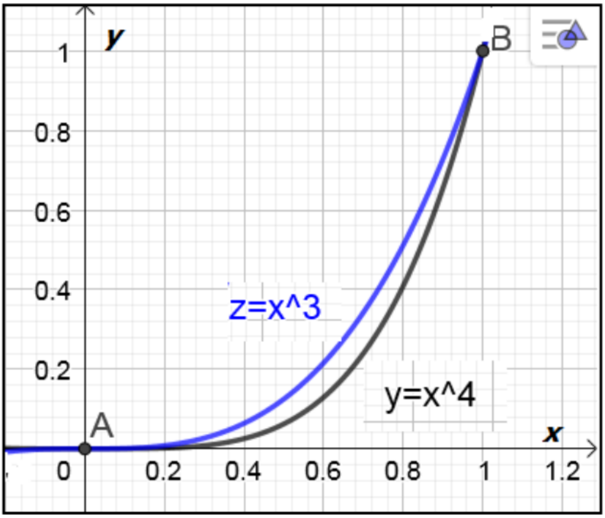

Рис. 3.3. Графіки екстремалей

г) $F(x, y, z, y', z') = y'^2 - 2xyz'$. Знайдемо частинні похідні, які входять в систему диференціальних рівнянь: $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2xz'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(2y'\right) = 2y''$; $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z'} = -2xy$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(-2xy\right) = -2y - 2xy'$. Складемо систему: $\begin{cases} -2xz' - 2y'' = 0, \\ 0 - (-2y - 2xy') = 0. \end{cases}$ Розв'яжемо 2-ге рівняння.

$2y+2xy'=0$, поділимо обидві частини на $2x\neq 0$. Тоді $y'+\dfrac{1}{x}y=0$ – лінійне однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Його розв'язок $y=c_1e^{-\int\frac{1}{x}dx}$ або $y=\dfrac{c_1}{x}$. Для знаходження функції $z=z(x)$ розглянемо 1-е рівняння системи і врахуємо, що $y=\dfrac{c_1}{x}$: $2xz'+2\left(\dfrac{c_1}{x}\right)''=0$. Тоді $2xz'-2\left(\dfrac{c_1}{x^2}\right)'=0$, $xz'+\dfrac{2c_1}{x^3}=0$. З останнього рівняння виразимо z': $z'=-\dfrac{2c_1}{x^4}$. Тоді $z=\dfrac{2c_1}{3x^3}+c_2$.

Визначимо невідомі сталі з граничних умов. Оскільки $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$, то $2=\dfrac{c_1}{\frac{1}{2}}$, тобто $c_1=1$. Отже, $y=\dfrac{1}{x}$. Друга умова $y(1)=1$ також виконується. Для $z=\dfrac{2}{3x^3}+c_2$ з умови $z\left(\dfrac{1}{2}\right)=15$ маємо, що $15=\dfrac{16}{3}+c_2$. Тоді $c_2=\dfrac{29}{3}$ і $z=\dfrac{2}{3x^3}+\dfrac{29}{3}$. Але для цієї функції не виконується умова $z(1)=1$. Тому задача розв'язків не має.

Чи можна змінити граничні умови так, щоб існував розв'язок задачі? Так, наприклад, $z(1)=\dfrac{31}{3}$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Для заданих функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють вказані граничні умови. Побудуйте графіки цих екстремалей:

а) $I[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2z-4y^2+y'^2-z'^2\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y(\frac{\pi}{4})=1$, $z(\frac{\pi}{4})=1$;

б) $I[y,z]=\int\limits_{-1}^{1}\left(2xy-y'^2+\frac{z'^3}{3}\right)dx$, $y(-1)=2$, $z(-1)=-1$, $y(1)=0$, $z(1)=1$;

в) $I[y,z]=\int\limits_0^{\pi}\left(-2y^2+y'^2-z'^2+2yz\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$ $y(\pi)=1$, $z(\pi)=-1$;

г) $I[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2yz+y'^2+z'^2\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$;

д) $I[y,z]=\int\limits_{-1}^{1}\left(y'^2+z^2+z'^2\right)dx$, $y(-1)=0$, $z(-1)=5e^{-1}$, $y(1)=2$, $z(1)=5e$;

е) $I[y,z]=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2y-\frac{1}{2}y'^2+z'^2\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=1$, $y(-1)=-\frac{1}{12}$, $z(-1)=-1$;

є) $I[y,z]=\int\limits_{-2}^{2}\left(y'^2+z'^2+y'z'\right)dx$, $y(-2)=6$, $z(-2)=-5$, $y(2)=2$, $z(2)=3$;

ж) $I[y,z]=\int\limits_0^1\left(y'^2+z'^2+2y\right)dx$, $y(0)=1$, $z(0)=0$, $y(1)=\frac{3}{2}$, $z(1)=1$;

з) $I[y,z]=\int\limits_0^1\left(y'^2+z'^2-2yz\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y(1)=sh1$, $z(1)=-sh1$;

и) $I[y,z]=\int\limits_0^1\left(y^2+z^2+2y'z'\right)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, $y(1)=\mathrm{sh}1$, $z(1)=\mathrm{sh}1$.

2. Знайдіть допустимі екстремалі функціонала

$$I[y,z]=\int\limits_a^b\left(2y\cos x+2z^2+2y'z'+y'^2-z'^2\right)dx.$$

Відповіді: **1.** а) $y=\sin 2x$, $z=-\frac{x^2}{2}-\frac{\pi^2+32}{8\pi}$; б) $y=-\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$, $z=x$; в) нема екстремалей; г) $y=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}\left(e^x-e^{-x}\right)$, $z=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}\left(e^x-e^{-x}\right)$; д) $y=x+1$, $z=5e^x$; е) $y=-\frac{x^4}{12}$, $z=2x+1$; є) $y=-x+4$, $z=2x-1$; ж) $y=\frac{x^2}{2}+1$, $z=x$; з) $y=\mathrm{sh}\,x$, $z=-\mathrm{sh}\,x$; и) $y=\mathrm{sh}\,x$, $z=\mathrm{sh}\,x$. **2.** $y=-c_1\cos x-c_2\sin x-\cos x-\frac{1}{4}x\sin x+c_3x+c_4$, $z=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{4}x\sin x$.

Тема 4. Функціонали, які залежать від однієї функції й похідних вищих порядків

Теоретичні питання

1. Функціонал виду $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')dx$ та граничні умови
2. Необхідна умова існування екстремуму функціонала $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')dx$
3. Диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона

Література:

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с. С. 63-74
2. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008, 368 с. С. 33-34
3. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с. С. 58-64
4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. С. 106-110

Дайте відповіді на запитання:

1. Вкажіть область визначення функціонала $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')dx$.

2. Що таке граничні умови? Скільки їх може бути сформульовано для функціонала $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')dx$? Відповідь обгрунтуйте.

3. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функціонала $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')dx$.

4. Запишіть рівняння Ейлера-Пуассона. Чи завжди воно диференціальне?

5. Вкажіть порядок диференціального рівняння Ейлера-Пуассона.

6. Заповніть таблицю (за темою цього заняття)

Нові поняття	Відомі поняття (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)	Нові теоретичні твердження	Відомі теоретичні твердження (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)

Повторіть: 1. Розв’язування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків.

2. Корінь *n*-го степеня з комплексного числа.

Навчальні завдання

1. **Знайдіть екстремалі вказаних функціоналів, які задовольняють заданим граничним умовам. Побудуйте графіки цих екстремалей:**

а) $I[y]=\int\limits_0^1 (y''^2+2x)dx$, $y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=0,\ y'(1)=1;$

б) $I[y]=\int\limits_0^1 (y^2+2y'^2+y''^2)dx$, $y(0)=0,\ y\left(1\right)=0,\ y'(0)=1,$ $y'\left(1\right)=-\text{sh}1;$

в) $I[y]=\int\limits_a^b (y+y'')dx$, $y(a)=y_{00},\ y(b)=y_{10},\ y'(a)=y_{01},$ $y'\left(b\right)=y_{11};$

г) $I[y]=\int\limits_a^b (y'^2+yy'')dx$, $y(\text{a})=A_1,\ y(b)=B_1,\ y'(a)=A_2,$ $y'\left(b\right)=B_2;$

д) $I[y]=\int\limits_0^1 (x+1)^2 y''^2 dx$, $y(0)=0,\ y\left(1\right)=\ln 2,\ y'(0)=1,$ $y'\left(1\right)=\dfrac{1}{2}.$

Розв'язання

а) $F(x,y,y',y'')=y''^2+2x$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=2y''.$ Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(0\right)=0,$ $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=\dfrac{d^2}{dx^2}(2y'')=\dfrac{d}{dx}(2y''')=$ $=2y^{\text{IV}}$. Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона: $0-0+2y^{\text{IV}}=0$ або $y^{\text{IV}}=0$. Тоді $y'''=c_1$, $y''=c_1x+c_2$, $y'=\dfrac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3,\ y=\dfrac{c_1x^3}{6}+\dfrac{c_2x^2}{2}+c_3x+c_4.$

Знайдемо сталі, враховуючи граничні умови. Оскільки $y(0)=0$, то $c_4=0$; $y'(0)=0$, то $c_3=0$; $y\left(1\right)=1$, то з врахуванням, що $c_3 = 0$ і $c_4 = 0$, $\frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} = 1$; $y'(1) = 1$, то $\frac{c_1}{2} + c_2 = 1$. Розв'язком системи $\begin{cases} \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} = 1, \\ \frac{c_1}{2} + c_2 = 1, \end{cases}$ є пара чисел $c_1 = -6$, $c_2 = 4$. Отже, шукана екстремаль $y = -x^3 + 2x^2$ (рис. 4.1).

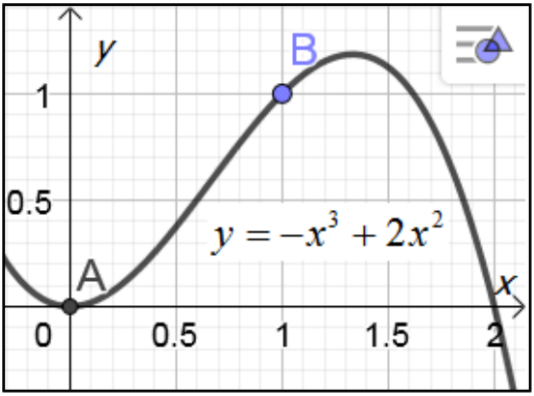

Рис. 4.1. Графік екстремалі
(частина кривої від точки *A* до точки *B*)

б) $F(x, y, y', y'') = y^2 + 2y'^2 + y''^2$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 4y'$, $\frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$. Тоді $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(4y') = 4y''$, $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 2y^{\mathrm{IV}}$. Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона: $2y - 4y'' + 2y^{\mathrm{IV}} = 0$ або $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = 0$. Характеристичне рівняння $k^4 - 2k^2 + 1 = 0$, його розв'язки $k_1 = k_2 = 1, k_3 = k_4 = -1$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{x}(\overline{c_1} + \overline{c_2}x) + e^{-x}(\overline{c_3} + \overline{c_4}x).$$

Оскільки одна з граничних умов задана як $y'(1) = -\operatorname{sh}1$, то, враховуючи формули $\operatorname{ch}x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, запишемо розв'язок у вигляді

$$y = c_1 \operatorname{sh}x + c_2 \operatorname{ch}x + c_3 x \operatorname{sh}x + c_4 x \operatorname{ch}x.$$

Знайдемо сталі, враховуючи граничні умови. З умови $y(0) = 0$ маємо, що $c_2 = 0$. Тоді

$$y = c_1 \operatorname{sh}x + c_3 x \operatorname{sh}x + c_4 x \operatorname{ch}x.$$

Знайдемо $y' = c_1 \operatorname{ch}x + c_3 \operatorname{sh}x + c_3 x \operatorname{ch}x + c_4 \operatorname{ch}x + c_4 x \operatorname{sh}x$. З урахуванням умов $y(1) = 0,\ y'(0) = 1,\ y'(1) = -\operatorname{sh}1$ маємо систему:

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{sh}1 + c_3 \operatorname{sh}1 + c_4 \operatorname{ch}1 = 0, \\ c_1 + c_4 = 1, \\ c_1 \operatorname{ch}1 + c_3 \operatorname{sh}1 + c_3 \operatorname{ch}1 + c_4 \operatorname{ch}1 + c_4 \operatorname{sh}1 = -\operatorname{sh}1. \end{cases}$$

Її розв'язки $c_1 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 0$. Тоді допустима екстремаль $y = \operatorname{sh}x - x\operatorname{sh}x$ (рис. 4.2).

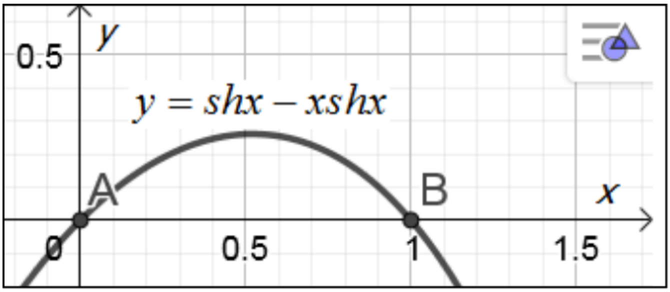

Рис. 4.2. Графік екстремалі
(частина кривої від точки *A* до точки *B*)

в) $F(x,y,y',y'')=y+y''$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=1$. Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}(0)=0$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=\dfrac{d^2}{dx^2}(1)=0$. Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона: $1-0+0=0$. Записана рівність не може виконуватися ні для яких функцій, тому цей функціонал екстремалей не має.

г) $F(x,y,y',y'')=y'^2+yy''$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=y''$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=2y'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=y$. Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}(2y')=2y''$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=\dfrac{d^2}{dx^2}(y)=y''$. Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона: $y''-2y''+y''=0$. Розв’язком цього рівняння є будь-яка двічі диференційовна на відрізку $[a;b]$ функція. Допустимими екстремалями з них будуть ті, які задовольняють задані граничні умови. Таких функцій буде безліч.

д) $F(x,y,y',y'')=(x+1)^2y''^2$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=(x+1)^2\cdot 2y''$. Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}(0)=0$. Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона: $0-0+\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$. Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=\overline{c_1}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=\overline{c_1}x+\overline{c_2}$, тобто $(x+1)^2\cdot 2y''=\overline{c_1}x+\overline{c_2}$. Перепишемо рівняння: $y'' = \dfrac{\overline{c_1}x + \overline{c_2}}{2(x+1)^2}$ або $y'' = \dfrac{\overline{c_1}(x+1) + \overline{c_2} - \overline{c_1}}{2(x+1)^2}$. Тоді $y'' = \dfrac{c_1}{x+1} + \dfrac{c_2}{(x+1)^2}$, де $c_1 = \dfrac{\overline{c_1}}{2}$, $c_2 = \dfrac{\overline{c_2} - \overline{c_1}}{2}$. Двічі зінтегруємо рівність $y'' = \dfrac{c_1}{x+1} + \dfrac{c_2}{(x+1)^2}$. Маємо, що $y' = c_1 \ln(x+1) - \dfrac{c_2}{x+1} + c_3$, $y = c_1 \int \ln(x+1)dx - c_2 \ln(x+1) + $ $+c_3 x$. Застосувавши інтегрування частинами, маємо, що $\int \ln(x+1)dx = (x+1)\ln(x+1) - x$.

Тоді $y = c_1((x+1)\ln(x+1) - x) - c_2 \ln(x+1) + c_3 x + c_4$. Знайдемо сталі, враховуючи граничні умови. З умови $y(0) = 0$ слідує, що $c_4 = 0$. Оскільки $y(1) = \ln 2$, то $c_1(2\ln 2 - 1) - c_2 \ln 2 + c_3 = \ln 2$; $y'(0) = 1$, то $-c_2 + c_3 = 1$; $y'(1) = \dfrac{1}{2}$, то $c_1 \ln 2 - \dfrac{c_2}{2} + c_3 = \dfrac{1}{2}$. Складемо систему

$$\begin{cases} c_1(2\ln 2 - 1) - c_2 \ln 2 + c_3 = \ln 2, \\ -c_2 + c_3 = 1, \\ c_1 \ln 2 - \dfrac{c_2}{2} + c_3 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Її розв’язок $c_1 = 0$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$. Тоді допустима екстремаль $y = \ln(x+1)$ (рис. 4.3).

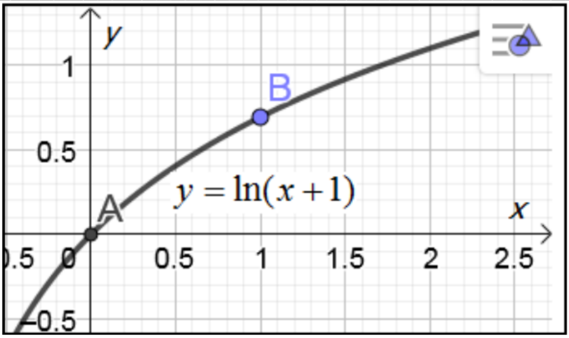

Рис. 4.3. Графік екстремалі
(частина кривої від точки *A* до точки *B*)

2. Знайдіть екстремалі функціонала $I[y]=\int\limits_a^b (y^2+y''^2-2yx^3)dx$.

Розв'язання

$F(x,y,y',y'')=y^2+y''^2-2yx^3$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-2x^3$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=2y''$. Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}(0)=0$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=2y^{IV}$. Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона: $2y-2x^3+2y^{IV}=0$ або $y^{IV}+y=x^3$. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y^{IV}+y=x^3$. Характеристичне рівняння $k^4+1=0$ або $k^4=-1$. Запишемо число -1 в тригонометричній формі: $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ і обчислимо $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=$
$=\cos\dfrac{\pi+2\pi n}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi n}{4}$, $n=0;1;2;3$. Його корені:

$$k_0=\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{4}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k_3 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{зо} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_3\cos x + c_4\sin x).$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Оскільки число $a = 0$ не є розв'язком характеристичного рівняння, то $y_{чн} = bx^3 + cx^2 + dx + e$. Знайдемо похідні до 4-го порядку включно й підставимо в неоднорідне диференціальне рівняння. $y'_{чн} = 3bx^2 + 2cx + d$, $y''_{чн} = 6bx + 2c$, $y'''_{чн} = 6b$, $y^{IV}{}_{чн} = 0$. Тоді $0 + bx^3 + cx^2 + dx + e \equiv x^3$. Отже, $b = 1, c = 0, d = 0, e = 0$ і $y_{чн} = x^3$. Тоді шукані екстремалі

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}(c_3\cos x + c_4\sin x) + x^3.$$

Завдання для аудиторної роботи

1. Для вказаних функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють заданим граничним умовам. Побудуйте графіки цих екстремалей:

а) $I[y] = \int_0^1 (y''^2 + 2x)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(0) = 1$, $y'(1) = 1$;

б) $I[y]=\int\limits_0^1 e^{-x}y''^2dx$, $y(0)=0$, $y(1)=e$, $y'(0)=1$, $y'(1)=2e$;

в) $I[y]=\int\limits_{-1}^0 (24y-y''^2)dx$, $y(-1)=\frac{1}{2}$, $y(0)=0$, $y'(-1)=1$, $y'(0)=0$;

г) $I[y]=\int\limits_0^1 (y'^2+y''^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\mathrm{sh}1$, $y'(0)=1$, $y'(1)=\mathrm{ch}1$;

д) $I[y]=\int\limits_0^1 (y''^2+3\arcsin x)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(0)=0$, $y'(1)=0$;

е) $I[y]=\int\limits_0^1 (y''^2-48y)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=0$, $y'(0)=-4$, $y'(1)=0$;

є) $I[y]=\int\limits_0^1 (y''^2-16y^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=e^2-\cos 2$, $y'(0)=2$, $y'(1)=2e^2+2\sin 2$;

ж) $I[y]=\int\limits_0^1 (-y''^2+360x^2y)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$, $y'(0)=1$, $y'(1)=\frac{5}{2}$;

з) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y''^2-y^2)dx$, $y(0)=1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $y'(0)=0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

Відповіді: **1.** а) $y=x$; б) $y=xe^x$; в) $y=\dfrac{x^4}{2}+3x^3+3x^2$; г) $y=\operatorname{sh}x$; д) $y=-2x^3+3x^2$; е) $y=2x^4-6x^3+7x^2-4x+1$; є) $y=e^{2x}-\cos 2x$; ж) $y=\dfrac{x^6}{2}+\dfrac{3x^3}{2}-3x^2+x$; з) $y=\cos x$.

Тема 5. Достатня умова існування екстремума в елементарній задачі варіаційного числення

Теоретичні питання

1. Власне і центральне поле
2. Поле екстремалей
3. Достатні умови Лежандра існування екстремума функціонала

Література:

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с. С. 41-43

2. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008, 368 с. С. 49-52

3. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с. С. 74-92

4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. С. 265-274

Дайте відповіді на запитання:

1. Сформулюйте елементарну задачу варіаційного числення.
2. Сформулюйте означення власного поля сімейства кривих. Наведіть приклади.
3. Що таке функція нахилу власного поля? Як її визначити для поля $y = y(x,c)$? Наведіть приклади.
4. Сформулюйте означення центрального поля сімейства кривих. Наведіть приклади.
5. Від яких умов залежить факт, що задане сімейство кривих утворює власне поле? Центральне поле? Чи можна із центрального поля зробити власне поле? Наведіть приклади.

6. Сформулюйте означення поля екстремалей елементарної задачі варіаційного числення. Яким може бути це поле?

7. Сформулюйте достатні умови Лежандра існування екстремуму елементарної задачі варіаційного числення.

8. Заповніть таблицю (за темою цього заняття)

Нові поняття	Відомі поняття (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)	Нові теоретичні твердження	Відомі теоретичні твердження (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)

Повторіть: 1. Розв'язування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків.

2. Достатня умова існування екстремума числової функції дійсного аргумента.

3. Властивості гіперболічних функцій.

Навчальні завдання

1. Нехай область *D* задана як $x^2+y^2 \le 4$. Чи будуть утворювати задані сімейства кривих власне поле в цій області? Зробіть відповідні рисунки: а) $y = x + c, c \in R$; б) $y = (x+c)^2 - 2, c \in R$.

Розв'язання

а) Так, сімейство кривих $y = x + c, c \in R$ утворює в області ***D*** власне поле, оскільки через кожну точку круга $x^2+y^2 \le 4$ проходить єдина пряма із заданого сімейства (рис.5.1). Дійсно, $\forall (x_0, y_0) \in D$ рівняння $y_0 = x_0 + c$ відносно *c* має єдиний розв'язок: $c = y_0 - x_0$.

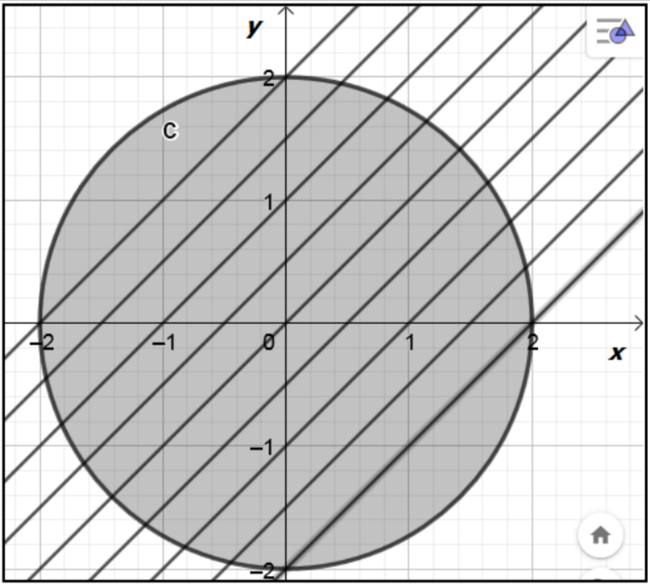

Рис. 5.1. Власне поле сімейства кривих $y = x + c, c \in R$

б) Сімейство кривих $y = (x+c)^2 - 2, c \in R$ в області ***D*** власного поля утворювати не буде. Дійсно, якщо в області ***D*** розв'язати рівняння $y = (x+c)^2 - 2, c \in R$ відносно *c*, тобто виразити $c = -x \pm \sqrt{y+2}, y \geq -2$, то побачимо, що через кожну точку (x_0, y_0) області ***D*** проходитиме дві параболи сімейства $y = (x+c)^2 - 2$ (одна для $c = -x_0 + \sqrt{y_0 + 2}$, друга – $c = -x_0 - \sqrt{y_0 + 2}$) (рис. 5.2).

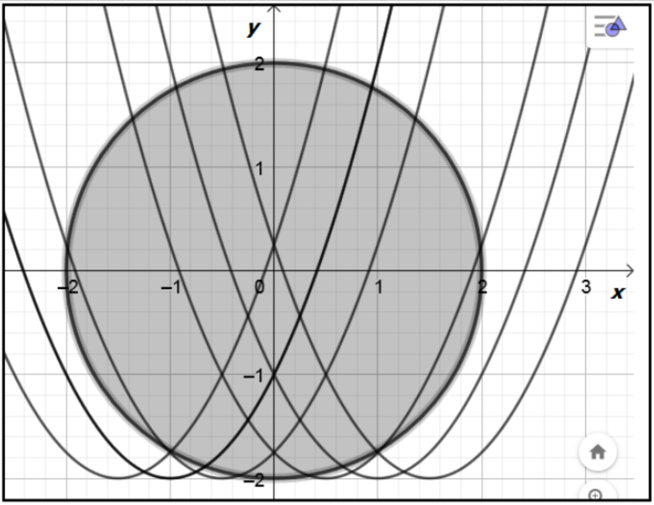

Рис. 5.2. Сімейство кривих, які не утворюють власне поле

2. Нехай область *D* – смуга, обмежена прямими $x=0$ та $x=3$. Покажіть, що в цій області сімейство кривих $y=c\sin x, c\in R$, утворює центральне поле. Як змінити область *D*, щоб сімейство утворювало власне поле? Не утворювало центрального поля?

Розв'язання

На рис. 5.3 бачимо, що лінії $y=c\sin x, c\in R$ повністю заповнять вертикальну смугу між прямими $x=0$ та $x=3$. А перетинаються всі лінії тільки в одній точці цієї області – (0; 0).

Щоб сімейство кривих $y=c\sin x, c\in R$ утворювало власне поле, достатньо виключити з області точку (0; 0), розглянути, наприклад, смугу, обмежену прямими $x=0,5$ та $x=3$ (рис. 5.4).

Якщо розглянути область *D* як смугу, обмежену прямими $x=0$ та $x=3,5$, то всі лінії сімейства $y=c\sin x, c\in R$ будуть перетинатися вже в двох точках, тому в такій області сімейство не буде утворювати центральне поле (рис. 5.5).

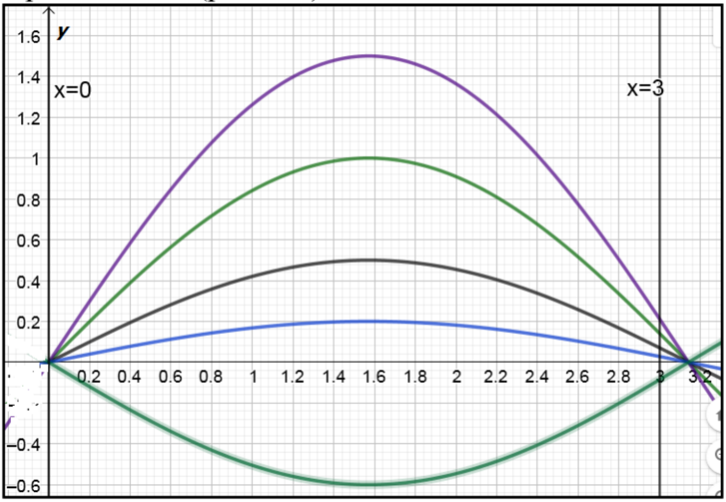

Рис. 5.3. Центральне поле сімейства кривих $y = c\sin x$

Рис. 5.4. Власне поле сімейства кривих $y = c\sin x$

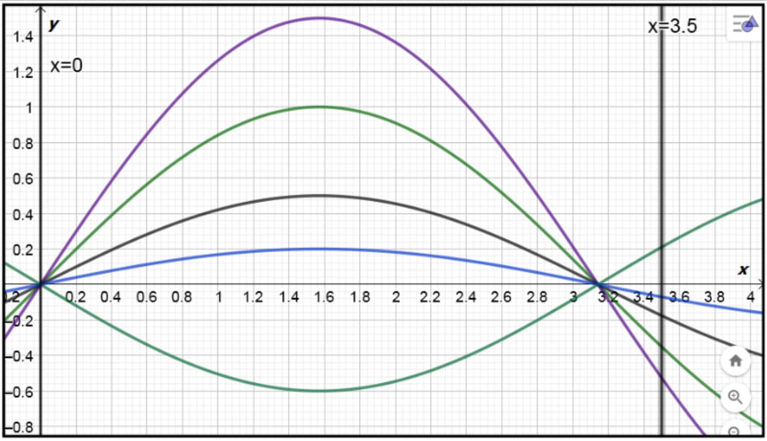

Рис. 5.5. Сімейство кривих, яке не утворює поле

3. Розв'яжіть елементарну задачу варіаційного числення:

а) $I[y]=\int\limits_0^1 y'^2 dx \to extr$, $y(0)=0,\ y(1)=1$;

б) $I[y]=\int\limits_0^1 \left(y'^2-y\right)dx \to extr$, $y(0)=0,\ y(1)=\dfrac{3}{4}$;

в) $I[y]=\int\limits_0^\pi \left(y'^2-y+4y\cos x\right)dx \to extr$, $y(0)=0$, $y(\pi)=-\dfrac{\pi^2}{4}+4$;

г) $I[y]=\int\limits_0^2 \left(y'^2e^{2x}-y^2e^{2x}\right)dx \to extr$, $y(0)=0,\ y(2)=2e^{-2}$;

д) $I[y]=\int\limits_0^1 \left(2xy-y'^2\right)dx \to extr$, $y(0)=0,\ y(1)=1$.

Розв'язання

а) Знайдемо екстремаль. $F(x,y,y')=y'^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''$. Рівняння Ейлера: $2y''=0$, або $y''=0$. Тоді $y'=c_1$, $y=c_1x+c_2$. Врахуємо граничні умови. $y(0)=0\Rightarrow 0=c_2$, $y(1)=1\Rightarrow c_1=1$. Отже, шукана екстремаль $y^*=x$. Застосуємо достатню умову Лежандра. $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=2$, $\forall y'$ $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$. Тому на знайденій екстремалі досягається сильний мінімум. Обчислимо його. $I[y^*]=\int\limits_0^1 1^2\,dx=1.$

б) $F(x,y,y')=y'^2-y$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''$. Рівняння Ейлера: $-1-2y''=0$, або $y''=-\frac{1}{2}$. Тоді $y'=-\frac{1}{2}x+c_1$, $y=-\frac{1}{4}x^2+c_1x+c_2$. Врахуємо граничні умови. $y(0)=0\Rightarrow 0=c_2$, $y(1)=\frac{3}{4}\Rightarrow c_1=-1$. Отже, шукана екстремаль $y^*=-\frac{1}{4}x^2-x$. Застосуємо достатню умову Лежандра. $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=2$, $\forall y'$ $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$. Тому на знайденій екстремалі досягається сильний мінімум. Обчислимо його.

$$I[y^*]=\int\limits_0^1\left(\left(-\frac{1}{2}x-1\right)^2+\frac{1}{4}x^2+x\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{4}x^2+x+1+\frac{1}{4}x^2+x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+2x+1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3+x^2+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}+1+1=2\frac{1}{6}.$$

в) $F(x,y,y')=y'^2-y+4y\cos x$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y}=-1+4\cos x$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''$. Рівняння Ейлера: $-1+4\cos x-2y''=0$, або $y''=-\frac{1}{2}+2\cos x$. Тоді $y'=-\frac{1}{2}x+2\sin x+c_1$, $y=-\frac{1}{4}x^2-2\cos x+c_1x+c_2$. Врахуємо граничні умови. $y(0)=0\Rightarrow 2=c_2$, $y(\pi)=-\frac{\pi^2}{4}+4\Rightarrow c_1=0$. Отже, шукана екстремаль $y^*=-\frac{1}{4}x^2-2\cos x+2$. Застосуємо достатню умову Лежандра. $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=2$, $\forall y'$ $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$. Тому на знайденій екстремалі досягається сильний мінімум. Обчислимо $I[y^*]$:

$$\int_0^\pi\left(\left(-\frac{1}{2}x+2\sin x\right)^2+\frac{1}{4}x^2+2\cos x-2-8\cos^2x-x^2\cos x+8\cos x\right)dx=$$

$$\int_0^\pi\left(-2x\sin x+4\sin^2x+\frac{1}{2}x^2+10\cos x-2-8\cos^2x-x^2\cos x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\pi^3-4\pi.$$

г) $F(x,y,y')=y'^2e^{2x}-y^2e^{2x}$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y}=-2ye^{2x}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'e^{2x}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''e^{2x}+4y'e^{2x}$. Запишемо рівняння Ейлера: $-2ye^{2x}-(2y''e^{2x}+4y'e^{2x})=0$. Після спрощення одержимо

$y''+2y'+y=0$. Характеристичне рівняння $k^2+2k+1=0$. Тоді $k_1=k_2=-1$ і загальний розв'язок $y=e^{-x}(c_1x+c_2)$. Врахуємо граничні умови. $y(0)=0 \Rightarrow 0=c_2$, $y(2)=2e^{-2} \Rightarrow c_1=1$. Отже, шукана екстремаль $y^*=xe^{-x}$. Застосуємо достатню умову Лежандра. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=2e^{2x}$, $\forall y'$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$. Тому на знайденій екстремалі досягається сильний мінімум. Обчислимо $I[y^*]$. Для цього обчислимо $y^{*\prime}=\left(xe^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$ і $\left(y^{*\prime}\right)^2=e^{-2x}-2xe^{-2x}+x^2e^{-2x}=$ $=e^{-2x}(1-2x+x^2)$. Тоді $I[y^*]=\int\limits_0^2\left(1-2x+x^2-x^2\right)e^{-2x}e^{2x}dx=-2$.

д) $F(x,y,y')=2xy-y'^2$. Тоді $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=-2y'$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=-2y''$. Запишемо рівняння Ейлера: $2x+2y''=0$. Тоді $y''=-x$, $y'=-\dfrac{x^2}{2}+c_1$, $y=-\dfrac{x^3}{6}+c_1x+c_2$. Врахуємо граничні умови. $y(0)=0 \Rightarrow 0=c_2$, $y(1)=1 \Rightarrow -\dfrac{1}{6}+c_1=1 \Rightarrow$. $\Rightarrow c_1=\dfrac{7}{6}$. Отже, шукана екстремаль $y^*=-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{7}{6}x$. Застосуємо достатню умову Лежандра. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=-2$, $\forall y'$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}<0$. Тому на знайденій екстремалі досягається сильний максимум. Обчислимо $I[y^*]$. Для цього обчислимо $y^{*\prime} = -\frac{x^2}{2} + \frac{7}{6}$ і $\left(y^{*\prime}\right)^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{6} + \frac{49}{36}$.

Тоді $I[y^*] = \int_0^1 \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{7x^2}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^2}{6} - \frac{49}{36}\right)dx = -\frac{14}{45}$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Нехай область *D* задана як $x^2 + y^2 \le 9$. Чи будуть утворювати задані сімейства кривих власне поле в цій області? Зробіть відповідні рисунки: а) $y = 2x + c, c \in R$; б) $y = (x+c)^2 - 3, c \in R$.

2. Нехай область *D* – круг $x^2 + y^2 \le 4$. Покажіть, що в цій області сімейство кривих $y = cx, c \in R$ і пряма $x = 0$, утворюють центральне поле. Як змінити область *D*, щоб сімейство утворювало власне поле?

3. Розв'яжіть елементарну задачу варіаційного числення:

а) $I[y] = \int_0^1 \left(y'^2 + x\right)dx \to extr$, $y(0) = 1$, $y(1) = 2$;

б) $I[y] = \int_{-1}^0 \left(y'^2 - 2xy\right)dx \to extr$, $y(-1) = 0$, $y(0) = 2$;

в) $I[y] = \int_0^2 \left(y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x\right)dx \to extr$, $y(0) = 1$, $y(2) = -2 + e^4$;

г) $I[y] = \int_0^2 \frac{1}{y'}dx \to extr, y(0) = 0, y(2) = 2$;

д) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y^2-y'^2-8y\operatorname{ch}x\right)dx\to extr$, $y(0)=2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}$; ;

е) $I[y]=\int\limits_1^{e}\left(xy'^2+yy'\right)dx\to extr$, $y(1)=0$, $y(e)=1$;

є) $I[y]=\int\limits_{-1}^{1}\left(-2xy'^2+y'^2+2xy\right)dx\to extr$, $y(-1)=0$, $y(1)=1$;

ж) $I[y]=\int\limits_1^{2}\left(\ln y'+y\right)dx\to extr$, $y(1)=\ln 2$, $y(2)=\ln 3$;

з) $I[y]=\int\limits_0^{1}\left(y'^2+y\right)dx\to extr$, $y(0)=0, y(1)=2$.

Відповіді: **1**. а) Так; б) Ні. **3.** а) $y^*=x+1$, $I\left[y^*\right]=1\frac{1}{2}$; б) $y^*=-\frac{x^3}{6}+\frac{13x}{6}+2$, $I\left[y^*\right]=4\frac{29}{45}$; в) $y^*=e^{2x}-x$, $I\left[y^*\right]=4-e^8-\frac{1}{4}\sin 4$; г) $y^*=x$, $I\left[y^*\right]=2$; д) $y^*=2\operatorname{ch}x$, $I\left[y^*\right]=-2(\pi+2\operatorname{sh}(\pi))$; е) $y^*=\ln x$, $I\left[y^*\right]=1\frac{1}{2}$; є) $y^*=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}$, $I\left[y^*\right]=\frac{41}{90}$; ж) $y^*=\ln(x+1)$, $I\left[y^*\right]=0$; з) $y^*=\frac{1}{4}x^2+\frac{7}{4}x$, $I\left[y^*\right]=\frac{239}{48}$.

Тема 6. Види граничних умов

Теоретичні питання

1. Природні граничні умови в елементарній задачі варіаційного числення
2. Природні граничні умови для функціонала, який залежить від кількох функцій
3. Умова трансверсальності в елементарній задачі варіаційного числення

Література:
1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с. С. 51-54, 57-61
2. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008, 368 с. С. 42-48
3. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с. С. 65-73
4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. С. 118

Дайте відповіді на запитання:

1. Сформулюйте елементарну задачу варіаційного числення.
2. Сформулюйте природні граничні умови в елементарній задачі варіаційного числення.
3. Скільки розв'язків може мати елементарна задача варіаційного числення, якщо замість однієї чи двох граничних умов вибрати природні граничні умови?
4. Чи можуть відрізнятися розв'язки елементарної задачі варіаційного числення, якщо граничні умови замінити на природні граничні умови?
5. Сформулюйте природні граничні умови для функціонала, що залежить від двох функцій однієї змінної.

6. Сформулюйте умову трансверсальності для функціонала $I[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$. Який зміст цієї умови?

7. Заповніть таблицю (за темою цього заняття)

Нові поняття	Відомі поняття (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)	Нові теоретичні твердження	Відомі теоретичні твердження (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)

Повторіть: 1. Розв’язування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та їх систем.

2. Методи розв’язування систем алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

Навчальні завдання

1. Для вказаних функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють заданій граничній умові та природній граничній умові:

а) $I[y]=\int\limits_0^1 (y')^2\,dx$, $y(0)=2$;

б) $I[y]=\int\limits_0^1 \left((y')^2-2y+4\right)dx$, $y(1)=1$;

в) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y^2-(y')^2+4y\sin x\right)dx$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Розв’язання

а) Складемо рівняння Ейлера і знайдемо сімейство екстремалей. $F(x, y, y') = y'^2$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$. Запишемо рівняння Ейлера: $2y'' = 0$. Тоді $y'' = 0$, $y' = c_1$, $y = c_1 x + c_2$. Врахуємо граничну умову: $y(0) = 2 \Rightarrow 2 = c_2$. Тоді $y = c_1 x + 2$. Природна гранична умова на правому кінці відрізка має вигляд $\frac{\partial F}{\partial y'}(1) = 0$. Оскільки $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, а $y' = (c_1 x + 2)' = c_1$, то $2y' = 2c_1 = 0$. Тоді $c_1 = 0$. Отже, шукана екстремаль $y^* = 2$.

б) $F(x, y, y') = (y')^2 - 2y + 4$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y} = -2$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$. Запишемо рівняння Ейлера: $-2 - 2y'' = 0$. Тоді $y'' = -1$, $y' = -x + c_1$, $y = -\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$. Врахуємо граничну умову: $y(1) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 1$. Природна гранична умова на лівому кінці відрізка має вигляд $\frac{\partial F}{\partial y'}(0) = 0$. Оскільки $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, а $y' = -x + c_1$, то $2y' = 2(-x + c_1)$. Тоді $2(0 + c_1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. З рівняння $-\frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 1$ для $c_1 = 0$ знаходимо, що $c_2 = \frac{3}{2}$. Отже, шукана екстремаль $y^* = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$.

в) $F(x,y,y')=y^2-(y')^2+4y\sin x$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y}=2y+4\sin x$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=-2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=-2y''$. Запишемо рівняння Ейлера: $2y+4\sin x+2y''=0$ або $y''+y=-2\sin x$. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y''+y=0$. Характеристичне рівняння $k^2+k=0$, його корені $k_1=i, k_2=-i$. Тоді $y_{зо}=c_1\cos x+c_2\sin x$. Оскільки число $0+i$ є однократним коренем характеристичного рівняння, то $y_{чн}=x(A\cos x+B\sin x)$. Тоді $y'_{чн}=A\cos x+B\sin x+$ $+x(-A\sin x+B\cos x)$, $y''_{чн}=-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x+$ $+x(-A\cos x-B\sin x)$. Підставимо $y_{чн}$ та $y''_{чн}$ в неоднорідне рівняння: $-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x+x(-A\cos x-$ $-B\sin x)+x(A\cos x+B\sin x)\equiv-2\sin x$ або $-2A\sin x+2B\cos x\equiv$ $\equiv-2\sin x$. Звідки маємо, що $A=1$, $B=0$. Отже, $y_{чн}=x\cos x$ і шукані екстремалі $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x\cos x$. Врахуємо граничну умову: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow c_2=0$. Природна гранична умова на лівому кінці відрізка має вигляд $\frac{\partial F}{\partial y'}\left(0\right)=0$.

Оскільки $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$, а $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x+\cos x-x\sin x$, то $-c_1\sin 0+0\cdot\cos 0+\cos 0-0\cdot\sin 0=0$. Записана числова рівність не виконується ні для якого значення c_1. Отже, задача розв'язку не має.

2. Для вказаних функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють заданим граничним умовам і відповідним природним умовам:

а) $I[y,z]=\int\limits_0^2 (y'^2+y'z'+z'^2)dx$, $y(0)=0,\ z(0)=0,\ y(2)=2$;

б) $I[y,z]=\int\limits_0^1 (y'^2+2yz+z'^2)dx$, $y(0)=1,\ z(0)=1$.

Розв'язання

а) $F(x,y,z,y',z')=y'^2+y'z'+z'^2$. Знайдемо частинні похідні, які входять в систему для знаходження екстремалей: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=2y'+z'$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(2y'+z'\right)=2y''+z''$; $\dfrac{\partial F}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z'}=2z'+y'$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(2z'+y'\right)=2z''+y''$. Складемо систему: $\begin{cases}2y''+z''=0,\\ y''+2z''=0.\end{cases}$ Оскільки головний визначник цієї системи відмінний від 0, то система має тільки тривіальний розв'язок, тобто, $y''=0, z''=0$. Звідки знаходимо, що $y=c_1x+c_2$, $z=c_3x+c_4$. З граничних умов слідує: $y(0)=0\Rightarrow c_2=0$, $y(2)=2\Rightarrow 2c_1+c_2=2$, тому $y^*=x$; $z(0)=0\Rightarrow c_4=0$. Вважатимемо, що в точці $x=2$ для $z=c_3x$ виконується природна гранична умова, тобто $\dfrac{\partial F}{\partial z'}(2)=0$: $\dfrac{\partial F}{\partial z'}(2)=\left(2z'+y'\right)\Big|_{x=2}=2c_3+1=0\Rightarrow c_3=-\dfrac{1}{2}$.

Тоді $z^*=-\dfrac{1}{2}x$. Отже, шукані екстремалі $y^*=x$, $z^*=-\dfrac{1}{2}x$.

б) $F(x,y,z,y',z')=y'^2+2yz+z'^2$. Знайдемо частинні похідні, які входять в систему для знаходження екстремалей: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2z$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=2y'$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(2y'\right)=2y''$;

$\frac{\partial F}{\partial z}=2y$, $\frac{\partial F}{\partial z'}=2z'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=\frac{d}{dx}\left(2z'\right)=2z''$. Складемо систему: $\begin{cases}2z-2y''=0,\\ 2y-2z''=0.\end{cases}$ З другого рівняння $y=z''$ і $y''=z^{IV}$. Тоді перше рівняння перепишемо $2z-2z^{IV}=0$ або $z^{IV}-z=0$. Відповідне характеристичне рівняння $k^4-1=0$ і його корені $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. Маємо, що $z=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$. Тоді $z'=c_1e^x-c_2e^{-x}-c_3\sin x+c_4\cos x$, $z''=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3\cos x-$ $-c_4\sin x$. Відповідно $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x$. Врахуємо задані граничні умови: $y(0)=1$, тобто $c_1+c_2-c_3=1$, $z(0)=1$, тобто $c_1+c_2+c_3=1$. Тоді $c_3=0$, $c_1+c_2=1$. Будемо вважати, що на правому кінці відрізка в точці $x=1$ для $z=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_4\sin x$ і $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_4\sin x$ виконуються природні граничні умови, тобто $\frac{\partial F}{\partial z'}(1)=0$ і $\frac{\partial F}{\partial y'}(1)=0$. Тоді

$\frac{\partial F}{\partial z'}(1)=\left(2z'\right)\Big|_{x=1}=2(c_1e-c_2e^{-1}+c_4\cos 1)=0,$

$\frac{\partial F}{\partial y'}(1)=\left(2y'\right)\Big|_{x=1}=2(c_1e-c_2e^{-1}-c_4\cos 1)=0$. Маємо систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 e - c_2 e^{-1} + c_4 \cos 1 = 0, \\ c_1 e - c_2 e^{-1} - c_4 \cos 1 = 0. \end{cases}$$ Її розв'язок: $c_4 = 0$, $c_1 = \dfrac{1}{1+e^2}$, $c_2 = \dfrac{e^2}{1+e^2}$. Отже, шукані екстремалі $y^* = \dfrac{1}{1+e^2} e^x + \dfrac{e^2}{1+e^2} e^{-x}$, $z^* = \dfrac{1}{1+e^2} e^x + \dfrac{e^2}{1+e^2} e^{-x}$.

3. Знайдіть екстремалі заданих функціоналів, якщо виконуються вказані умови:

а) $I[y] = \int\limits_1^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y(1) = 0,\ y_b = \dfrac{2}{3}\sqrt{9-b^2}$;

б) $I[y] = \int\limits_a^0 \sqrt{y'}\,dx$, $y(0) = 1,\ y_a = -2a-3,\ a < 0$.

Розв'язання

а) Складемо і розв'яжемо рівняння Ейлера. $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,y') = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y') = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{y''\cdot\sqrt{1+y'^2} - y'\cdot\dfrac{y'\cdot y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} = \frac{y''\left(1+y'^2\right) - y''y'^2}{\left(1+y'^2\right)\sqrt{1+y'^2}} =$$

$$= \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)\sqrt{1+y'^2}}.$$ $$0 - \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)\sqrt{1+y'^2}} = 0$$ або $y'' = 0$. Тоді загальний розв'язок $y = c_1 x + c_2$. Знайдемо похідну $y' = c_1$ (вона знадобиться для запису умови трансверсальності $\left.\left(F + (\varphi' - y')\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=b} = 0$). Функція $y = \varphi(x)$ має вигляд

$\varphi(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ і $\varphi'(x) = -\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. Складемо систему для знаходження невідомих сталих та правого кінця відрізка:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 b + c_2 = y_b, \\ \frac{2}{3}\sqrt{9-b^2} = y_b, \\ \sqrt{1+c_1^{\,2}} + \left(-\frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{9-b^2}} - c_1\right)\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^{\,2}}} = 0. \end{cases}$$

Останнє рівняння системи можна записати як $\sqrt{1+c_1^{\,2}} - \frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{9-b^2}}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^{\,2}}} - \frac{c_1^{\,2}}{\sqrt{1+c_1^{\,2}}} = 0$ або $-\frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{9-b^2}}\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^{\,2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+c_1^{\,2}}} = 0$, звідки $c_1 = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{9-b^2}}{b}$. З 1-го рівняння $c_2 = -c_1$. Враховуючи 3-є рівняння й переписані 4-е і 1-е рівняння, одержимо з 2-го таке: $\frac{3}{2}\sqrt{9-b^2} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{9-b^2}}{b} = \frac{2}{3}\sqrt{9-b^2}$. Останнє рівняння має три розв'язки: $b_1 = 3$, $b_2 = -3$, $b_3 = \frac{9}{5}$. Числа $b_1 = 3$, $b_2 = -3$ не належать області визначення 4-го рівняння. Отже, $b = \frac{9}{5}$. Тоді $c_1 = 2$, $c_2 = -2$. Шукана екстремаль $y^* = 2x - 2$, правий кінець відрізка $b = \frac{9}{5}$.

б) Складемо і розв'яжемо рівняння Ейлера. Оскільки $F(x, y, y') = \sqrt{y'}$, то $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') = 0, \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = \frac{1}{2\sqrt{y'}}$.

Рівняння Ейлера $0-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{y'}}\right)=0$. Тоді $\frac{1}{2\sqrt{y'}}=\overline{c_1}$ або $y'=c_1, c_1=\left(\frac{1}{2\overline{c_1}}\right)^2$. Сімейство екстремалей $y=c_1x+c_2$. Врахуємо граничну умову $y(0)=1$, матимемо $c_2=1$ і $y=c_1x+1$. Запишемо умову трансверсальності $\left.\left(F+(\varphi'-y')\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=a}=0$ для нашого випадку. Функція $y=\varphi(x)$ має вигляд $\varphi(x)=-2x-3$ і $\varphi'(x)=-2$. Складемо систему для знаходження невідомої сталої c_1 та лівого кінця відрізка:

$$\begin{cases} c_1a+1=y_a, \\ y_a=-2a-3, \\ \sqrt{c_1}+(-2-c_1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{c_1}}=0. \end{cases}$$

З 3-го рівняння $c_1=2$, з рівняння $c_1a+1=-2a-3$ для $c_1=2$ маємо, що $a=-1$. Отже, шукана екстремаль $y^*=2x+1$, лівий кінець відрізка $a=-1$.

4. Знайдіть відстань від точки $A(-1;5)$ до вітки параболи $y=\sqrt{x}$.

Розв'язання

Відстань від точки до кривої – це найменша із відстаней від цієї точки до будь-якої точки заданої кривої. Як відомо з курсу математичного аналізу, відстань (довжину) обчислюємо як $I[y]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$, де a – абсциса заданої точки, b – абсциса точки, яка належить заданій кривій, $y = y(x)$ – шукана крива, яка з’єднує названі вище точки. Тоді сформульовану в завданні задачу можна формалізувати так: $I[y] = \int_{-1}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\,dx \to \min$, $y(-1) = 5$, $y_b = \sqrt{b}$. Маємо варіаційну задачу з рухомим правим кінцем. У задачі 3а) було знайдено сімейство екстремалей записаного функціонала: $y = c_1 x + c_2$. Врахуємо граничну умову $y(-1) = 5$, матимемо $-c_1 + c_2 = 5$. Запишемо умову трансверсальності $\left.\left(F + (\varphi' - y')\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=b} = 0$ для нашого випадку. Функція $y = \varphi(x)$ має вигляд $\varphi(x) = \sqrt{x}$ і $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Складемо систему для знаходження невідомих сталих c_1 і c_2 та правого кінця відрізка:

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 5, \\ c_1 b + c_2 = y_b, \\ y_b = \sqrt{b}, \\ \sqrt{1 + c_1^{\,2}} + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{b}} - c_1\right)\dfrac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^{\,2}}} = 0. \end{cases}$$

Помножимо останнє рівняння системи на $\sqrt{1 + c_1^{\,2}}$: $1 + c_1^{\,2} + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{b}} - c_1\right)c_1 = 0$. Тоді $1 + c_1^{\,2} + \dfrac{c_1}{2\sqrt{b}} - c_1^{\,2} = 0$ і $c_1 = -2\sqrt{b}$. Тоді система має вигляд: $\begin{cases} -c_1 + c_2 = 5, \\ c_1 b + c_2 = \sqrt{b}, \\ c_1 = -2\sqrt{b}. \end{cases}$

Розв'яжемо її, наприклад, методом підстановки. $c_2 = 5 + c_1$ або $c_2 = 5 - 2\sqrt{b}$; підставимо в 2-ге рівняння: $(-2\sqrt{b})b + 5 - 2\sqrt{b} = \sqrt{b}$. Введемо заміну $t = \sqrt{b}$, тоді $-2t^3 + 5 - 2t = t$ або $2t^3 + +3t - 5 = 0$. Дійсний розв'язок цього рівняння $t = 1$. Тоді $b = 1$, $c_1 = -2$, $c_2 = 3$. Тоді шукана екстремаль $y^* = -2x + 3$. Оскільки відстань від точки до неперервної кривої завжди існує, екстремаль єдина, то саме на ній функціонал і набуває мінімуму. Обчислимо його. $I[y^*] = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + (-2)^2}\, dx = 2\sqrt{5}$. Отже, відстань від точки $A(-1; 5)$ до вітки параболи $y = \sqrt{x}$ буде дорівнювати $2\sqrt{5}$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Для вказаних функціоналів знайдіть екстремалі, які задовольняють заданій граничній умові та природній граничній умові:

а) $I[y] = \int\limits_0^1 (y')^2\, dx,\ y(1) = 1;$

б) $I[y] = \int\limits_0^1 ((y')^2 - 5y + 4) dx,\ y(0) = 0;$

в) $I[y] = \int\limits_0^1 ((y')^2 - 2yy' + y^2) dx,\ y(1) = 1;$

г) $I[y] = \int\limits_{-1}^0 ((y')^2 + y^2 + 4y \operatorname{sh} x) dx,\ y(0) = 0.$

2. **Знайдіть екстремалі вказаних функціоналів, які задовольняють заданим граничним умовам і відповідним природним умовам**:

а) $I[y,z]=\int\limits_0^2 (y'^2+y'z'+z'^2)dx$, $y(0)=0,\ z(0)=0$;

б) $I[y,z]=\int\limits_0^{\pi} (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx$, $y(0)=0,\quad z(0)=2$;

в) $I[y,z]=\int\limits_0^{\pi} (2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx$, $y(0)=0$, $z(0)=2$, $y(\pi)=0$.

3. Знайдіть екстремалі функціоналів і невідомі межі інтегрування, якщо виконуються вказані умови:

а) $I[y]=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{b} \sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ y_b=b-2$**;**

б) $I[y]=\int\limits_{a}^{\frac{\pi}{2}} (y'^2-y^2)dx$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y_a=\cos a$**.**

4. Знайдіть відстань між лініями $y=x^2$ **та** $y=x-5$.

Відповіді: **1.** а) $y^*=1$; б) $y^*=-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{2}x$; в) $y^*=e^{x-1}$; г) $y^*=-(1+\operatorname{th}1)\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x$. **2.** а) $y^*=0$, $z^*=0$; б) $y^*=-\pi\sin x+x\sin x$, $z^*=2\cos x-\pi\sin x+x\sin x$; в) $y^*=\pi x\sin x+x\sin x$, $z^*=2\cos x-2\pi\sin x+\pi x\cos x+x\sin x$. **3.** а) $y^*=-x+\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{4}$; б) $y^*=\cos x$, $a=\frac{\pi}{4}$ **4.** $y^*=-x+\frac{3}{4}$, $I\left[y^*\right]=\frac{19\sqrt{2}}{8}$. *Вказівка.* Треба знайти мінімум функціонала $I[y]=\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ за умов $y_a=a^2,\ y_b=b-5$.

Тема 7. Умовний екстремум

Теоретичні питання

1. Варіаційна задача для функціонала з голономними обмеженнями
2. Варіаційна задача для функціонала з неголономними обмеженнями
3. Ізопериметричні задачі

Література:

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с. С. 90-97, 100-106
2. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008, 368 с. С 40-42
3. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с. С. 93-102
4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с. С. 225-232, 241-242, 248

Дайте відповіді на запитання:

1. Які умови називаються голономними?
2. Якими способами можна розв’язати задачу

$$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx \to extr$$

$$y_1(x_1) = y_{11},\ y_1(x_2) = y_{12},\ y_2(x_1) = y_{21},\ y_2(x_2) = y_{22}, ..., y_n(x_1) = y_{n1},\ y_n(x_2) = y_{n2}.$$

$$\varphi_j(y_1, y_2, ..., y_n) = 0,\ j = \overline{1,m}\,?$$

3. Запишіть функцію Лагранжа для сформульованої в попередньому запитанні задачі. Охарактеризуйте множники Лагранжа.

4. Скільки розв’язків може мати задача, сформульована в запитанні 2? Відповідь обґрунтуйте.

5. Які умови називаються неголономними?

6. Запишіть систему диференціальних рівнянь Ейлера для задачі

$$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx \to extr$$

$y_1(x_1) = y_{11},\ y_1(x_2) = y_{12},\ y_2(x_1) = y_{21},\ y_2(x_2) = y_{22}, ..., y_n(x_1) = y_{n1},\ y_n(x_2) = y_{n2}.$

з умовами $\varphi_j(y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0,\ j = \overline{1,m}$.

7. Дайте означення ізопериметричної задачі.

8. Опишіть схему розв’язання ізопериметричної задачі. Яку особливість мають множники Лагранжа?

9. Яка із класичних варіаційних задач є ізопериметричною? Сформулюйте її.

10. Яка крива є розв’язком задачі Дідони?

11. Заповніть таблицю (за темою цього заняття)

Нові поняття	Відомі поняття (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)	Нові теоретичні твердження	Відомі теоретичні твердження (під час вивчення якої навчальної дисципліни і якої теми були вперше введені)

Повторіть: 1. Умовний екстремум функції дійсних змінних. Множники Лагранжа. Функція Лагранжа.

3. Задача про геодезичні лінії.

Навчальні завдання

1. Знайдіть допустимі екстремалі функціонала $I[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx$, **якщо** $y(0)=-1, y(1)=-1, z(0)=0,$ $z(1)=1$, $y+z=2x^2-x-1$.

Розв'язання

Для допустимих екстремалей заданого функціонала маємо граничні умови і одне рівняння зв'язку: $y+z-2x^2+x+1=0$. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,z,y',z',\lambda)=y'^2+z'^2+\lambda(y+z-2x^2+x+1).$$

Запишемо для цієї функції відповідну систему рівнянь Ейлера.

$$L'_y=\lambda, L'_{y'}=2y', \frac{d}{dx}\left(L'_{y'}\right)=2y'';$$

$$L'_z=\lambda, L'_{z'}=2z', \frac{d}{dx}\left(L'_{z'}\right)=2z''.$$

Тоді відповідна система має вигляд: $\begin{cases}\lambda-2y''=0,\\ \lambda-2z''=0.\end{cases}$

Нагадуємо, що множники Лагранжа у загальному випадку є невідомими функціями аргумента x. Тому розв'язати кожне рівняння окремо не можна. З 1-го рівняння $\lambda=2y''$, з 2-го $\lambda=2z''$, тому $z''=y''$. Двічі продиференціюємо рівняння зв'язку і виразимо z'': $y'+z'=4x-1$, $y''+z''=4$, $z''=4-y''$. Маємо рівняння $y''=4-y''$, звідки $y''=2$ і $y=x^2+c_1x+c_2$. Врахуємо граничні умови: $y(0)=-1\Rightarrow c_2=-1$, $y(1)=-1\Rightarrow 1+c_1-1=-1\Rightarrow c_1=-1$. Отже, $y=x^2-x-1$. Підставимо знайдену функцію $y=x^2-x-1$ в рівняння зв'язку і виразимо z: $x^2-x-1+z=2x^2-x-1$,

$z = x^2$. Перевіримо, чи виконуються граничні умови для $z = x^2$: $z(0) = 0^2 = 0$, $z(1) = 1^2 = 1$ – виконуються. Отже, шукані екстремалі $y = x^2 - x - 1$, $z = x^2$.

2. Знайдіть лінію найменшої довжини, яка належить поверхні $3x - 2y + z = 0$ і з'єднує точки $A(0;1;2)$ та $B(1;2;1)$.

Розв'язання

Це задача про геодезичні лінії. Формалізуємо її. Оскільки мова йде про просторову криву, то задамо її як $y = y(x), z = z(x)$. Довжина так заданої лінії $I[y,z] = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$. Оскільки ця лінія з'єднує точки $A(0;1;2)$ та $B(1;2;1)$, то маємо граничні умови $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $z(0) = 2$, $z(1) = 1$. Крім того, маємо голономну умову $3x - 2y + z = 0$. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,z,y',z',\lambda) = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(3x - 2y + z).$$

Запишемо для цієї функції відповідну систему рівнянь Ейлера.

$$L'_y = -2\lambda,\ L'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},\ \frac{d}{dx}\left(L'_{y'}\right) = \frac{y''\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \dfrac{y'(y'y'' + z'z'')}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}}{1 + y'^2 + z'^2}$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(L'_{y'}\right) = \frac{y''(1 + y'^2 + z'^2) - y'(y'y'' + z'z'')}{\left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y'' + y''z'^2 - y'z'z''}{\left(1 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$L'_z=\lambda,\ L'_{z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\ \frac{d}{dx}\left(L'_{z'}\right)=\frac{z''\sqrt{1+y'^2+z'^2}-\dfrac{z'(y'y''+z'z'')}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{1+y'^2+z'^2}$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(L'_{z'}\right)=\frac{z''(1+y'^2+z'^2)-z'(y'y''+z'z'')}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z''+z''y'^2-y'z'y''}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тоді відповідна система має вигляд:

$$\begin{cases}-2\lambda-\dfrac{y''+y''z'^2-y'z'z''}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0,\\ \lambda-\dfrac{z''+z''y'^2-y'z'y''}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.\end{cases}$$

З 2-го рівняння $\lambda=\dfrac{z''+z''y'^2-y'z'y''}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Підставимо в 1-е рівняння: $-2\dfrac{z''+z''y'^2-y'z'y''}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{y''+y''z'^2-y'z'z''}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$. Після спрощення $-2z''-2z''y'^2+2y'z'y''-y''-y''z'^2+y'z'z''=0$. З рівняння зв'язку $3-2y'+z'=0$ або $z'=2y'-3$, тоді $z''=2y''$. Підставимо $z'=2y'-3$ та $z''=2y''$ в рівняння. Після спрощення $-6y''=0$ і $y=c_1x+c_2$. З рівняння зв'язку $z=2y-3x$, тобто $z=2c_1x+2c_2-3x$. Врахуємо граничні умови: $y(0)=1\Rightarrow c_2=1$, $y(1)=2\Rightarrow c_1+1=2\Rightarrow c_1=1$. Тоді $y=x+1$, $z=-x+2$. Чи задовольняє функція $z=-x+2$ умови $z(0)=2$, $z(1)=1$? Перевіримо. $z(0)=-0+2=2$,

$z(1) = -1 + 2 = 1$. Отже, шукана крива $y = x + 1$, $z = -x + 2$. Знайдемо її довжину. $I[y,z] = \int_0^1 \sqrt{1 + 1^2 + 1^2}\,dx = \sqrt{3}$.

3. Знайдіть допустимі екстремалі функціонала $I[y,z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2yz + y'^2 + z'^2)dx$, **якщо** $y(0) = -1$, $z(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1$, $y' + z' = 4x$.

Розв'язання

Для допустимих екстремалей заданого функціонала маємо граничні умови і одне рівняння зв'язку: $y' + z' = 4x$. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, z, y', z', \lambda) = 2yz + y'^2 + z'^2 + \lambda(y' + z' - 4x).$$

Запишемо для цієї функції відповідну систему рівнянь Ейлера.

$$L'_y = 2z,\ L'_{y'} = 2y' + \lambda,\ \frac{d}{dx}\left(L'_{y'}\right) = 2y'' + \lambda';$$

$$L'_z = 2y,\ L'_{z'} = 2z' + \lambda,\ \frac{d}{dx}\left(L'_{z'}\right) = 2z'' + \lambda'.$$

Тоді відповідна система має вигляд: $\begin{cases} 2z - 2y'' - \lambda' = 0, \\ 2y - 2z'' - \lambda' = 0. \end{cases}$ З 1-го рівняння $\lambda' = 2z - 2y''$, а з 2-го $\lambda' = 2y - 2z''$, тоді $2z - 2y'' = 2y - 2z''$ або $z - y'' = y - z''$. Рівняння зв'язку продиференціюємо і виразимо z'': $y'' + z'' = 4$, $z'' = 4 - y''$. Рівняння зв'язку проінтегруємо: $y + z = 2x^2 + c$. Сталу c знайдемо із граничних умов $y(0) = -1$, $z(0) = 1$: $-1 + 1 = 0 + c \Rightarrow c = 0$. Тоді $y + z = 2x^2$ або $z = 2x^2 - y$.

Маємо, що $2x^2 - y - y'' = y - 4 + y''$ або $y'' + y = x^2 + 2$. Відповідне однорідне рівняння $y'' + y = 0$, характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$, тоді $k_1 = i, k_2 = -i$ і $y_{зо} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Частинний розв'язок неоднорідного шукатимемо у вигляді $y_{чн} = Ax^2 + Bx + C$. Тоді $y'_{чн} = 2Ax + B$, $y''_{чн} = 2A$. Підставимо в неоднорідне рівняння: $2A + Ax^2 + Bx + C \equiv x^2 + 2$. Маємо, що $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$. Отже, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2$. Врахуємо граничні умови: $y(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4} - 1 \Rightarrow c_2 = -1$. Тоді $y = -\cos x - \sin x + x^2$. З умови $z = 2x^2 - y$ знайдемо z : $z = 2x^2 + \cos x + \sin x - x^2$ або $z = \cos x + \sin x + x^2$. Отже, $y = -\cos x - \sin x + x^2$, $z = \cos x + \sin x + x^2$.

4. Знайдіть допустимі екстремалі заданих функціоналів, якщо виконуються вказані умови:

а) $I[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $\int\limits_0^1 y dx = 1$;

б) $I[y] = \int\limits_0^1 (y' + x)^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 xy dx = 1$;

в) $I[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $\int\limits_0^1 y dx = 1$, $\int\limits_0^1 xy dx = 0$.

Розв'язання

а) Запишемо функцію Лагранжа: $F = y'^2, F_1 = y$, $F^* = F + \lambda F_1 = y'^2 + \lambda y$. Для функції $F^* = y'^2 + \lambda y$ запишемо рівняння Ейлера, знайшовши попередньо потрібні похідні. $\dfrac{\partial F^*}{\partial y} = \lambda$, $\dfrac{\partial F^*}{\partial y'} = 2y'$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F^*}{\partial y'}\right) = 2y''$. Тоді

$\lambda - 2y'' = 0$, звідки $y'' = \dfrac{\lambda}{2}$ і $y = \dfrac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x + c_2$. Для знаходження λ, c_1, c_2 врахуємо граничні умови й інтегральну (ізопериметричну) умову:

$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ і $y = \dfrac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x$; $y(1) = 0 \Rightarrow \dfrac{\lambda}{4} + c_1 = 0$;

$$\int_0^1 y dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x \right) dx = \left(\frac{\lambda}{12}x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{\lambda}{12} + \frac{c_1}{2} = 1.$$

Запишемо і розв'яжемо систему: $\begin{cases} \dfrac{\lambda}{12} + \dfrac{c_1}{2} = 1, \\ \dfrac{\lambda}{4} + c_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -24, c_1 = 6$. Отже, $y = -6x^2 + 6x$.

б) У цьому випадку $F = (y' + x)^2, F_1 = xy$, $F^* = F + \lambda F_1 = (y' + x)^2 + \lambda xy$. Тоді $\dfrac{\partial F^*}{\partial y} = \lambda x$, $\dfrac{\partial F^*}{\partial y'} = 2(y' + x)$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F^*}{\partial y'} \right) = 2y'' + 2$. Рівняння Ейлера $\lambda x - (2y'' + 2) = 0$. З останнього рівняння $y'' = \dfrac{\lambda}{2}x - 1$ і $y = \dfrac{\lambda}{12}x^3 - \dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$. Для знаходження λ, c_1, c_2 врахуємо граничні умови й інтегральну (ізопериметричну) умову:

$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ і $y = \dfrac{\lambda}{12}x^3 - \dfrac{x^2}{2} + c_1 x$; $y(1) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{12} - \dfrac{1}{2} + c_1 = \dfrac{1}{2}$; $\displaystyle\int_0^1 xy dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{12}x^4 - \frac{x^3}{2} + c_1 x^2 \right) dx = 1$ або

$\frac{\lambda}{60}-\frac{1}{8}+\frac{c_1}{3}=1$. Запишемо і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{12}+c_1=1, \\ \frac{\lambda}{60}+\frac{c_1}{3}=\frac{9}{8}. \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda}{12}=-\frac{95}{16}, c_1=\frac{111}{16}.$$

Отже, $y=-\frac{95}{16}x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{111}{16}x$.

в) Маємо дві ізопериметричні умови, тому введемо два множники Лагранжа і запишемо функцію Лагранжа: $F^*=F+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2=y'^2+\lambda_1y+\lambda_2xy$. Тоді $\frac{\partial F^*}{\partial y}=\lambda_1+\lambda_2x$, $\frac{\partial F^*}{\partial y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)=2y''$. Рівняння Ейлера $\lambda_1+\lambda_2x-2y''=0$ або $y''=\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}x$. Тоді $y=\frac{\lambda_1}{4}x^2+\frac{\lambda_2}{12}x^3+c_1x+c_2$. Врахуємо граничні й інтегральні умови. $y(0)=0\Rightarrow c_2=0$, тому $y=\frac{\lambda_1}{4}x^2+\frac{\lambda_2}{12}x^3+c_1x$.

$y(1)=0\Rightarrow \frac{\lambda_1}{4}+\frac{\lambda_2}{12}+c_1=0$,

$\int_0^1 ydx=1\Rightarrow \int_0^1\left(\frac{\lambda_1}{4}x^2+\frac{\lambda_2}{12}x^3+c_1x\right)dx=1$, тобто $\frac{\lambda_1}{12}+\frac{\lambda_2}{48}+\frac{c_1}{2}=1$; $\int_0^1 xydx=0\Rightarrow \int_0^1\left(\frac{\lambda_1}{4}x^3+\frac{\lambda_2}{12}x^4+c_1x^2\right)dx=0$, тобто $\frac{\lambda_1}{16}+\frac{\lambda_2}{60}+\frac{c_1}{3}=0$. Складемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{4}+\dfrac{\lambda_2}{12}+c_1=0, \\ \dfrac{\lambda_1}{12}+\dfrac{\lambda_2}{48}+\dfrac{c_1}{2}=1, \\ \dfrac{\lambda_1}{16}+\dfrac{\lambda_2}{60}+\dfrac{c_1}{3}=0; \end{cases}$$ або $$\begin{cases} 3\lambda_1+\lambda_2+12c_1=0, \\ 4\lambda_1+\lambda_2+24c_1=48, \\ 15\lambda_1+4\lambda_2+80c_1=0. \end{cases}$$ Тоді $c_1=36, \lambda_1=-384, \lambda_2=720$. Отже, $y=60x^3-96x^2+36x$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайдіть допустимі екстремалі функціонала $I[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2+z^2-y'^2-z'^2)dx$, **якщо** $y(0)=1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $z(0)=-1$, $z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ **і** $y-z-2\cos x=0$**.**

2. Знайдіть лінію найменшої довжини, яка належить поверхні $15x-7y+z=22$ **і з'єднує точки** $A(1;-1;0)$ **та** $B(2;1;-1)$**.**

3. Знайдіть допустимі екстремалі функціонала $I[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2)dx$, **якщо** $y(0)=-\dfrac{1}{2}$, $z(0)=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$, $y'=z+\sin x$**.**

4. Знайдіть допустимі екстремалі функціонала $I[y,z]=\int\limits_0^{1}(y^2+2y'^2+z'^2)dx$, **якщо** $y(0)=1$, $z(0)=0$, $y(1)=e+\dfrac{1}{e}$, $z(1)=2e-\dfrac{1}{e}$, $y'-z=0$**.**

5. Знайдіть допустимі екстремалі заданих функціоналів, якщо виконуються вказані умови:

а) $I[y]=\int_0^1 y'^2dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $\int_0^1 ydx=1$;

б) $I[y]=\int_0^{\pi} y'^2dx$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, $\int_0^{\pi} y\sin xdx=1$;

в) $I[y]=\int_0^1 y'^2dx$, $y(0)=-4$, $y(1)=4$, $\int_0^1 xydx=1$;

г) $I[y]=\int_0^1 (y'^2+y^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=e^{-1}$, $\int_0^1 ye^{-x}dx=\dfrac{1-3e^{-2}}{4}$;

д) $I[y]=\int_0^{\pi} y\sin xdx$, $y(0)=1$, $y(\pi)=1$, $\int_0^{\pi} y'^2dx=\dfrac{3\pi}{2}$.

Відповіді: **1**. $y=\cos x+\sin x, z=\sin x-\cos x$. **2**. $y=2x-3, z=1-x$. **3**. $y=-\dfrac{1}{2}\cos x, z=-\dfrac{1}{2}\sin x$. **4**. $y=xe^x+e^{-x}, z=(x+1)e^x-e^{-x}$. **5**. а) $y=3x^2-2x$; б) $y=\dfrac{2}{\pi}\sin x$; в) $y=5x^3+3x-4$; г) $y=xe^{-x}$; д) $y=\pm\sqrt{3}\sin x+1$.

РОЗДІЛ 2. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторна робота 1. Розв'язування елементарної задачі варіаційного числення методом скінченних різниць (МСР)

Мета роботи – набуття практичних навичок застосування МСР для розв'язування елементарної задачі варіаційного числення; розширення досвіду застосування програм комп'ютерної математики до розв'язування математичних задач.

Теоретичний матеріал

Основна ідея методу скінченних різниць (МСР) – заміна похідних функції різницевим відношенням, тобто

$$y' = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1.1}$$

Це означає, що екстремаль апроксимується сплайнами першого степеня (тобто, кусково-лінійними функціями).

Розглянемо застосування МСР для розв'язання елементарної задачі варіаційного числення:

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx \to \text{extr}\,,\ \ y_a = y(a), y_b = y(b)\,.$$

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин довжиною $h = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Точки розбиття позначимо через x_k, крім того, $x_0 = a,\ \ x_n = b$. Тоді функціонал $I[y]$ можна розглянути як суму функціоналів $I_k[y]$ на окремих відрізках розбиття:

$$I[y] = \sum_{k=1}^{n} I_k[y] = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x, y, y')dx \tag{1.2}$$

Оскільки функція $F(x, y, y')$ є неперервною, то застосуємо до кожного інтеграла з формули (1.2) теорему про середнє, в якості точки візьмемо середню точку, врахуємо формулу (1.1):

$$I_k[y]=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} F(x,y,y')dx \approx F\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{k-1}+y_k}{2},\frac{y_k-y_{k-1}}{\Delta x}\right)\Delta x \quad (1.3)$$

Тоді функціонал (1.2) буде функцією невідомих ординат $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$:

$$\begin{aligned} I[y_1,y_2,...,y_{n-1}] &= \sum_{k=1}^{n} I_k \approx \\ &\approx \Delta x \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{k-1}+y_k}{2},\frac{y_k-y_{k-1}}{\Delta x}\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Значення x_k відомі, відомими є й y_0 та y_n – це граничні умови.

Для знаходження допустимої екстремалі обчислимо частинні похідні $I[y_1, y_2, ..., y_{n-1}]$ по змінних $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ та прирівняємо їх до нуля. Будемо враховувати, знаходячи похідну по змінній y_k, що від цієї змінної залежать тільки два доданки з формули (1.2), а саме I_k та I_{k+1}, причому змінна y_k входить до 2-го та 3-го аргументу (на місці y та y'). Тоді за формулою похідної складеної функції

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_k}{\partial y_k} &= F'_y\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{k-1}+y_k}{2},\frac{y_k-y_{k-1}}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\Delta x + \\ &+F'_{y'}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{k-1}+y_k}{2},\frac{y_k-y_{k-1}}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}\cdot\Delta x = \\ &= F'_y\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{k-1}+y_k}{2},\frac{y_k-y_{k-1}}{\Delta x}\right)\cdot\frac{\Delta x}{2} + \\ &+F'_{y'}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\frac{y_{k-1}+y_k}{2},\frac{y_k-y_{k-1}}{\Delta x}\right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Обчислимо $\dfrac{\partial I_{k+1}}{\partial y_k}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{k+1}}{\partial y_k} = F'_y\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right)\cdot\frac{\Delta x}{2} - \\ -F'_{y'}\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right)\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Додаємо формули (1.5) і (1.6), прирівнюємо до нуля і ділимо на Δx. Маємо:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(F'_y\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{k-1} + y_k}{2}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) + \right.\\ &\left.+F'_y\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right)\right) - \\ &-\frac{1}{\Delta x}\left(F'_{y'}\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - \right.\\ &\left.-F'_{y'}\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \frac{y_{k-1} + y_k}{2}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right)\right)\end{aligned}\right. \qquad k = \overline{1, n-1}$$

(1.7)

За своєю структурою кожне рівняння системи (1.7) нагадує рівняння Ейлера. Але замість F'_y записана півсума значень функції F'_y в середніх точках інтервалів, які є сусідніми до інтервалу з точкою x_k, а замість $\dfrac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)$ – відношення різниці $F'_{y'}$ у вказаних вище точках до довжини відрізка розбиття – до Δx. Зауважимо, що систему (1.7) можна було одержати зразу з рівняння Ейлера, підставивши замість похідних різницеві відношення. Тому систему (1.7) можна розглядати як скінченно-різницевий аналог рівняння Ейлера. Звідси й назва методу – МСР.

Розглянемо детальніше застосування методу скінченних різниць до розв’язування лінійної граничної задачі, такої, в якій і рівняння Ейлера, й граничні умови є лінійними відносно шуканої функції, її похідних першого й другого порядків. У цьому випадку у кожній внутрішній точці $x_k, k=\overline{1,n-1}$ замінюємо похідні за формулами

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h},\ y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2}, \tag{1.8}$$

а на кінцях відрізка $[a;b]$, тобто в точках $x_0 = a, \quad x_n = b$ покладемо

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h},\ y'(x_n) \approx \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h}. \tag{1.9}$$

Граничні умови $y_a = y(a), y_b = y(b)$ запишемо у вигляді

$$y_a = y(x_0), y_b = y(x_n). \tag{1.10}$$

Підставивши формули (1.8) – (1.10) у рівняння Ейлера, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $y_k = y(x_k), k=\overline{0,n}$. Розв’язавши її, отримаємо наближені значення функції $y = y(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Контрольні запитання

1. Запишіть елементарну задачу варіаційного числення.
2. Запишіть необхідну умову існування екстремуму функціонала.
3. Запишіть рівняння Ейлера для елементарної задачі варіаційного числення..
4. Сформулюйте основну ідею методу скінченних різниць.

5. Запишіть формули, якими замінюють похідні у внутрішніх вузлах і на кінцях відрізка.

Контрольний приклад

<u>*Приклад 1.1.*</u> Знайдіть допустиму екстремаль функціонала $I[y]=\int_{-1}^{1}(x^2+y^2+y'^2)dx$, якщо $y(-1)=1, y(1)=2$ методом скінченних різниць (n = 4). Порівняйте точний і наближений розв'язки.

Розв'язання. 1) Знайдемо точний розв'язок. $F(x,y,y')=x^2+y^2+y'^2$; $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''$.

Тоді рівняння Ейлера: $2y-2y''=0.$ Складемо характеристичне рівняння $k^2-1=0,$ його корені $k_1=1, k_2=-1.$ Загальний розв'язок $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$. Довільні сталі c_1 та c_2 знайдемо з граничних умов: $\begin{cases} c_1e^{-1}+c_2e^1=1, \\ c_1e^1+c_2e^{-1}=2. \end{cases}$ Розв'яжемо систему, наприклад, за формулами Крамера: $c_1=\frac{e-2e^3}{1-e^4}, c_2=\frac{2e-e^3}{1-e^4}$. Шукана екстремаль $y^*=\frac{e-2e^3}{1-e^4}e^x+\frac{2e-e^3}{1-e^4}e^{-x}$.

2) Рівняння Ейлера: $y''-y=0$. Оскільки n = 4, то $h=\frac{1-(-1)}{4}=0,5$. Тоді $x_0=-1; x_1=-1+0,5=-0,5;$ $x_2=-0,5+0,5=0; x_3=0+0,5=0,5; x_4=0,5+0,5=1$. Крім того, з граничних умов $y_0=y(-1)=1, y_4=y(1)=2$. Замінимо

в рівнянні Ейлера y'' різницевим відношенням $y''(x_k) \approx \dfrac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2}$, де $h = 0,5, \quad k = \overline{1,3}$:

$$\frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{0,25} - y(x_k) = 0, k = \overline{1,3}.$$

Перепишемо це рівняння:

$4y(x_{k+1}) - 8y(x_k) + 4y(x_{k-1}) - y(x_k) = 0, k = \overline{1,3},$ або, врахувавши, що $y(x_{k+1}) = y_{k+1}, y(x_k) = y_k, y(x_{k-1}) = y_{k-1}$, $4y_{k-1} - 9y_k + 4y_{k+1} = 0, k = \overline{1,3}.$ Запишемо систему в розгорнутому вигляді, врахувавши й граничні умови.

$$\begin{cases} 4y_0 - 9y_1 + 4y_2 = 0, \\ 4y_1 - 9y_2 + 4y_3 = 0, \\ 4y_2 - 9y_3 + 4y_4 = 0, \\ y_0 = 1, \\ y_4 = 2. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -9y_1 + 4y_2 = -4, \\ 4y_1 - 9y_2 + 4y_3 = 0, \\ 4y_2 - 9y_3 = -8. \end{cases}$$

Тоді

$$y_1 = \frac{388}{441} \approx 0,88, y_2 = \frac{48}{49} \approx 0,98, y_3 = \frac{584}{441} \approx 1,32.$$

Для порівняння точного й наближеного розв'язків варіаційної задачі внесемо потрібні дані в таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

x_i	-1	-0,5	0	0,5	1
$y(x_i)$	1	0,87	0,97	1,32	2
y_i	1	0,88	0,98	1,32	2
$\lvert y_i - y(x_i) \rvert$	0	0,01	0,01	0	0

Похибка у сітковій нормі 0,01.

На рисунку 1.1 наведено графіки точного розв'язку $y = \dfrac{e - 2e^3}{1 - e^4} e^x + \dfrac{2e - e^3}{1 - e^4} e^{-x}$ й ламаної Ейлера.

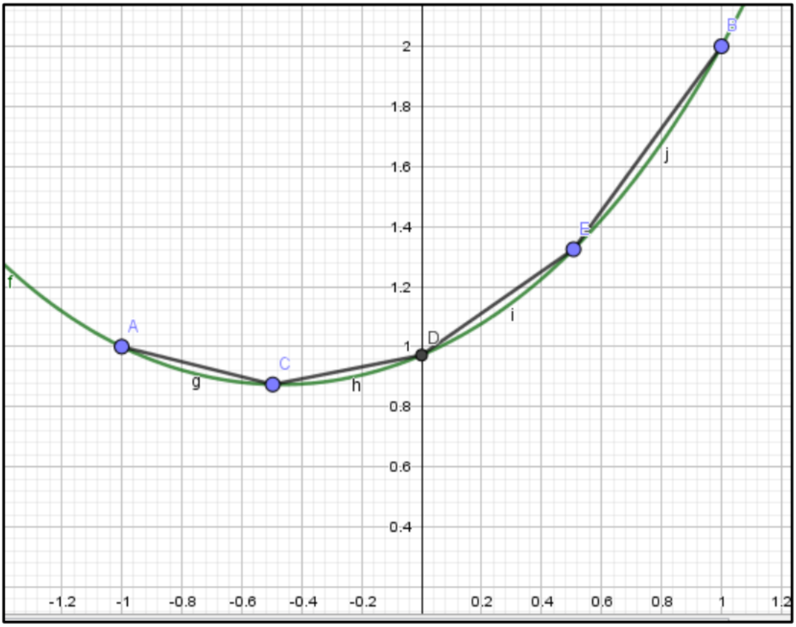

Рис. 1.1. Графік точного розв’язку й крива Ейлера
(побудовано за допомогою GeoGebra)

Порядок виконання роботи

1. Вивчіть теоретичний матеріал про метод скінченних різниць. Дайте відповіді на контрольні запитання (письмово, до заняття).
2. Ознайомтесь з контрольним прикладом (до заняття).
3. Знайдіть точний розв’язок пропонованої варіаційної задачі.
4. Знайдіть наближений розв’язок пропонованої варіаційної задачі для $n = 4$.
5. Оформіть таблицю типу 1.1. Порівняйте точний та наближений розв’язки.
6. Побудуйте графік точного розв’язку та криву Ейлера.

7. Оформіть звіт про виконання лабораторної роботи (Додаток В).

Варіанти завдань

1. $I[y]=\int_0^1 (2e^x y+y'^2)dx,\ y(0)=1, y(1)=e.$

2. $I[y]=\int_0^1 e^x(y^2+0,5y'^2)dx,\ y(0)=1, y(1)=e.$

3. $I[y]=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx,\ y(1)=1, y(2)=4.$

4. $I[y]=\int_1^2 (y'^2+4y^2)dx,\ y(0)=e^2, y(1)=1.$

5. $I[y]=\int_1^2 (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0, y(2)=1.$

6. $I[y]=\int_0^2 (y'^2+32yx+6y)dx,\ y(0)=1,\ y\left(2\right)=3.$

7. $I[y]=\int_{-1}^0 (6e^{-x}y+y'^2)dx,\ y(-1)=3e+1,\ y\left(0\right)=3.$

8. $I[y]=\int_1^e (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0,\ y\left(e\right)=1.$

9. $I[y]=\int_0^2 (y'^2+y^2+2ye^{-x})dx,\ y(0)=0,\ y\left(2\right)=-e^{-2}.$

10. $I[y]=\int_0^2 \left(y'^2e^{2x}-y^2e^{2x}\right)dx,\ y(0)=0, y\left(2\right)=2e^{-2}.$

11. $I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9y^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=2, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

12. $I[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(2xy-y'^2\right)dx$, $y(-1)=\dfrac{7}{6}$, $y\left(0\right)=0$.

Відповіді (точні розв'язки): **1.** $y=e^x$. **2.** $y=e^x$. **3.** $y=-\dfrac{6}{x}+7$. **4.** $y=e^{-2x+2}$. **5.** $y=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$. **6.** $y=\dfrac{8x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{38x}{3}+1$. **7.** $y=3e^{-x}-x$. **8.** $y=\ln x$. **9.** $y=-\dfrac{1}{2}xe^{-x}$. **10.** $y=xe^{-x}$. **11.** $y=2\cos 3x$. **12.** $y=-\dfrac{x^3}{6}-x$.

Лабораторна робота 2. Розв'язування елементарної задачі варіаційного числення методом Рітца

Мета роботи – набуття практичних навичок застосування методу Рітца для розв'язування елементарної задачі варіаційного числення; розширення досвіду застосування програм комп'ютерної математики до розв'язування математичних задач.

Теоретичний матеріал

Суть методу полягає в тому, що ми вибираємо систему лінійно-незалежних на відрізку $[a;b]$ функцій $\varphi_k(x), k=\overline{1,n}$ і шукаємо розв'язок варіаційної задачі у вигляді лінійної комбінації цих функцій: $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+....+\alpha_n\varphi_n(x)$. Функції вибираємо так, щоб вони задовольняли однорідні граничні умови $\varphi_k(a)=0, \varphi_k(b)=0, k=\overline{1,n}$, а для виконання заданих граничних умов обираємо ще одну функцію $\varphi_0(x)$, яка й задовольняє граничні умови $\varphi_0(a)=y_a, \varphi_0(b)=y_b$.

Тоді розв'язок варіаційної задачі шукаємо у вигляді

$$y(x)=\varphi_0(x)+\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+....+\alpha_n\varphi_n(x) \qquad (2.1)$$

У формулі (2.1) коефіцієнти підбираємо так, щоб функціонал, який досліджуємо, приймав екстремальне значення, тобто мають виконуватися умови $\dfrac{\partial I}{\partial \alpha_k}=0, k=\overline{1,n}.$ Отже, за методом Рітца варіаційна задача зводиться до задачі дослідження на екстремум функції кількох змінних.

Часто в якості функції $\varphi_0(x)$ вибирають лінійну функцію, графік якої (пряма) проходить через граничні точки. А в якості функцій $\varphi_k(x), k=\overline{1,n}$ можна взяти

$$\varphi_k(x) = (x-a)^k(x-b),\ k = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

або

$$\varphi_k(x) = \sin k\pi \frac{x-a}{b-a},\ k = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Контрольні запитання

1. Запишіть елементарну задачу варіаційного числення.
2. Запишіть необхідну умову існування екстремуму функціонала.
3. Запишіть рівняння Ейлера для елементарної задачі варіаційного числення.
4. Сформулюйте основну ідею методу Рітца.
5. У вигляді якої функції найчастіше обирають функцію $\varphi_0(x)$?
6. Наведіть приклади функцій $\varphi_k(x),\ k = \overline{1,n}$.

Контрольний приклад

<u>Приклад 2.1.</u> Знайдіть допустимі екстремалі функціонала $I[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)dx$ за умов $y(0)=1, y(1)=e-1$» методом Рітца. Порівняйте точний і наближений розв'язки.

Розв'язання. 1) Знайдемо точний розв'язок. $F(x,y,y') = y'^2 + y^2 + 2xy;$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2x,$ $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y',$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$. Тоді рівняння Ейлера: $2y + 2x - 2y'' = 0$ або $y'' - y = x$. Відповідне однорідне рівняння $y'' - y = 0$, а характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0,$ його корені $k_1 = 1, k_2 = -1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Враховуючи, що права частина диференціального рівняння $f(x) = x$ і число 0 не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд $y_{чн} = ax + b$. Підставимо його в рівняння: $0 - (ax + b) \equiv x$. Тоді $a = -1, b = 0$. Сімейство екстремалей: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$. Довільні сталі c_1 та c_2 знайдемо з граничних умов: $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 e + c_2 e^{-1} - 1 = e - 1. \end{cases}$ Розв'яжемо систему: $c_1 = 1, c_2 = 0$.

Тоді шукана екстремаль $y^* = e^x - x$.

2) Запишемо функцію $\varphi_0(x)$ як лінійну, графік якої проходить через точки (0; 1) та (1; e - 1): $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y-1}{e-2}$ або $y = (e-2)x + 1$. В якості функцій $\varphi_k(x)$ візьмемо такі, як у (2.2): $\varphi_k(x) = x^k (x-1), k = \overline{1, n}$. Розв'язок варіаційної задачі шукаємо у вигляді

$$y(x) = (e-2)x + 1 + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2 (x-1) + ... + \alpha_n x^n (x-1).$$

Обмежимося випадком $n = 1$.

Тоді $y_1(x) = (e-2)x + 1 + \alpha_1 x(x-1)$. Знайдемо $y_1'(x)$ й підставимо в функціонал разом з $y_1(x)$. Маємо: $y_1'(x) = (e-2) + \alpha_1(2x-1)$;

$$I[y_1] = \int_0^1 (y_1'^2 + y_1{}^2 + 2xy_1)dx = \int_0^1 (((e-2) + \alpha_1(2x-1))^2 + ((e-2)x +$$

$$+1 + \alpha_1 x(x-1))^2 + 2x((e-2)x + 1 + \alpha_1 x(x-1)))dx.$$

Знайдемо похідну $I[y_1]$ по змінній α_1 і прирівняємо до нуля (1-й і 2-й доданки є складеними функціями від α_1).

$$\frac{dI[y_1]}{d\alpha_1}=\int_0^1(2((e-2)+\alpha_1(2x-1))\cdot(2x-1)+2((e-2)x+1+\alpha_1 x(x-1))*$$

$*x(x-1)+2x^2(x-1))dx=0$. Обчислимо інтеграл.

$$\frac{dI[y_1]}{d\alpha_1}=(e-2)\cdot\frac{(2x-1)^2}{2}\bigg|_0^1+\alpha_1\cdot\frac{(2x-1)^3}{3}\bigg|_0^1+2(e-2)\cdot\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1+$$

$$+\left(\frac{2x^3}{3}-x^2\right)\bigg|_0^1+2\alpha_1\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1+\left(\frac{x^4}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\bigg|_0^1=$$

$$=(e-2)\cdot 0+\alpha_1\cdot\frac{2}{3}+2(e-2)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-1\right)+2\alpha_1\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{(e-2)}{6}-\frac{1}{3}+\frac{\alpha_1}{15}-\frac{1}{6}=\frac{11}{15}\alpha_1-\frac{1}{2}-\frac{(e-2)}{6}.$$

Прирівняємо до нуля: $\frac{11}{15}\alpha_1-\frac{1}{2}-\frac{(e-2)}{6}=0$. Тоді $\frac{11}{15}\alpha_1=\frac{1}{2}+\frac{(e-2)}{6}$ або $\alpha_1=\frac{5(e+1)}{22}$. Тоді розв'язок за методом Рітца $y_1(x)=(e-2)x+1+\frac{5(e+1)}{22}x(x-1)$.

Порівняння одержаних розв'язків здійснимо графічно, побудувавши графіки функцій $y^*=e^x-x$ та $y_1(x)=(e-2)x+1+\frac{5(e+1)}{22}x(x-1)$ (рис. 2.1).

Як бачимо, на відрізку [0; 1] графіки обох функцій практично співпадають. Це означає, що вже для n = 1 отримали розв'язок, достатньо близький до точного.

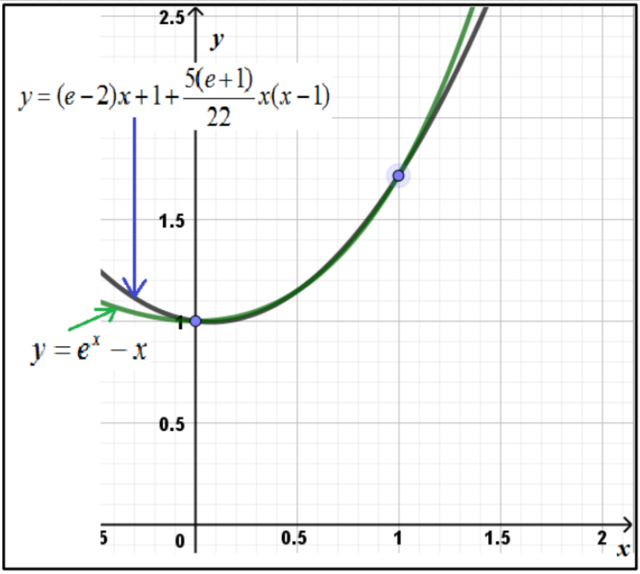

Рис. 2.1. Графіки функцій $y^*=e^x-x$ та

$$y_1(x)=(e-2)x+1+\frac{5(e+1)}{22}x(x-1)$$

Порядок виконання роботи

1. Вивчіть теоретичний матеріал про метод Рітца. Дайте відповіді на контрольні запитання (письмово, до заняття).
2. Ознайомтесь з контрольним прикладом (до заняття).
3. Знайдіть точний розв'язок пропонованої варіаційної задачі.
4. Знайдіть наближений розв'язок пропонованої варіаційної задачі для $n = 1$.
5. Побудуйте графіки точного розв'язку та наближеного.
6. Оформіть звіт про виконання лабораторної роботи (Додаток В).

Варіанти завдань

1. $I[y]=\int_0^1 (2e^x y + y'^2)dx,\ y(0)=1, y(1)=e.$

2. $I[y]=\int_0^1 e^x(y^2+0,5y'^2)dx,\ y(0)=1, y(1)=e.$

3. $I[y]=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx,\ y(1)=1, y(2)=4.$

4. $I[y]=\int_1^2 (y'^2+4y^2)dx,\ y(0)=e^2, y(1)=1.$

5. $I[y]=\int_1^2 (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0, y(2)=1.$

6. $I[y]=\int_0^2 (y'^2+32yx+6y)dx,\ y(0)=1,\ y\left(2\right)=3.$

7. $I[y]=\int_{-1}^0 (6e^{-x}y+y'^2)dx,\ y(-1)=3e+1,\ y\left(0\right)=3.$

8. $I[y]=\int_1^e (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0,\ y\left(e\right)=1.$

9. $I[y]=\int_0^2 (y'^2+y^2+2ye^{-x})dx,\ y(0)=0,\ y\left(2\right)=-e^{-2}.$

10. $I[y]=\int_0^2 \left(y'^2e^{2x}-y^2e^{2x}\right)dx,\ y(0)=0, y\left(2\right)=2e^{-2}.$

11. $I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9y^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=2, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

12. $I[y]=\int_{-1}^0 \left(2xy-y'^2\right)dx, y(-1)=\frac{7}{6}, y\left(0\right)=0.$

Лабораторна робота 3. Розв'язування елементарної задачі варіаційного числення в системі MATLAB

Мета роботи – удосконалення практичних навичок розв'язування елементарної задачі варіаційного числення; розширення досвіду застосування програм комп'ютерної математики до розв'язування математичних задач.

Теоретичний матеріал

Елементарна задача варіаційного числення:

$$I[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \to \text{extr}\,,\ \ y_a=y(a),\, y_b=y(b)\,.$$

Рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\,.$$

Необхідною умовою існування екстремуму функціонала $I[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ є існування розв'язку рівняння Ейлера $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$, який задовольняє граничні умови $y_a=y(a),\, y_b=y(b)$.

Достатня умова – умова Лежандра:

1) Якщо $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$ на всіх функціях, які близькі до екстремалі в сенсі 0-го порядку, то на цій екстремалі досягається сильний мінімум. Якщо $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$ на всіх функціях, які близькі до екстремалі в сенсі 1-го порядку, то досягається тільки слабкий мінімум.

2) Якщо $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}<0$ на всіх функціях, які близькі до екстремалі в сенсі 0-го порядку, то на цій екстремалі

досягається сильний мінімум. Якщо $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} < 0$ на всіх функціях, які близькі до екстремалі в сенсі 1-го порядку, то досягається тільки слабкий мінімум.

Контрольні запитання

1. Запишіть елементарну задачу варіаційного числення.
2. Запишіть необхідну умову існування екстремуму функціонала.
3. Запишіть рівняння Ейлера для елементарної задачі варіаційного числення.
4. Запишіть достатню умову існування екстремуму функціонала.

Контрольний приклад

<u>*Приклад 3.1.*</u> Розв'яжіть елементарну задачу варіаційного числення $I[y] = \int\limits_{-1}^{1} (y'^2 + y^2 + x^2)dx \to \text{extr}$ за умов $y(-1) = 1, y(1) = 2$: а) аналітично; б) за допомогою системи MATLAB. Порівняйте одержані розв'язки.

Розв'язання. 1) Знайдемо розв'язок аналітично. $F(x, y, y') = y'^2 + y^2 + x^2$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$. Тоді рівняння Ейлера: $2y - 2y'' = 0$ або $y'' - y = 0$. Відповідне характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$, а загальний розв'язок диференціального рівняння $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Довільні сталі c_1 та c_2 знайдемо з граничних умов: $\begin{cases} c_1 e^{-1} + c_2 e = 1, \\ c_1 e + c_2 e^{-1} = 2. \end{cases}$ Розв'яжемо систему:

$c_1 = \dfrac{e(1-2e^2)}{1-e^4}, c_2 = \dfrac{e(2-e^2)}{1-e^4}$. Тоді шукана екстремаль $y^* = \dfrac{e(1-2e^2)}{1-e^4}e^x + \dfrac{e(2-e^2)}{1-e^4}e^{-x}$. Побудуємо екстремаль за допомогою GeoGebra (рис.3.1).

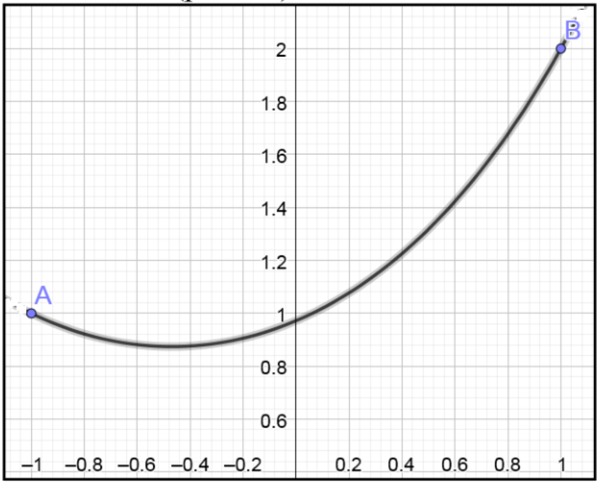

Рис. 3.1. Графік екстремалі

Застосуємо достатню умову існування екстремуму. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \left(2y'\right)'_{y'} = 2 > 0,$ тому на екстремалі $y^* = \dfrac{e(1-2e^2)}{1-e^4}e^x + \dfrac{e(2-e^2)}{1-e^4}e^{-x}$ функціонал набуває мінімуму.

$$I_{\min}[y^*] = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2e^2(1-2e^2)^2}{\left(1-e^4\right)^2}e^{2x} + \frac{2e^2(2-e^2)^2}{\left(1-e^4\right)^2}e^{-2x} + x^2\right)dx =$$

$$= \frac{(5e^4-8e^2+5)}{e^4-1} + \frac{2}{3}.$$

б) Для розв'язування задачі за допомогою системи MATLAB напишемо програму.

```
script
clear all
% Знайти екстремаль функціонала
syms x y Dy D2y
F=x^2+y^2+Dy^2;% підінтегральна функція
x1=-1;%граничні умови
y1=1;%граничні умови
x2=1;%граничні умови
y2=2;%граничні умови
% частинні похідні
dFdy=diff(F,y);
dFdy1=diff(F,Dy);
fprintf('Fy=%s\n',char(dFdy))
fprintf('Fy''=%s\n',char(dFdy1))
% частинні похідні
% Умова Лежандра
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x);
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y);
d_dFdy1_dy1=diff(dFdy1,Dy);
dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y;
fprintf('Fy''/dx=%s\n',char(dFy1dx))
fprintf('Fy''y''=%s\n',char(d_dFdy1_dy1))
%dFy'/dx=2*D2y
% Умова Лежандра
% Рівняння Ейлера
Euler=simple(dFdy-dFy1dx);
deqEuler=[char(Euler) '=0'];
fprintf('Рівняння Ейлера:\n%s\n',deqEuler)
% Рівняння Ейлера
% Розв'язок рівняння Ейлера
Sol=dsolve(deqEuler,'x');
if length(Sol)~=1
```

```
  error('Нема розв'язків');
else
  disp('розвязок рівняння Ейлера');
  fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end
% Розв'язок рівняння Ейлера
% Рівняння для граничних умов
SolLeft=subs(Sol,x,x1);
SolRight=subs(Sol,x,x2);
EqLeft=[char(SolLeft) '=' char(sym(y1))];
EqRight=[char(SolRight) '=' char(sym(y2))];
disp('Рівняння для граничних умов')
fprintf('%s\n',EqLeft,EqRight)
% Рівняння для граничних умов
% Рівняння екстремалі
Con=solve(EqLeft,EqRight,'C3,C2')
C3=Con.C3;
C2=Con.C2;
Sol21=vpa(eval(Sol),14);
disp('Рівняння екстремалі')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol21))
% Рівняння екстремалі
% Значення функціонала
Fextr=subs(F,{y,Dy},{Sol21,diff(Sol21,x)});
Jextr=eval(int(Fextr,x,x1,x2))
% Значення функціонала
% Графік екстремалі
xp1=linspace(x1,x2);
y21=subs(Sol21,x,xp1);
figure
plot(xp1,y21,'-r')
xlabel('\itx')
ylabel('\ity\rm(\itx\rm)')
% Графік екстремалі
```

Після реалізації цієї програми маємо результат (рис.3.2 і 3.3):

```
Рівняння Ейлера:
2*y - 2*D2y=0
розвязок рівняння Ейлера
y(x)=C3*exp(x) + C2*exp(-x)
Рівняння для граничних умов
C2*exp(1) + C3*exp(-1)=1
C2*exp(-1) + C3*exp(1)=2

Con =

    C2: [1x1 sym]
    C3: [1x1 sym]

Рівняння екстремалі
y(x)=0.69877023730774*exp(x) + 0.27331117318808*exp(-1.0*x)

Jextr =

    4.7504
```

Рис. 3.2. Рівняння екстремалі і мінімум функціонала

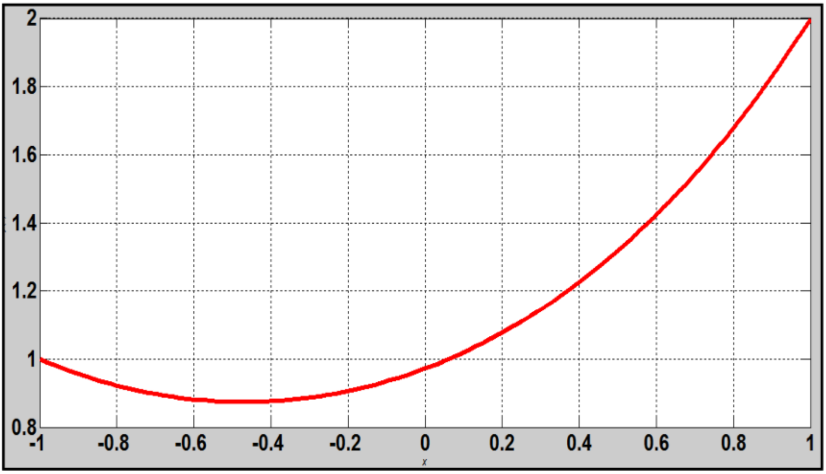

Рис. 3.3. Графік екстремалі

Для порівняння екстремалей, одержаних в пунктах а) й б), обчислимо наближено коефіцієнти екстремалі $y^* = \frac{e(1-2e^2)}{1-e^4}e^x + \frac{e(2-e^2)}{1-e^4}e^{-x}$ і значення $I_{\min}[y^*] = \frac{(5e^4-8e^2+5)}{e^4-1} + \frac{2}{3}$. (Можна скористатися онлайн калькулятором http://математика.укр/mod/page/view.php?id=1135)

Одержимо: $\frac{e(1-2e^2)}{1-e^4} \approx 0.6987702373077446$,

$\frac{e(2-e^2)}{1-e^4} \approx 0.2733111731880837$,

$\frac{(5e^4-8e^2+5)}{e^4-1} + \frac{2}{3} \approx 4.7503580112172745 \approx 4.7504$.

Порівняйте з даними на рис. 3.2. Як бачимо, в обох випадках отримали однакові результати.

Порядок виконання роботи

1. Вивчіть теоретичний матеріал. Дайте відповіді на контрольні запитання (письмово, до заняття).
2. Ознайомтесь з контрольним прикладом (до заняття). Перевірте самостійно виконання прикладу у системі MATLAB
3. Знайдіть аналітичний розв’язок пропонованої викладачем варіаційної задачі.
4. Знайдіть розв’язок пропонованої викладачем варіаційної задачі в системі MATLAB, скориставшись записаною вище програмою.
5. Оформіть звіт про виконання лабораторної роботи (Додаток В).

Варіанти завдань

1. $I[y]=\int_0^1 (2e^x y+y'^2)dx,\ y(0)=1, y(1)=e.$

2. $I[y]=\int_0^1 e^x(y^2+0,5y'^2)dx,\ y(0)=1, y(1)=e.$

3. $I[y]=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx,\ y(1)=1, y(2)=4.$

4. $I[y]=\int_1^2 (y'^2+4y^2)dx,\ y(0)=e^2, y(1)=1.$

5. $I[y]=\int_1^2 (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0, y(2)=1.$

6. $I[y]=\int_0^2 (y'^2+32yx+6y)dx,\ y(0)=1,\ y\left(2\right)=3.$

7. $I[y]=\int_{-1}^0 (6e^{-x}y+y'^2)dx,\ y(-1)=3e+1,\ y\left(0\right)=3.$

8. $I[y]=\int_1^e (xy'^2+yy')dx,\ y(1)=0,\ y\left(e\right)=1.$

9. $I[y]=\int_0^2 (y'^2+y^2+2ye^{-x})dx,\ y(0)=0,\ y\left(2\right)=-e^{-2}.$

10. $I[y]=\int_0^2 \left(y'^2e^{2x}-y^2e^{2x}\right)dx,\ y(0)=0, y\left(2\right)=2e^{-2}.$

11. $I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9y^2-y'^2\right)dx,\ y(0)=2, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.$

12. $I[y]=\int_{-1}^0 \left(2xy-y'^2\right)dx, y(-1)=\dfrac{7}{6}, y\left(0\right)=0.$

Лабораторна робота 4. Знаходження екстремалі функціонала, який залежить від кількох функцій, в системі MATLAB

Мета роботи – удосконалення практичних навичок знаходження екстремалі функціонала, який залежить від кількох функцій; розширення досвіду застосування програм комп'ютерної математики до розв'язування математичних задач.

Теоретичний матеріал

Функціонал, який залежить від кількох функцій однієї змінної x та перших похідних цих функцій:

$$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx .$$

Для такого функціонала формулюють $2n$ граничних умов:

$$y_1(x_1) = y_{11},\ y_1(x_2) = y_{12},\ y_2(x_1) = y_{21},\ y_2(x_2) = y_{22}, ..., y_n(x_1) = y_{n1},\ y_n(x_2) = y_{n2}.$$

Будемо розв'язувати таку варіаційну задачу:

$$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx \to extr$$

$$y_1(x_1) = y_{11},\ y_1(x_2) = y_{12},\ y_2(x_1) = y_{21},\ y_2(x_2) = y_{22}, ..., y_n(x_1) = y_{n1},\ y_n(x_2) = y_{n2}.$$

Для знаходження екстремалей треба розв'язати систему n диференціальних рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_1'}\right) = 0, \\ \qquad ... \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_n} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_n'}\right) = 0. \end{cases}$$

Цю систему треба доповнити $2n$ граничними умовами, записаними вище.

Як правило, ми будемо розглядати варіаційну задачу для n =2. Функції будемо позначати $y(x)$ та $z(x)$. Тоді задачу запишемо так:

$$I[y,z]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,z,y',z')dx \to extr$$

$$y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2,\ z(x_1)=z_1,\ z(x_2)=z_2.$$

У цьому випадку система рівнянь Ейлера набере вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)=0. \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. Запишіть функціонал, який залежить від двох функцій однієї змінної.
2. Скільки граничних умов формулюють, як правило, для функціонала, що залежить від двох функцій однієї змінної?
3. Запишіть необхідну умову існування екстремуму функціонала, який залежить від двох функцій однієї змінної.

Контрольний приклад

Приклад 4.1. Знайти екстремалі функціонала $I[y,z]=\int_{-2}^{2}(y'^2+z'^2+2yz)dx$, якщо $y(-2)=1,\ y(2)=0,$ $z(-2)=0,\ z(2)=2$: а) аналітично; б) за допомогою системи MATLAB. Порівняйте одержані розв'язки.

Розв'язання. а) Знайдемо розв'язок аналітично. $F(x,y,z,y',z')=y'^2+z'^2+2yz$. Знайдемо частинні похідні, які входять в систему рівнянь Ейлера: $\frac{\partial F}{\partial y} = 2z$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$,

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(2y') = 2y''$; $\frac{\partial F}{\partial z} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z'} = 2z'$,

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{d}{dx}(2z') = 2z''$. Складемо систему : $\begin{cases} 2z - 2y'' = 0, \\ 2y - 2z'' = 0. \end{cases}$

Спростимо її: $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0. \end{cases}$ З першого рівняння $z = y''$, тоді $z'' = y^{IV}$. Тоді друге рівняння набере вигляду $y^{IV} - y = 0$. Складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$k^4 - 1 = 0 \Rightarrow\Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i.$$

Тоді загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y^{IV} - y = 0$ має вигляд:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Знайдемо функцію $z(x)$, враховуючи умову $z = y''$:

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x.$$

Врахуємо граничні умови. З умови $y(-2) = 1$ маємо, що $c_1 e^{-2} + c_2 e^2 + c_3 \cos 2 - c_4 \sin 2 = 1$. З умови $z(-2) = 0$ маємо, що $c_1 e^{-2} + c_2 e^2 - c_3 \cos 2 + c_4 \sin 2 = 0$. Оскільки $y(2) = 0$, $c_1 e^2 + c_2 e^{-2} + c_3 \cos 2 + c_4 \sin 2 = 0$, а з умови $z(2) = 2$ маємо, що $c_1 e^2 + c_2 e^{-2} - c_3 \cos 2 - c_4 \sin 2 = 2$. Маємо систему:

$$\begin{cases} c_1 e^{-2} + c_2 e^2 + c_3 \cos 2 - c_4 \sin 2 = 1, \\ c_1 e^{-2} + c_2 e^2 - c_3 \cos 2 + c_4 \sin 2 = 0, \\ c_1 e^2 + c_2 e^{-2} + c_3 \cos 2 + c_4 \sin 2 = 0, \\ c_1 e^2 + c_2 e^{-2} - c_3 \cos 2 - c_4 \sin 2 = 2. \end{cases}$$

Додамо, а потім віднімемо почленно рівняння 1-ше і 2-ге, а потім 3-тє і 4-те. Матимемо:

$$\begin{cases} c_1e^{-2}+c_2e^{2}=\dfrac{1}{2}, \\ c_3\cos 2-c_4\sin 2=\dfrac{1}{2}, \\ c_1e^{2}+c_2e^{-2}=1, \\ c_3\cos 2+c_4\sin 2=-1. \end{cases}$$

Розглянемо дві системи $\begin{cases} c_1e^{-2}+c_2e^{2}=\dfrac{1}{2}, \\ c_1e^{2}+c_2e^{-2}=1, \end{cases}$ та $\begin{cases} c_3\cos 2-c_4\sin 2=\dfrac{1}{2}, \\ c_3\cos 2+c_4\sin 2=-1, \end{cases}$ і розв'яжемо їх. Маємо, що

$$c_1=\frac{e^2(1-2e^4)}{2(1-e^8)},\ c_2=\frac{e^2(2-e^4)}{2(1-e^8)},\ c_3=-\frac{1}{4\cos 2},\ c_4=-\frac{3}{4\sin 2}.$$

Отже, екстремалі

$$y=\frac{e^2(1-2e^4)}{2(1-e^8)}e^{x}+\frac{e^2(2-e^4)}{2(1-e^8)}e^{-x}-\frac{1}{4\cos 2}\cos x-\frac{3}{4\sin 2}\sin x,$$

$$z=\frac{e^2(1-2e^4)}{2(1-e^8)}e^{x}+\frac{e^2(2-e^4)}{2(1-e^8)}e^{-x}+\frac{1}{4\cos 2}\cos x+\frac{3}{4\sin 2}\sin x.$$

Побудуємо екстремаль за допомогою GeoGebra (рис.4.1).

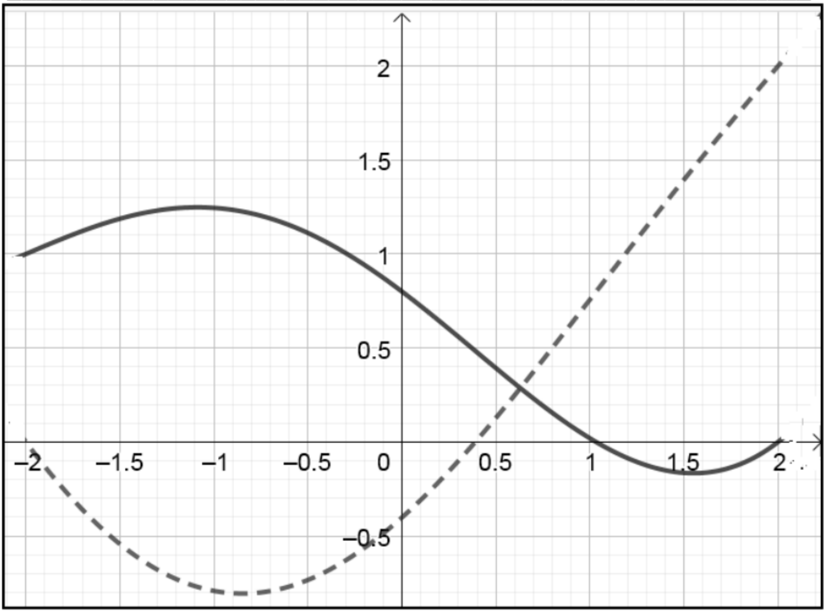

Рис. 4.1. Графіки екстремалей

б) Для розв’язування задачі за допомогою системи MATLAB напишемо програму.

```
script
clear all
% Знайти екстремаль функціонала
syms x y z Dy D2y Dz D2z
F=Dy^2+Dz^2+2*y*z;% підінтегральна функція
x1=-2;%граничні умови
y1=1;%граничні умови
z1=0;%граничні умови
x2=2;%граничні умови
y2=0;%граничні умови
z2=2;%граничні умови
fprintf('Підінтегральна функція F(x,y,y'', z, z'')=%s\n',char(F))
```

```
% частинні похідні
dFdy=diff(F,y);
dFdy1=diff(F,Dy);
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x);
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y);
d_dFdy1_dy1=diff(dFdy1,Dy);
d_dFdy1_dz=diff(dFdy1,z);
d_dFdy1_dz1=diff(dFdy1,Dz);
dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y+d
_dFdy1_dz*Dz+d_dFdy1_dz1*D2z;
%
dFdz=diff(F,z);
dFdz1=diff(F,Dz);
d_dFdz1_dx=diff(dFdz1,x);
d_dFdz1_dy=diff(dFdz1,y);
d_dFdz1_dy1=diff(dFdz1,Dy);
d_dFdz1_dz=diff(dFdz1,z);
d_dFdz1_dz1=diff(dFdz1,Dz);
dFz1dx=d_dFdz1_dx+d_dFdz1_dy*Dy+d_dFdz1_dy1*D2y+d
_dFdz1_dz*Dz+d_dFdz1_dz1*D2z;
% Рівняння Ейлера
EulerY=simple(dFdy-dFy1dx);
EulerZ=simple(dFdz-dFz1dx);
dEuY=[char(EulerY) '=0'];
dEuZ=[char(EulerZ) '=0'];
fprintf('Система рівнянь Ейлера:\n%s\n%s\n',dEuY,dEuZ)
% Рівняння Ейлера
% Розв'язок системи рівнянь Ейлера
Sol=dsolve(dEuY,dEuZ,'x');
if length(Sol)~=1
   error('Нема розв’язків');
else
   SolY=Sol.y;
   SolZ=Sol.z;
```

```
  disp('Загальний розв’язок системи рівнянь Ейлера');
  fprintf('y(x)=%s\nz(x)=%s\n',char(SolY),char(SolZ))
end
% Розв'язок системи рівнянь Ейлера
% Граничні умови
SolLY=subs(SolY,x,x1);
SolLZ=subs(SolZ,x,x1);
SolRY=subs(SolY,x,x2);
SolRZ=subs(SolZ,x,x2);
EqLY=[char(vpa(SolLY,14)) '=' char(sym(y1))];
EqLZ=[char(vpa(SolLZ,14)) '=' char(sym(z1))];
EqRY=[char(vpa(SolRY,14)) '=' char(sym(y2))];
EqRZ=[char(vpa(SolRZ,14)) '=' char(sym(z2))];
disp('Граничні умови')
fprintf('%s\n',EqLY,EqLZ,EqRY,EqRZ)
% Рівняння для граничних умов
% Рівняння екстремалі
Con=solve(EqLY,EqLZ,EqRY,EqRZ,'C1,C2,C3,C4')
C1=Con.C1;
C2=Con.C2;
C3=Con.C3;
C4=Con.C4;
Sol3Y=vpa(eval(SolY),14);
Sol3Z=vpa(eval(SolZ),14);
disp('Рівняння екстремалі')
fprintf('y(x)=%s\nz(x)=%s\n',char(Sol3Y),char(Sol3Z))
% Рівняння екстремалі
% Значення функціонала
Fextr=simple(subs(F,{y,z,Dy,Dz},{Sol3Y,Sol3Z,diff(Sol3Y,x)
,diff(Sol3Z,x)}));
Jextr=eval(int(Fextr,x,x1,x2))
% Значення функціонала
% Графік екстремалі
xp1=linspace(x1,x2);
```

```
y3=subs(Sol3Y,x,xp1);
z3=subs(Sol3Z,x,xp1);
figure
plot(xp1,y3,'-r',xp1,z3,'--b')
%xlabel('\itx')
%ylabel('\ity\rm(\itx\rm)')
% Графік екстремалі
```

Після реалізації цієї програми маємо результат: графіки екстремалей (рис.4.2) і рівняння екстремалей.

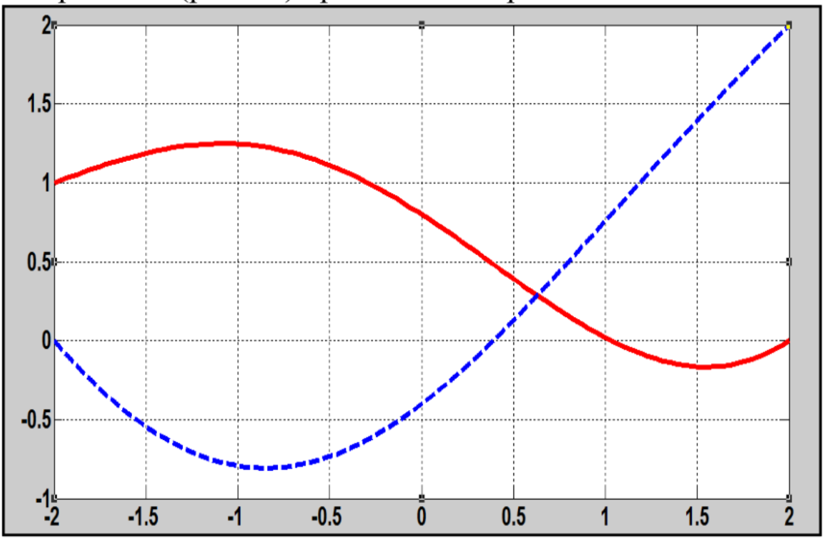

Рис. 4.2. Графіки екстремалей

Рівняння екстремалі

y(*x*)=exp(-*x*)*(0.13414090640925*exp(2*x*) + 0.6007494904306*exp(*x*)*cos(*x*) - 0.82481262772096*exp(*x*)*sin(*x*) + 0.065210765216307)

$z(x)$=exp(-x)*(0.13414090640925*exp(2x) - 0.6007494904306*exp(x)*cos(x) + 0.82481262772096*exp(x)*sin(x) + 0.065210765216307)

Порівнюючи одержані результати (рис.4.1 і рис. 4.2) робимо висновок, що маємо одні і ті самі криві.

Порядок виконання роботи

1. Вивчіть теоретичний матеріал. Дайте відповіді на контрольні запитання (письмово, до заняття).
2. Ознайомтесь з контрольним прикладом (до заняття). Перевірте самостійно виконання прикладу у системі MATLAB
3. Знайдіть аналітичний розв'язок пропонованої викладачем варіаційної задачі.
4. Знайдіть розв'язок пропонованої викладачем варіаційної задачі в системі MATLAB, скориставшись записаною вище програмою.
5. Оформіть звіт про виконання лабораторної роботи (Додаток В).

Варіанти завдань

1. $I[y,z]=\int\limits_0^1 (y'^2+z'^2+2y-zx^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $z(0)=0$, $z(1)=1$.

2. $I[y,z]=\int\limits_0^1 (y'z'+6yx+12zx^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $z(0)=0$, $z(1)=1$.

3. $I[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2+z'^2+2yz)dx$, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $z(0)=0$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

4. $I[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2-2yz)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\mathrm{sh}1$, $z(0)=0$, $z(1)=-\mathrm{sh}1$.

5. $I[y,z]=\int_0^1 (2y'z'+y^2+z^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\mathrm{sh}1$, $z(0)=0$, $z(1)=\mathrm{sh}1$.

6. $I[y,z]=\int_0^1 (y'z'+yz)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=e$, $z(0)=1$, $z(1)=e^{-1}$

7. $I[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'z'-yz)dx$, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $z(0)=0$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

8. $I[y,z]=\int_1^2 (y'^2+z'^2+z^2)dx$, $y(1)=1$, $y(2)=2$, $z(1)=0$, $z(2)=1$.

9. $I[y,z]=\int_0^1 (12yx+24zx^2+y'z')dx$, $y(0)=0$, $y(1)=2$, $z(0)=0$, $z(1)=2$.

10. $I[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2+2y)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=\frac{3}{2}$, $z(0)=0$, $z(1)=1$.

11. $I[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\mathrm{z}-4\mathrm{y}^2+y'^2-z'^2)dx$, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $z(0)=0$, $z\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

12. $I[y,z]=\int\limits_{-1}^{1}(-y'^2+\frac{z'^3}{3}+2xy)dx$, $y(-1)=2$, $y(1)=0$, $z(-1)=-1$, $z(1)=1$.

Відповіді (точні розв'язки): **1.** $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$, $z=-\frac{x^4}{24}+\frac{25x}{24}$. **2.** $y=x^4$, $z=x^3$. **3.** $y=\sin x$, $z=-\sin x$. **4.** $y=\operatorname{sh}x$, $z=-\operatorname{sh}x$. **5.** $y=\operatorname{sh}x$, $z=\operatorname{sh}x$. **6.** $y=e^x$, $z=e^{-x}$. **7.** $y=\sin x$, $z=-\sin x$. **8.** $y=x$, $z=\frac{e^x}{e^2-1}-\frac{e^{2-x}}{e^2-1}$. **9**. $y=2x^4$, $z=2x^3$. **10.** $y=\frac{x^2}{2}+1$, $z=x$. **11**. $y=\sin 2x$, $z=\frac{x^2}{2}+\frac{(32-\pi^2)x}{8\pi}$. **12**. $y=-\frac{x^3}{6}-\frac{5x}{6}+1$, $z=x$.

Лабораторна робота 5. Знаходження екстремалі функціонала, який залежить від однієї функції і похідних вищих порядків, в системі MATLAB

Мета роботи – удосконалення практичних навичок знаходження екстремалі функціонала, який залежить від однієї функції і похідних першого й другого порядків; розширення досвіду застосування програм комп'ютерної математики до розв'язування математичних задач.

Теоретичний матеріал

Розглянемо функціонал, який залежить від функції однієї змінної, її першої та другої похідних:

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')dx\,.$$

Сформулюємо ще одну варіаційну задачу:

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y',y'')dx \to extr\,,$$

$$y(x_1)=y_{10},\, y(x_2)=y_{20},\, y'(x_1)=y_{11},\, y'(x_2)=y_{21}$$

Зробимо зауваження щодо граничних умов. На відміну від попередніх варіаційних задач, тут для шуканої функції задані не тільки її значення на кінцях відрізка, а й значення похідної функції на кінцях заданого відрізка. А це означає, що клас допустимих функцій в цій: потрібно, щоб задані функції не тільки приймали на кінцях відрізка задані значення, а й мали заданий кут нахилу дотичних у цих точках.

Необхідною умовою існування екстремуму функціонала є, як і раніше, рівність нулю його варіації, яка обчислена на екстремалі:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$$

Записане рівняння називається *диференціальним рівнянням Ейлера-Пуассона.*

У загальному випадку це рівняння 4-го порядку. Дійсно, функція F та її похідні залежать від x, y, y', y'', а тому друга повна похідна включатиме у загальному випадку похідну 4-го порядку.

Контрольні запитання

1. Запишіть функціонал, який залежить від функції однієї змінної, її першої та другої похідних.
2. Запишіть граничні умови для цього функціонала. Що ці умови означають геометрично?
3. Запишіть необхідну умову існування екстремуму функціонала, який залежить від функції однієї змінної, її першої та другої похідних. Як цю умову називають?

Контрольний приклад

Приклад 5.1. Знайдіть екстремалі функціонала $I[y]=\int\limits_0^1 (y^2+2y'^2+y''^2)dx$, якщо $y(0)=0,\ y(1)=0,$ $y'(0)=1,\ y'(1)=-\operatorname{sh}1$: а) аналітично; б) за допомогою системи MATLAB. Порівняйте одержані розв'язки.

Розв'язання. а) $F(x,y,y',y'')=y^2+2y'^2+y''^2$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=4y'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''}=2y''$.

Тоді $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=\dfrac{d}{dx}(4y')=4y''$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right)=\dfrac{d^2}{dx^2}(2y'')=$ $=2y^{\mathrm{IV}}$. Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона: $2y-4y''+2y^{\mathrm{IV}}=0$ або $y^{\mathrm{IV}}-2y''+y=0$. Характеристичне рівняння $k^4-2k^2+1=0$, його розв'язки $k_1=k_2=1, k_3=k_4=-1$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y=\operatorname{sh}x(c_1x+c_2)+\operatorname{ch}x(c_3x+c_4).$$

(Вибрали таку форму запису, бо одна з граничних умов містить $\operatorname{sh}1$).

Знайдемо сталі, враховуючи граничні умови.

$y(0)=0 \Rightarrow c_4=0$, $\quad y(1)=0 \Rightarrow 0=\operatorname{sh}1(c_1+c_2)+c_3\operatorname{ch}1$. Ще дві граничні умови пов'язані з похідною, тому знайдемо похідну:

$$y'=\operatorname{ch}x(c_1x+c_2)+c_1\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}x(c_3x+c_4)+c_3\operatorname{ch}x \text{ або}$$

$$y'=\operatorname{sh}x(c_1+c_3x+c_4)+\operatorname{ch}x(c_1x+c_2+c_3).$$

Врахуємо, що $c_4=0$. Тоді

$$y'=\operatorname{sh}x(c_1+c_3x)+\operatorname{ch}x(c_1x+c_2+c_3)$$

$y'(0)=1 \Rightarrow 1=c_2+c_3$,

$y'(1)=-\operatorname{sh}1 \Rightarrow -\operatorname{sh}1=\operatorname{sh}1(c_1+c_3)+\operatorname{ch}1(c_1+c_2+c_3)$.

Складемо систему: $\begin{cases} c_4=0, \\ \operatorname{sh}1(c_1+c_2)+c_3\operatorname{ch}1=0, \\ c_2+c_3=1, \\ \operatorname{sh}1(c_1+c_3)+\operatorname{ch}1(c_1+c_2+c_3)=-\operatorname{sh}1. \end{cases}$

Розв'яжіть цю систему самостійно і отримайте результат:

$$c_1=-1,\ c_2=1,\ c_3=-1,\ c_4=0.$$

Тоді шукана екстремаль $y=(1-x)\operatorname{sh}x$ і вона єдина. Графік цієї екстремалі побудовано на рис. 5.1 (частина кривої від точки *A* до точки *B*).

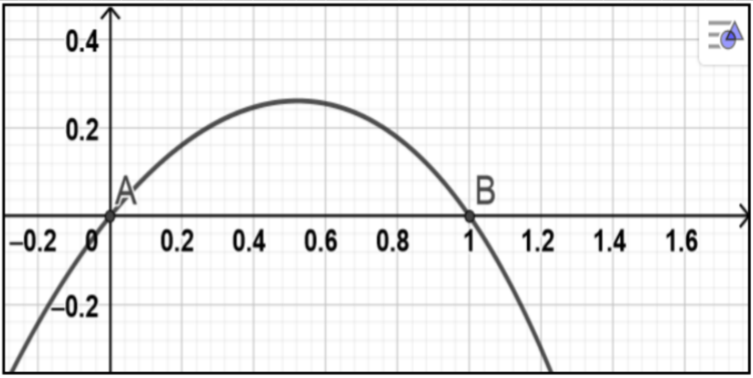

Рис. 5.1. Графік екстремалі $y=(1-x)\operatorname{sh} x$

б) Для розв'язування задачі за допомогою системи MATLAB напишемо програму.

```
script
clear all
% Знайти екстремаль функціонала
syms x y Dy D2y D3y D4y
F=D2y^2+2*Dy^2+y^2;
% підінтегральна функція
x1=0;%граничні умови
y1=0;%граничні умови
Dy1=1;%граничні умови
x2=1;%граничні умови
y2=0;%граничні умови
Dy2=-sinh(1);%граничні умови
%
dFdy=diff(F,y);
dFdy1=diff(F,Dy);
dFdy2=diff(F,D2y);
%
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x);
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y);
```

```
d_dFdy1_dy1=diff(dFdy1,Dy);
d_dFdy1_dy2=diff(dFdy1,D2y);
dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y+d
_dFdy1_dy2*D3y
%
d_dFdy2_dx=diff(dFdy2,x);
d_dFdy2_dy=diff(dFdy2,y);
d_dFdy2_dy1=diff(dFdy2,Dy);
d_dFdy2_dy2=diff(dFdy2,D2y);
%
dFy2dx=d_dFdy2_dx+d_dFdy2_dy*Dy+d_dFdy2_dy1*D2y+d
_dFdy2_dy2*D3y;
%
d_dFdy2dx_dx=diff(dFy2dx,x);
d_dFdy2dx_dy=diff(dFy2dx,y);
d_dFdy2dx_dy1=diff(dFy2dx,Dy);
d_dFdy2dx_dy2=diff(dFy2dx,D2y);
d_dFdy2dx_dy3=diff(dFy2dx,D3y);
d2Fy2dx2=d_dFdy2dx_dx+d_dFdy2dx_dy*Dy+d_dFdy2dx_d
y1*D2y;
d2Fy2dx2=d2Fy2dx2+d_dFdy2dx_dy2*D3y+d_dFdy2dx_dy3
*D4y;
d2Fy2dx2=2*D4y
fprintf('Fy"/dx=%s\n',char(dFy1dx))
fprintf('Fy"y"=%s\n',char(d_dFdy1_dy1))
%dFy'/dx=2*D2y
% Умова Лежандра
% Рівняння Ейлера-Пуасона
Euler=simple(dFdy-dFy1dx+d2Fy2dx2);
deqEuler=[char(Euler) '=0'];
fprintf('Рівняння Ейлера-Пуасона:\n%s\n',deqEuler)
% Рівняння Ейлера-Пуасона
% Розв'язок рівняння Ейлера-Пуасона
Sol=dsolve(deqEuler,'x');
```

```
if length(Sol)~=1
   error('Нема розв’язків');
else
   disp('розв’язок рівняння Ейлера-Пуасона');
   fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end
% Розв'язок рівняння Ейлера
% Рівняння для граничних умов
dydx=diff(Sol,x);
slY=subs(Sol,x,x1);
slDY=subs(dydx,x,x1);
srY=subs(Sol,x,x2);
srDY=subs(dydx,x,x2);
elY=[char(vpa(slY,14)) '=' char(sym(y1))];
elDY=[char(vpa(slDY,14)) '=' char(sym(Dy1))];
erY=[char(vpa(srY,14)) '=' char(sym(y2))];
erDY=[char(vpa(srDY,14)) '=' char(sym(Dy2))];
disp('Рівняння для граничних умов')
fprintf('%s\n',elY,elDY,erY,erDY)
% Рівняння для граничних умов
% Рівняння екстремалі
Con=solve(elY,elDY,erY,erDY,'C2,C3,C4,C5');
C5=Con.C5;
C2=Con.C2;
C3=Con.C3;
C4=Con.C4;
Sol4=vpa(eval(Sol),14);
disp('Рівняння екстремалі')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol4))
% Рівняння екстремалі
% Графік екстремалі
xp1=linspace(x1,x2);
y4=subs(Sol4,x,xp1);
figure
```

```
plot(xp1,y4,'-r')
xlabel('\itx')
ylabel('\ity\rm(\itx\rm)')
% Графік екстремалі
```

Після реалізації цієї програми маємо результат: графік екстремалі (рис.5.2)

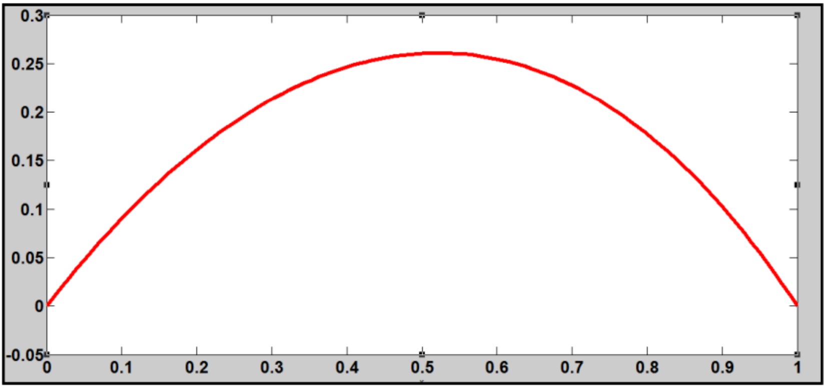

Рис. 5.2. Графік екстремалі

Порівнюючи одержані результати (рис.5.1 і рис. 5.2) робимо висновок, що в обох випадках маємо одну і ту саму криву.

Порядок виконання роботи

1. Вивчіть теоретичний матеріал. Дайте відповіді на контрольні запитання (письмово, до заняття).

2. Ознайомтесь з контрольним прикладом (до заняття). Перевірте самостійно виконання прикладу у системі MATLAB

3. Знайдіть аналітичний розв'язок пропонованої викладачем варіаційної задачі.

4. Знайдіть розв’язок пропонованої викладачем варіаційної задачі в системі MATLAB, скориставшись записаною вище програмою.

5. Оформіть звіт про виконання лабораторної роботи (Додаток В).

Варіанти завдань

1. $I[y]=\int_{-1}^{1}(2y'^2+yy'')dx$, $y(-1)=0$, $y(1)=2$, $y'(-1)=1$, $y'(1)=1$.

2. $I[y]=\int_{0}^{1}(5+3y''^2)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(0)=1$, $y'(1)=1$.

3. $I[y]=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(y''^2-y'^2+x^2)dx$, $y(0)=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'(0)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

4. $I[y]=\int_{-1}^{1}(7y''^2+5x^2+3)dx$, $y(-1)=0$, $y(1)=2$, $y'(-1)=1$, $y'(1)=5$.

5. $I[y]=\int_{0}^{2}(2yy''+y'^2+2\sin x)dx$, $y(0)=0$, $y(2)=2$, $y'(0)=1$, $y'(2)=1$.

6. $I[y]=\int_{0}^{1}(y''^2-16y^2+7x)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\operatorname{sh}2$, $y'(0)=2$, $y'(1)=2\operatorname{ch}2$.

7. $I[y]=\int\limits_0^1 (e^{-5x}y''^2+3\cos x)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=e^5$, $y'(0)=1$, $y'(1)=5e^5$.

8. $I\left[y\right]=\int\limits_0^1 \left(5y''^2+7\,\mathrm{arctg}\,x\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $y'(0)=0$, $y'(1)=0$.

9. $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3y''^2-3y^2+5xe^x)dx$, $y(0)=1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $y'(0)=0$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

10. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{4}y''^2-24y+5x^3\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=3$, $y'(0)=0$, $y'(1)=11$.

11. $I\left[y\right]=\int\limits_0^1 \left(3y'^2+3y''^2+5\,\mathrm{sh}\,x\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=\mathrm{ch}\,1$ $y'(0)=0$, $y'(1)=\mathrm{sh}\,1$.

12. $I[y]=\int\limits_0^2 (y''^2-3x^3)dx$, $y(0)=0$, $y(2)=6$, $y'(0)=1$, $y'(2)=5$.

Відповіді (точні розв'язки): **1.** $y=x+1$. **2.** $y=x$. **3.** $y=\cos x$. **4.** $y=x^3+x^2$. **5.** $y=x$. **6.** $y=\mathrm{sh}\,2x$. **7.** $y=xe^{5x}$. **8.** $y=-2x^3+3x^2$. **9.** $y=\cos x$. **10.** $y=2x^4+x^3$. **11**. $y=\mathrm{ch}\,x$. **12**. $y=x^2+x$.

Лабораторна робота 6. Умовний екстремум функціонала (ізопериметрична задача)

Мета роботи – удосконалення практичних навичок знаходження розв'язку ізопериметричної задачі варіаційного числення; розширення досвіду застосування програм комп'ютерної математики до розв'язування математичних задач.

Теоретичний матеріал

Означення 6.1. *Ізопериметричною задачею* у вузькому сенсі слова називається задача дослідження функціонала однієї або двох змінних (для плоскої або просторової кривої) за умови обмеження-рівності на довжину цієї кривої.

Наприклад, до таких задач відносяться задача Дідони, задача про якірний ланцюг.

Означення 6.2. *Ізопериметричною задачею* в широкому сенсі цього слова називається варіаційна задача

$$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx \to extr$$

$$y_1(x_1) = y_{11},\ y_1(x_2) = y_{12},\ y_2(x_1) = y_{21},\ y_2(x_2) = y_{22}, ..., y_n(x_1) = y_{n1},\ y_n(x_2) = y_{n2}.$$

за умови так званих ізопериметричних умов: обмежень-рівностей вигляду

$$\int_{x_1}^{x_2} F_j(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx = l_j = const,\ j = \overline{1, m}$$

Кількість таких умов може бути різною: менше, ніж n, стільки, як і n, навіть більше n.

Для розв'язування ізопериметричної задачі треба:

а) побудувати допоміжний функціонал

$$I^{**}[y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n', \lambda_1, ..., \lambda_m] =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') \right) dx$$

(всі множники Лагранжа є числами);

б) записати для допоміжного функціонала систему рівнянь Ейлера (або рівняння Ейлера) та розв'язати її;

в) знайти довільні сталі (їх буде $2n$ штук) і m множників Лагранжа з $2n$ граничних умов та m умов ізопериметричності.

Контрольні запитання

1. Дайте означення ізопериметричної задачі в щирокому сенсі слова.

2. Запишіть ізопериметричні умови. Скільки їх може бути в задачі

$$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') dx \to extr$$

$$y_1(x_1) = y_{11},\ y_1(x_2) = y_{12},\ y_2(x_1) = y_{21},\ y_2(x_2) = y_{22}, ..., y_n(x_1) = y_{n1},\ y_n(x_2) = y_{n2}.$$

3. Запишіть схему розв'язування ізопериметричної задачі.

Контрольний приклад

Приклад 6.1. Знайдіть екстремалі функціонала $I[y] = \int_{-1}^{1} (y^2 + y'^2 + x^2) dx$, якщо $y(-1) = 1,\ y(1) = 2,\ \int_{-1}^{1} y dx = 2$: а) аналітично (спочатку без ізопериметричної умови, потім з цією умовою); б) за допомогою системи MATLAB. Порівняйте одержані розв'язки.

Розв'язання. а) Розв'яжемо задачу без врахування ізопериметричної умови. Запишемо підінтегральну функцію $F(x, y, y') = y^2 + y'^2 + x^2$, тоді частинні похідні $\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 2y'$. Повна похідна по змінній x

від $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}$ матиме вигляд $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(2y'\right)=2y''$. Тоді диференціальне рівняння Ейлера $2y-2y''=0$. Після спрощення $y''-y=0$. Відповідне характеристичне рівняння $k^2-1=0$, його корені $k_1=1,\ k_2=-1$. Тоді загальний розв'язок $y=c_3\operatorname{sh}x+c_4\operatorname{ch}x$. Врахуємо граничні умови (ізопериметричну умову не враховуємо). Оскільки $y(-1)=1,\ y(1)=2,$ то маємо систему $\begin{cases}-c_3\operatorname{sh}1+c_4\operatorname{ch}1=1,\\ c_3\operatorname{sh}1+c_4\operatorname{ch}1=2.\end{cases}$

Її розв'язок $c_3=\frac{1}{2\operatorname{sh}1},\ c_4=\frac{3}{2\operatorname{ch}1}$. Тоді шукана екстремаль $y=\frac{1}{2\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}x+\frac{3}{2\operatorname{ch}1}\operatorname{ch}x$ (її графік зображено на рис. 6.1 як частина кривої **1** від точки *A* до точки *B*).

Розглянемо допоміжний функціонал $I^{**}[y]=\int_{-1}^{1}(y^2+y'^2+x^2+\lambda y)dx$, тоді функція $F^*(x,y,y',\lambda)=y^2+y'^2+x^2+\lambda y$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\frac{\partial F^*}{\partial y}=2y+\lambda$, $\frac{\partial F^*}{\partial y'}=2y'$. Тоді $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}(2y')=2y''$. Запишемо рівняння Ейлера: $2y+\lambda-2y''=0$ або $y''-y=\frac{\lambda}{2}$. Відповідне однорідне рівняння $y''-y=0$ і його розв'язок $y_{зо}=c_1\operatorname{sh}x+c_2\operatorname{ch}x$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{чн}=-\frac{\lambda}{2}$. Загальний розв'язок рівняння Ейлера має вигляд

$$y_{зо} = c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x - \frac{\lambda}{2}.$$

Врахуємо умову ізопериметричності $\int_{-1}^{1} y dx = 2$.

Матимемо $\int_{-1}^{1} \left(c_1 \operatorname{sh} x + c_2 \operatorname{ch} x - \frac{\lambda}{2} \right) dx = 2$ або $\left. \left(c_1 \operatorname{ch} x + c_2 \operatorname{sh} x - \frac{\lambda}{2} x \right) \right|_{-1}^{1} = 2$. Після підстановки меж інтегрування і спрощення одержимо $2c_2 \operatorname{sh} 1 - \lambda = 2$. З граничних умов: $y(-1) = 1 \Rightarrow -c_1 \operatorname{sh} 1 + c_2 \operatorname{ch} 1 - \frac{\lambda}{2} = 1$, $y(1) = 2 \Rightarrow c_1 \operatorname{sh} 1 + c_2 \operatorname{ch} 1 - \frac{\lambda}{2} = 2$. Складемо систему:

$$\begin{cases} 2c_2 \operatorname{sh} 1 - \lambda = 2, \\ -c_1 \operatorname{sh} 1 + c_2 \operatorname{ch} 1 - \dfrac{\lambda}{2} = 1, \\ c_1 \operatorname{sh} 1 + c_2 \operatorname{ch} 1 - \dfrac{\lambda}{2} = 2. \end{cases}$$

Її розв’язок $\lambda = \frac{e^2 - 5}{2}$, $c_1 = \frac{e}{e^2 - 1}$, $c_2 = \frac{e}{2}$. Тоді шукана екстремаль $y = \frac{e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} x + \frac{e}{2} \operatorname{ch} x - \frac{e^2 - 5}{4}$ (її графік зображено на рис. 6.1 як частина кривої **2** від точки *A* до точки *B*).

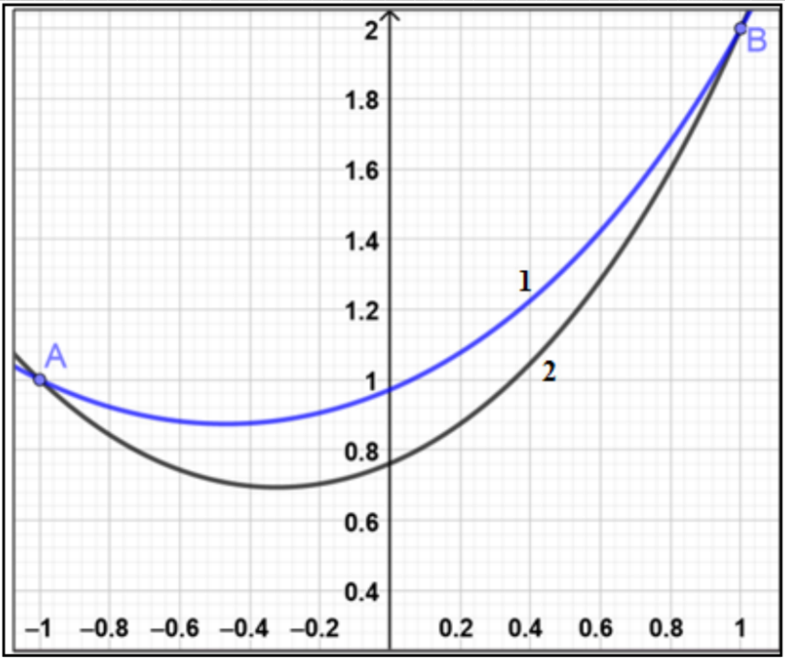

Рис. 6.1. Графіки екстремалей: **1 -** $y = \dfrac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\mathrm{sh}\,x + \dfrac{3}{2\,\mathrm{ch}\,1}\mathrm{ch}\,x$,

2 - $y = \dfrac{e}{e^2-1}\mathrm{sh}\,x + \dfrac{e}{2}\mathrm{ch}\,x - \dfrac{e^2-5}{4}$

б) Для розв’язування задачі за допомогою системи MATLAB напишемо програму.

```
script
clear all
% Знайти екстремаль функціонала
syms x y Dy D2y lambda
F=x^2+y^2+Dy^2;% підінтегральна функція
x1=-1;%граничні умови
y1=1;%граничні умови
```

```
x2=1;%граничні умови
y2=2;%граничні умови
F1=y;
J1=2;
% частинні похідні
dFdy=diff(F,y);
dFdy1=diff(F,Dy);
fprintf('Fy=%s\n',char(dFdy))
fprintf('Fy''=%s\n',char(dFdy1))
% частинні похідні
% Умова Лежандра
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x);
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y);
d_dFdy1_dy1=diff(dFdy1,Dy);
dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y;
fprintf('Fy''/dx=%s\n',char(dFy1dx))
fprintf('Fy''y''=%s\n',char(d_dFdy1_dy1))
%dFy'/dx=2*D2y
% Умова Лежандра
% Рівняння Ейлера
Euler=simple(dFdy-dFy1dx);
deqEuler=[char(Euler) '=0'];
fprintf('Рівняння Ейлера:\n%s\n',deqEuler)
% Рівняння Ейлера
% Розв'язок рівняння Ейлера
Sol=dsolve(deqEuler,'x');
if length(Sol)~=1
   error('Нема розв'язків');
else
   disp('розв'язок рівняння Ейлера');
   fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end
% Розв'язок рівняння Ейлера
% Рівняння для граничних умов
```

```
SolLeft=subs(Sol,x,x1);
SolRight=subs(Sol,x,x2);
EqLeft=[char(SolLeft) '=' char(sym(y1))];
EqRight=[char(SolRight) '=' char(sym(y2))];
disp('Рівняння для граничних умов')
fprintf('%s\n',EqLeft,EqRight)
% Рівняння для граничних умов
% Рівняння екстремалі
Con=solve(EqLeft,EqRight,'C3,C2')
C3=Con.C3
C2=Con.C2
Sol21=vpa(eval(Sol),14);
disp('Рівняння екстремалі')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol21))
% Рівняння екстремалі
% Значення функціонала
Fextr=subs(F,{y,Dy},{Sol21,diff(Sol21,x)});
Jextr=eval(int(Fextr,x,x1,x2))
% Значення функціонала
% Графік екстремалі
xp1=linspace(x1,x2);
y21=subs(Sol21,x,xp1);
%figure
%plot(xp1,y21,'-r')
%xlabel('\itx')
%ylabel('\ity\rm(\itx\rm)')
% Графік екстремалі
%
L=F+lambda*F1; % vjlbasrjdfybq aeyrwsjyfk
fprintf('L(x,y,y'',lambda)=%s\n',char(L))
dLdy=diff(L,y);
dLdy1=diff(L,Dy);
d_dLdy1_dx=diff(dLdy1,x);
d_dLdy1_dy=diff(dLdy1,y);
```

```
d_dLdy1_dy1=diff(dLdy1,Dy); %d(dL/dy')dy'
dLy1dx=d_dLdy1_dx+d_dLdy1_dy*Dy+d_dLdy1_dy1*D2y;
EulerL=simple(dLdy-dLy1dx);
deqEulerL=[char(EulerL) '=0'];% склали рівняння
fprintf('Рівняння Ейлера: \n%s\n', deqEulerL)
SolL=dsolve(deqEulerL,'x');% розв’язок рівняння Ейлера
if length(SolL)~=1 % нема розв’язків
   error('нема розв’язків або більше одного розв’язку')
else
   disp('загальний розв’язок')
   fprintf('y(x)=%s\n',char(SolL))
end;
dydx=diff(SolL,x);
F1_y=subs(F1,{y,Dy},{SolL,dydx});
intF1=vpa(int(F1_y,x,x1,x2),14); % обчислили інтеграл
disp(char(intF1))
% формування системи, розв’язок і знаходження сталих і
множника Лагранжа
SolLleft=vpa(subs(SolL,x,x1),14);
SolLright=vpa(subs(SolL,x,x2),14);
LeftL=[char(SolLleft) '=' char(sym(y1))];
RightL=[char(SolLright) '=' char(sym(y2))];
intF1J1=[char(intF1) '=' char(sym(J1))];
disp('система рівнянь відносно C1, C2, lambda')
fprintf('%s\n',LeftL,RightL,intF1J1)
ConL=solve(LeftL,RightL,intF1J1,'C5,C6,lambda');
C5=vpa(ConL.C5,14);
C6=vpa(ConL.C6,14);
lambda=vpa(ConL.lambda,14); % множник Лагранжа
Sol141=vpa(eval(SolL),14); % аналітичний розв’язок
disp('рівняння екстремалі')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol141))
disp('множник Лагранжа')
fprintf('lambda=%s\n',char(lambda))
```

```
%
F21=subs(F,{y,Dy},{Sol21,diff(Sol21,x)});
J21=eval(int(F21,x,x1,x2));
F141=subs(F,{y,Dy},{Sol141,diff(Sol141,x)});
J141=eval(int(F141,x,x1,x2))
y141=subs(Sol141,x,xp1);
plot(xp1,y21,'--b',xp1,y141,'-r')
```

Після реалізації цієї програми маємо результат: графіки екстремалей (рис.6.2) і рівняння екстремалей.

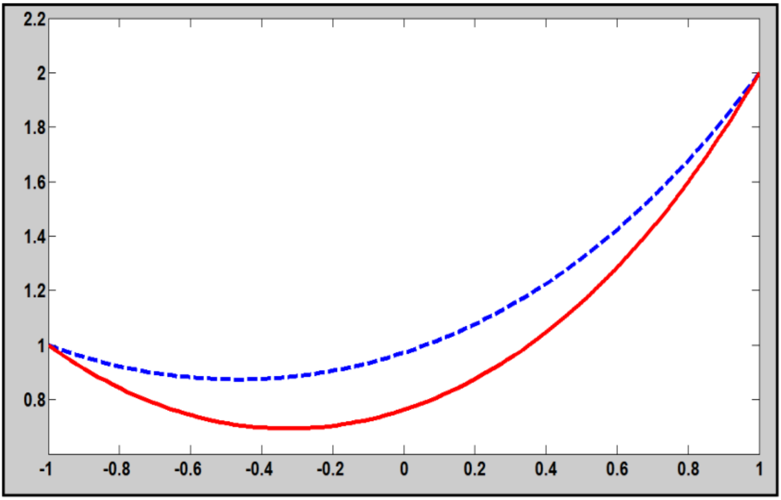

Рис. 6.2. Графіки екстремалей

Рівняння екстремалей:

$y(x)$=0.69877023730774exp(x) + 0.27331117318808exp(-x) – без ізопериметричної умови, на рис. 6.2 це крива, зображена синім кольором (пунктир);

$y(x)$=0.89229998917464exp(x) + 0.46684092505497exp(-x) - 0.59726402473276 – з ізопериметричною умовою, на рис. 6.2 це крива, зображена червоним кольором (суцільна).

Порівняємо розв'язки, одержані аналітично і за допомогою системи MATLAB. Для цього обчислимо значення екстремалей в кількох точках (табл. 6.1). Як бачимо, значення відповідних екстремалей у відповідних точках співпадають.

Порядок виконання роботи

1. Вивчіть теоретичний матеріал. Дайте відповіді на контрольні запитання (письмово, до заняття).

2. Ознайомтесь з контрольним прикладом (до заняття). Перевірте самостійно виконання прикладу у системі MATLAB

3. Знайдіть аналітичний розв'язок пропонованої викладачем варіаційної задачі: а) без ізопериметричної умови; б) з ізопериметричною умовою.

4. Знайдіть розв'язок пропонованої викладачем варіаційної задачі в системі MATLAB, скориставшись записаною вище програмою.

5. Оформіть звіт про виконання лабораторної роботи (Додаток В).

Варіанти завдань

1. $I[y]=\int_0^1 (y'^2+5\sin x)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$, $\int_0^1 ydx=1$.

2. $I[y]=\int_{-1}^0 (y'^2+\arcsin x)dx$, $y(-1)=-1$, $y(0)=0$, $\int_{-1}^0 ydx=1$.

3. $I[y]=\int_0^1 (y'^2+e^{-2x})dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $\int_0^1 ydx=1$.

4. $I[y]=\int_{-2}^0 (y'^2+\sin 3x)dx$, $y(-2)=0$, $y(0)=2$, $\int_{-2}^0 ydx=3$.

5. $I[y]=\int_0^2 \left(y'^2+\arccos\frac{x}{2}\right)dx$, $y(0)=-1$, $y(2)=1$, $\int_0^2 ydx=3$.

Таблиця 6.1

Порівняння розв'язків

	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y=\frac{1}{2\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}x+\frac{3}{2\operatorname{ch}1}\operatorname{ch}x$	1	0.92	0.88	0.88	0.91	0.97	1.08	1.23	1.42	1.68	2
$y(x)$=0.69877…exp(x) + 0.27331…exp(-x)	1	0.92	0.88	0.88	0.91	0.97	1.08	1.23	1.42	1.68	2
$y=\frac{e}{e^2-1}\operatorname{sh}x+\frac{e}{2}\operatorname{ch}x-\frac{e^2-5}{4}$	1	0.84	0.74	0.70	0.70	0.76	0.87	1.05	1.28	1.60	2
$y(x)$=0.89229…exp(x) + 0.46684exp(-x) - 0.59726…	1	0.84	0.74	0.70	0.70	0.76	0.87	1.05	1.28	1.60	2

6. $I[y]=\int_0^{\pi}(y'^2+3\cos 4x)dx$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, $\int_0^{\pi} ydx=\pi^2$.

7. $I[y]=\int_{-1}^{0}(y'^2+9^x)dx$, $y(-1)=1$, $y(0)=4$, $\int_{-1}^{0} ydx=8$.

8. $I[y]=\int_{-1}^{1}(y'^2-\ln(x+3))dx$, $y(-1)=-1$, $y(1)=1$, $\int_{-1}^{1} ydx=1$.

9. $I[y]=\int_0^{1}(y'^2-3\cos 7x)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $\int_0^{1} ydx=5$.

10. $I[y]=\int_{-1}^{0}(y'^2-5e^{x^2})dx$, $y(-1)=0$, $y(0)=-1$, $\int_{-1}^{0} ydx=7$.

11. $I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2-7\cos 4x)dx$, $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydx=\frac{\pi^2}{4}$.

12. $I[y]=\int_0^{1}\left(y'^2+2\arccos 4x\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=0$, $\int_0^{1} ydx=12$.

Відповіді (точні розв'язки): **1.** а) $y=0$; б) $y=-6x^2+6x$. **2.** а) $y=x$; б) $y=-9x^2-8x$. **3.** а) $y=x$; б) $y=-3x^2+4x$. **4.** а) $y=x+2$; б) $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$. **5.** а) $y=x-1$; б) $y=-\frac{9}{4}x^2+\frac{11}{2}x-1$. **6.** а) $y=0$; б) $y=-\frac{6}{\pi}x^2+6x$. **7.** а) $y=3x+4$; б) $y=-33x^2-30x+4$. **8.** а) $y=x$; б) $y=-\frac{3}{4}x^2+x+\frac{3}{4}$. **9**. а) $y=x$; б) $y=-27x^2+28x$. **10.** а) $y=-x-1$; б) $y=-39x^2-38x+1$. **11**. а) $y=x$; б) $y=-\frac{6}{\pi}x^2+4x$. **12**. а) $y=-x+1$; б) $y=-69x^2+68x+1$.

Додаток А
Таблиця похідних основних елементарних функцій й правила диференціювання

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c, c – стала	0	$\cos x$	$-\sin x$
$x^k,\ k\in R$	kx^{k-1}	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{\log_a e}{x}$		

Правила диференціювання

Нехай $u=u(x), v=v(x)$ – диференційовні в точці x функції. Тоді функції

$u(x)+v(x), u(x)-v(x), u(x)\cdot v(x), \dfrac{u(x)}{v(x)}, (v(x)\neq 0)$ також диференційовні в точці x і виконуються рівності

$$\big(u(x)+v(x)\big)'=u'(x)+v'(x)$$

$$\big(u(x)-v(x)\big)'=u'(x)-v'(x)$$

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}, (v(x)\neq 0)$$

Похідна складеної функції

Якщо функція $\varphi(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $f(u)$ – похідну в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ також має похідну в точці x_0 і $y'(x_0)=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)$.

Додаток Б
Таблиця основних інтегралів і методи інтегрування

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1)$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$
8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + c$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + c$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + c$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Основні методи інтегрування (визначений інтеграл)

1. Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $f \in C([a;b]), F(x) -$ первісна функції $y = f(x)$.

2. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де $f \in C([a;b]), \varphi \in C([\alpha;\beta]), a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$.

3. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

де $u \in C_1([a;b]), v \in C_1([a;b])$.

Додаток В
Вимоги до оформлення звіту

Звіт має обов'язково містити:

- назву лабораторної роботи;
- дату виконання роботи;
- прізвище та ініціали студента;
- шифр групи;
- мету лабораторної роботи;
- конспект теоретичного матеріалу;
- відповіді на контрольні запитання;
- детальний аналітичний розв’язок задачі;
- листинг програми, що використовувалася;
- оформлені у вигляді графіків та рисунків результати;
- аналіз отриманих результатів;
- висновки за результатами роботи;
- список використаної літератури.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ Й ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення : навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. Одеса : Астропринт, 2005. 128 с.

2. Адамян В. М., Сушко М. Я. Вступ до математичної фізики. Варіаційне числення та крайові задачі : навч. посіб. для студентів фіз. та інж.-фіз. спец. ВНЗ Одеса : Астропринт, 2014. 376 с.

3. Ващук Ф. Г., Лавер О. Г., Шумило Н. Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. К.: Знання, 2008. 368 с.

4. Вірченко Н. О. Нариси з методики викладання вищої математики. К. : ТОВ «Задруга», 2006. 396 с.

5. Гаращенко Ф. Г., Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., Харченко І. І. Диференціальні рівняння, варіаційне числення та їх застосування : навч. посіб. К. : Київський ун-т, 2015. 271 с.

6. Дубовик В.П., Юрик І. І. .Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. 4-те вид. К.. : Ігнатекс-Україна., 2013. 648 с:

7. Кугай Н. В. Застосування методів інтерактивного навчання для формування методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики. *Вища школа.* 2017. № 11. С. 33-41

8. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків : ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.

9. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Підготовка майбутніх учителів математики: методологічний аспект : монографія. Харків : ФОП Панов А. М., 2020. 522 с.

10. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Основи варіаційного числення (курс лекцій) : навчальний посібник. Харків, 2022. 157 с

11. Кугай Н. В., Калініченко М. М. Формування методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики у процесі навчання дисципліни "Методи оптимізації". *Вища школа : наук.-практ. вид*. 2018. № 1. С. 55-71.

12. Кугай Н. В., Калініченко М. М., Прокопець Т. О. Застосування комп’ютерних математичних засобів для формування методологічних знань і вмінь майбутніх учителів математики. *Фізико-математична освіта :*науковий журнал. Вип. 4 (14). Суми, 2017. Т.1. С. 48-52.

13. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. 380 с.

14. Овчинников П. П., Михайленко В. М. Вища математика: підручник. У 2 ч. К. : Техніка, 2004. Ч. 2. 792 с.

15. Перестюк М. О., Станжицький О. М., Капустян О. В., Ловейкін Ю. В. Варіаційне числення та методи оптимізації. К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. 144 с.

16. Піддубний О. М., Харкевич Ю. І. Варіаційне числення та методи оптимізації : підручник. Луцьк : Гадяк Ж. В., 2015. 331 с

17. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння : Підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. К. : Либідь, 2003. 600 с.

18. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник для студ. педагогічних навчальних закладів: у 2-х ч. 2-ге вид., перероб. і допов. К.: Вища школа, Ч. І. 1994. 423 с.; Ч. 2. 1995. 509 с.

19. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. Навчальний посібник. К.: Техніка, 2003. 368 с.

20. Fox C. An Introduction to the Calculus of Variations. Dover, 1987.

21. Introduction to the calculus of variations. The Open University. URL: https://www.open.edu/openlearn/pluginfile.php/1118521/mod_resource/content/3/Introduction%20to%20the%20calculus%20of%20variations_ms327.pdf

22. Сторінка MATLAB на сайті The MathWorks [Електронний ресурс]. Режим доступу : URL : http://www.mathworks.com/

КУГАЙ Наталія Василівна
КАЛІНІЧЕНКО Микола Миколайович

ОСНОВИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ
(практикум)

Навчально-методичний посібник

Підписано до друку 03.11.2023 р.
Формат 60 ×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура «Time New Roman». Друк – лазерний.
Ум.-друк. арк. 9,91. Обл.-вид. арк. 10,21.
Наклад 300 прим. Вид. № 665. Зам. № 700

Видавець: **ФОП Панов А. М.**
Свідоцтво серії ДК №4847 від 06.02.2015 р.

Надруковано в типографії
ТОВ «Цифрова типографія»
м. Харків, вул. Данилевського, 30.