

ЗОБРАЖЕННЯ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Програма курсу за вибором для учнів 11 класів математичного та фізико-математичного профілів

(можна рекомендувати використовувати також і в класах з поглибленим вивченням математики)

Автори: *Кугай Наталя Василівна, доцент кафедри математики та методики викладання Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка, кандидат педагогічних наук;*

Заїка Оксана Володимирівна, асистент кафедри математики та методики викладання Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета даного курсу — ознайомити учнів з деякими фактами та методами проективної геометрії, допомогти оволодіти правилами виконання зображень просторових фігур на площині та методами розв'язування задач на побудову перерізів, розвинути просторове мислення, виявити та розвинути математичні здібності учнів.

Основні завдання курсу:

- ознайомити учнів з основними вимогами, що висуваються до зображень; з правилами зображення плоских та просторових фігур на площині; з афінним та проективним перетвореннями;
- сформувані вміння виконувати зображення плоских і просторових фігур на площині; застосовувати елементи проективної геометрії до розв'язування задач евклідової геометрії (зокрема, на побудову перерізів просторових тіл);
- поглибити знання шкільного курсу стереометрії;
- забезпечити свідоме оволодіння учнями систематичними знаннями, вміннями і навичками, необхідними в повсякденному житті та трудовій діяльності, достатніми для вивчення суміжних дисциплін та продовження навчання;
- розвивати просторову уяву, формувати в учнів інтерес до математики;
- сприяти профорієнтації на майбутні професії, пов'язані з математикою;
- підготувати учнів до успішного навчання у вищих навчальних закладах.

Курс складається з двох розділів. У першому розділі розкриваються поняття, пов'язані із зображеннями: вимоги до зображень; центральне та паралельне проектування як методи утворення зображення; правила зображення плоских і просторових фігур на площині. Другий розділ містить поняття проєктивної геометрії: афінне та афінно-перспективне перетворення, проєктивне перетворення, поняття, які найчастіше використовуються для розв'язування задач на побудову за допомогою одної лінійки, зокрема на побудову перерізів просторового тіла.

Початковими знаннями, необхідними для вивчення курсу, є основи стереометрії (теореми про прямі та площини) та поняття геометричних перетворень. Матеріал першого розділу — це узагальнення, систематизація та поглиблення матеріалу, з яким учні знайомі з 10-го класу.

Під час проведення занять можна використовувати стереоскопічні набори, програмні засоби: GRAN, KOMPAS 3D, Derive, EUREKA, Maple, MathCad, Mathematica та ін. При цьому комп'ютер може використовуватись не лише для демонстрації виконання побудов, а й для стимулювання детального вивчення теоретичних питань, розвитку просторової уяви під час розв'язування задач засобами комп'ютерної графіки.

Курс розрахований на 35 годин навчального часу.

РОЗПОДІЛ НАВЧАЛЬНОГО ЧАСУ

№ з/п	Тема	Кількість годин
Розділ 1. Зображення		10
1	Зображення та наука про них. Вимоги до зображень	2
2	Методи зображення: центральне та паралельне проектування, їх властивості	2
3	Проекції кола. Конічні перерізи	2
4	Зображення плоских і просторових фігур на площині	4
Розділ 2. Перетворення		25
5	Поняття перетворення. Інваріанти перетворення	1
6	Афінна та перспективно-афінна відповідність	2
7	Визначеність зображення	1
8	Проєктивне (перспективне) перетворення, його властивості	1
9	Осьова та центральна колінеація, гомологія	2
10	Принципи двоїстості	1

№ з/п	Тема	Кількість годин
11	Деякі окремі випадки гомології	2
12	Теорема Дезарга	2
13	Поняття повного чотиривершинника та гармонічної четвірки точок	2
14	Задачі з недосяжними елементами	4
15	Побудова перерізів просторових фігур методом слідів і внутрішнього проектування	4
16	Узагальнення і систематизація вивченого матеріалу	3
	РАЗОМ	35

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ТА ВИМОГИ ДО НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
10	Розділ 1. Зображення	
2	<p>Тема 1. Зображення та наука про них. Вимоги до зображень</p> <p>Поняття зображення. Демонстрація картин чи рисунків, виконаних із дотриманням усіх вимог до зображення та з їх порушенням.</p> <p>Основні вимоги до зображення: правильність, наочність, вимірність, простота у побудові, повнота й метрична визначеність.</p> <p>Умови, які має задовольняти зображення для того, щоб бути правильним, наочним, вимірним, повним і метрично визначеним.</p> <p>Правильні, наочні, вимірні, прості, повні, метрично визначені, оборотні, умовні зображення, їх приклади.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>наводить приклади</i> правильно виконаного зображення і зображення з помилками; • <i>пояснює</i> основні вимоги до зображення: правильність, наочність, вимірність, простота у побудові, повнота й метрична визначеність; умови, яким має задовольняти зображення для того, щоб бути правильним, наочним, вимірним, повним та метрично визначеним; • <i>розрізняє</i> правильні, наочні, вимірні, прості, повні, метрично визначені, оборотні, умовні зображення.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
2	<p>Тема 2. Методи зображення: центральне та паралельне проєктування, їх властивості</p> <p>Означення центрального та паралельного проєктування, їх приклади. Властивості центрального та паралельного проєктування, їх порівняння. Побудова зображень фігур при центральному та паралельному проєктуванні.</p> <p>Розв'язування задач на побудову центральних і паралельних проєкцій фігур.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> означення центрального та паралельного проєктування; • <i>наводить приклади</i> центрального та паралельного проєктування; • <i>характеризує</i> центральне та паралельне проєктування; • <i>описує</i> побудову зображень фігур при центральному та паралельному проєктуванні; • <i>пояснює</i> властивості центрального та паралельного проєктування; • <i>розв'язує</i> задачі на побудову зображень фігур в центральній та паралельній проєкціях.
2	<p>Тема 3. Проекції кола. Конічні перерізи</p> <p>Лабораторна робота з отримання тіні кола при центральному та паралельному проєктуванні.</p> <p>Історія дослідження конічних перерізів.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>наводить приклади</i> проєкцій кола при центральному та паралельному проєктуванні; • <i>описує</i> утворення проєкцій кола при центральному та паралельному проєктуванні; • <i>пояснює</i> утворення зображення кола в центральній проєкції; • <i>розв'язує</i> задачі на утворення зображення кола при різних положеннях кола та центра проєктування.
4	<p>Тема 4. Зображення плоских і просторових фігур на площині</p> <p>Теорема, що лежать в основі теорії зображення плоских і просторових фігур.</p> <p>Правила виконання зображень плоских і просторових фігур.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>називає</i> правила виконання зображень плоских і просторових фігур; • <i>наводить приклади</i> правильного та неправильного виконання зображення плоских і просторових фігур;

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
	<p>Виконання зображень трикутника, квадрата, паралелограма, трапеції та кола на площині.</p> <p>Виконання зображень правильних п'ятикутника, шестикутника, восьмикутника; правильних трикутника, чотирикутника, шестикутника, вписаних і описаних навколо кола.</p> <p>Виконання зображень правильної призми, піраміди, конуса, циліндра, кулі та їх комбінацій на площині.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>описує</i> кроки виконання зображення плоских і просторових фігур; • <i>пояснює</i> правила виконання зображення плоских і просторових фігур; • <i>розв'язує</i> задачі на зображення правильних многокутників, кола та їх комбінацій; многогранників, тіл обертання та їх комбінацій.
25	Розділ 2. Перетворення	
1	<p>Тема 5. Поняття перетворення. Інваріанти перетворення</p> <p>Поняття перетворення, перетворення «в», «на», взаємно однозначні перетворення та їх приклади. Геометричні перетворення: симетрія відносно точки, прямої; поворот, паралельне перенесення, гомотетія, перетворення подібності, рух, їхні властивості. Поняття інваріанта, приклади. Виконання геометричних перетворень. Розв'язування задач на використання геометричних перетворень.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>називає</i> основні геометричні перетворення, їхні означення та властивості, інваріанти; • <i>наводить приклади</i> геометричних перетворень; • <i>характеризує</i> основні геометричні перетворення; • <i>описує</i> кроки виконання геометричних перетворень; • <i>розв'язує</i> задачі на використання геометричних перетворень.
2	<p>Тема 6. Афінна та перспективно-афінна відповідність</p> <p>Означення афінної та перспективно-афінної відповідності, приклади.</p> <p>Властивості та інваріанти афінної та перспективно-афінної відповідності. Кроки побудови образів точки, прямої в афінній та перспективно-афінній відповідності.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> означення афінної та перспективно-афінної відповідності; • <i>наводить приклади</i> афінної та перспективно-афінної відповідності; • <i>характеризує</i> властивості та інваріанти афінної та перспективно-афінної відповідності;

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
	Задачі на побудову образів різних фігур в афінній та перспективно-афінній відповідності.	<ul style="list-style-type: none"> • <i>описує</i> кроки побудови образів точки, прямої в афінній та перспективно-афінній відповідності; • <i>пояснює</i> етапи побудови образів точки, прямої в афінній та перспективно-афінній відповідності; • <i>розв'язує</i> задачі на побудову образів різних фігур в афінній та перспективно-афінній відповідності.
1	<p>Тема 7. Визначеність зображення</p> <p>Умови визначеності зображення. Метрично визначені зображення. Розв'язування задач.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>називає</i> умови визначеності зображення; • <i>наводить приклади</i> метрично визначених зображень; • <i>характеризує</i> метрично визначені зображення.
1	<p>Тема 8. Проективне (перспективне) перетворення, його властивості</p> <p>Означення проективної відповідності, невласних елементів, геометричних образів першого ступеня (прямолінійний ряд, пучок прямих).</p> <p>Властивості та інваріанти проективної відповідності.</p> <p>Проективні та перспективні елементи.</p> <p>Операція перерізу та проектування в евклідовій площині.</p> <p>Побудова образів точки, прямої в проективній відповідності.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> означення проективної відповідності, невласних елементів; • <i>називає</i> проективні та перспективні елементи; • <i>наводить приклади</i> проективної відповідності; • <i>характеризує</i> властивості та інваріанти проективного перетворення; • <i>описує</i> кроки побудови образів точки, прямої у проективній відповідності; • <i>пояснює</i> етапи побудови образів точки, прямої у проективній відповідності; • <i>розв'язує</i> задачі на побудову образів різних фігур у проективній відповідності.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
2	<p>Тема 9. Осьова та центральна колінеація, гомологія</p> <p>Означення колінеації, її види: осьова та центральна колінеація; означення гомології, поняття параболічної (особливої) та гіперболічної гомології, їх приклади. Властивості колінеації. Умови задання гомології, її властивості. Побудова відповідних елементів в гомології.</p> <p>Розв'язування задач із використанням поняття гомології.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> означення колінеації, її видів: осьової та центральної; означення гомології, її властивості; • <i>наводить приклади</i> колінеацій, гомологій; • <i>характеризує</i> основні властивості колінеацій; • <i>описує</i> кроки побудови відповідних елементів в гомології; • <i>пояснює</i> побудову відповідних елементів в гомології; • <i>розв'язує</i> задачі на побудову відповідних елементів в гомології.
1	<p>Тема 10. Принципи двоїстості</p> <p>Малий і великий принципи двоїстості. Приклади використання принципів двоїстості. Розв'язування задач із використанням принципів двоїстості.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> малий та великий принципи двоїстості; • <i>наводить приклади</i> використання принципів двоїстості; • <i>пояснює</i> використання принципів двоїстості; • <i>розв'язує</i> задачі з використанням принципів двоїстості.
2	<p>Тема 11. Деякі окремі випадки гомології</p> <p>Гіперболічна гомологія з нескінченно віддаленою віссю (перетворення подібності). Параболічна гомологія з нескінченно віддаленою віссю (прямолінійне перенесення, тобто рух). Гіперболічна гомологія з нескінченно віддаленим центром (розтяг). Параболічна гомологія з нескінченно віддаленим центром (зсув). Побудова відповідних елементів при окремих випадках гомології.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>виділяє</i> окремі випадки гомології; • <i>наводить приклади</i> окремих випадків гомології; • <i>характеризує</i> зв'язок між окремими випадками гомології та геометричними перетвореннями евклідової геометрії; • <i>описує</i> побудову відповідних елементів при окремих випадках гомології; • <i>розв'язує</i> задачі на побудову відповідних елементів при окремих випадках гомології.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
2	<p>Тема 12. Теорема Дезарга</p> <p>Пряма та обернена теореми Дезарга. Конфігурація Дезарга, її властивості, гомологічні трикутники. Кроки знаходження гомологічних трикутників. Можливості використання теорем Дезарга. Розв'язування задач на доведення та побудову з використанням теорем Дезарга.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • формулює пряму та обернену теореми Дезарга; • наводить приклади гомологічних трикутників; • характеризує конфігурацію Дезарга та її властивості; • описує кроки знаходження гомологічних трикутників; • пояснює можливості використання теорем Дезарга; • розв'язує задачі на доведення та побудову з використанням теорем Дезарга.
2	<p>Тема 13. Поняття повного чотиривершинника та гармонічної четвірки точок</p> <p>Означення повного чотиривершинника, гармонічної четвірки точок та їхні властивості. Побудова повного чотиривершинника, гармонічної четвірки точок. Задачі на побудову з використанням поняття та властивостей повного чотиривершинника. Розв'язування задач на побудову з використанням поняття та властивостей повного чотиривершинника.</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • формулює означення повного чотиривершинника, гармонічної четвірки точок та їхні властивості; • наводить приклади повного чотиривершинника, гармонічної четвірки точок; • описує побудову повного чотиривершинника, гармонічної четвірки точок за допомогою повного чотиривершинника; • пояснює побудову повного чотиривершинника, гармонічно спряженої точки до трьох даних; • розв'язує задачі на побудову з використанням поняття та властивостей повного чотиривершинника.
4	<p>Тема 14. Задачі з недосяжними елементами</p> <p>Поняття недосяжних (недоступних) елементів. Три типи задач з недосяжними елементами:</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • розрізняє три типи задач з недосяжними елементами; • наводить приклади задач з недосяжними елементами;

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
	<p>1) задачі на побудову точки перетину двох прямих, без побудови однієї з них; 2) задачі на побудову прямої, що проходить через задану та недосяжну точки; 3) задачі на побудову прямої, що проходить через дві недосяжні точки.</p> <p>Приклади задач з недосяжними елементами. Розв'язування задач даних типів за допомогою теорем Дезарга, повного чотиривершинника та гомології.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>характеризує</i> специфіку розв'язування задач з недосяжними елементами за допомогою теорем Дезарга, повного чотиривершинника та гомології; • <i>описує</i> та пояснює етапи розв'язування задач з недосяжними елементами за допомогою теорем Дезарга, повного чотиривершинника та гомології; • <i>розв'язує</i> задачі з недосяжними елементами трьох типів трьома методами: за допомогою теорем Дезарга, повного чотиривершинника та гомології.
4	<p>Тема 15. Побудова перерізів просторових фігур методом слідів і внутрішнього проектування</p> <p>Методи побудови перерізів просторових фігур: слідів і внутрішнього проектування. Кроки побудови перерізів просторових фігур методами слідів і внутрішнього проектування.</p> <p>Задачі на побудову перерізів правильних призм і пірамід двома методами за різних умов задання елементів, що належать шуканому перерізу (трьома точками на ребрах, гранях, гранях та ребрах; точкою і слідом, що не перетинає нижньої основи фігури або перетинає її; двома точками, що належать фігурі, й однією точкою, розташованою поза фігурою, тощо).</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>формулює</i> методи побудови перерізів просторових фігур: слідів і внутрішнього проектування; • <i>наводить приклади</i> правильної та неправильної побудови перерізу; • <i>характеризує</i> кроки побудови перерізів просторових фігур методами слідів і внутрішнього проектування; • <i>описує та пояснює</i> кроки виконання побудови перерізів просторових фігур методами слідів і внутрішнього проектування; • <i>розв'язує</i> задачі на побудову перерізів правильних многогранників і тіл обертання двома методами за різних умов задання елементів, що належать шуканому перерізу.

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
	Задачі на побудову перерізів тіл обертання двома методами за різних умов задання елементів, що належать шуканому перерізу (трьома точками на твірних, гранях, гранях і твірних; точкою і слідом, що не перетинає нижньої основи фігури або перетинає її; двома точками, що належать фігурі, й однією точкою, розташованою поза фігурою, тощо).	
3	Узагальнення та систематизація вивченого матеріалу	

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ КУРСУ

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття
Розділ 1. Зображення (10 год)		
1		Зображення та наука про них
2		Вимоги до зображень
3		Методи зображення: центральне та паралельне проектування, їх властивості
4		Методи зображення: розв'язування задач на побудову центральних і паралельних проекцій фігур
5–6		Проекції кола. Конічні перерізи
7–8		Зображення плоских і просторових фігур на площині. Виконання зображень трикутника, квадрата, паралелограма, трапеції, кола на площині
9		Виконання зображень правильних п'ятикутника, шестикутника, восьмикутника; правильних трикутника, чотирикутника, шестикутника, вписаних і описаних навколо кола, на площині
10		Виконання зображень правильних призми, піраміди, конуса, циліндра, кулі та їх комбінацій на площині

Номер заняття	Дата	Тема та зміст заняття
Розділ 2. Перетворення (25 год)		
11		Поняття перетворення. Інваріанти перетворення
12		Афінна та перспективно-афінна відповідність
13		Задачі на побудову образів різних фігур в афінній та перспективно-афінній відповідності
14		Визначеність зображення
15		Проективне (перспективне) перетворення, його властивості
16		Осьова та центральна колінеація, гомологія
17		Осьова та центральна колінеація, гомологія. Розв'язування задач із використанням поняття гомології
18		Принципи двоїстості
19		Деякі окремі випадки гомологій
20		Побудова відповідних елементів при окремих випадках гомології
21		Теорема Дезарга
22		Розв'язування задач на доведення та побудову з використанням теорем Дезарга
23		Поняття повного чотиривершинника та гармонічної четвірки точок
24		Розв'язування задач на побудову з використанням поняття та властивостей повного чотиривершинника
25–28		Задачі з недосяжними елементами
29–30		Побудова перерізів просторових фігур методом слідів та внутрішнього проектування. Задачі на побудову перерізів правильних призм і пірамід двома методами за різних умов задання елементів, що належать шуканому перерізу
31–32		Задачі на побудову перерізів тіл обертання двома методами за різних умов задання елементів, що належать шуканому перерізу
33–35		Узагальнення і систематизація вивченого матеріалу

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач: Посібник для вчителя.— К.: Рад. шк., 1988.— 90 с.
2. Бескин Н. М. Изображения пространственных фигур.— М.: Наука, 1971.— 80 с.
3. Владимирский Г. А. Перспектива: Пособие для учителей средней школы.— М.: Учпедгиз, 1952.— 120 с.
4. Вольберг О. А. Основные идеи проективной геометрии: Пособие для учит. ср. шк. / Под ред. Н. Е. Ефимова.— М.; Ленинград: Учпедгиз, 1949.— 190 с.
5. Извольский Н. А. Основной курс проективной геометрии.— М.; Ленинград: Полиграфкнига, 1933.— 166 с.
6. Лейбин А. С. Изображения и геометрические преобразования / Я. П. Бланк.— Харьков: Издательство ХГУ им. А. М. Горького, 1954.— 51 с.
7. Орехов П. С. Изображения в стереометрії: Пособие для учителей.— Ижевск: Удмуртия, 1981.— 172 с.
8. Решение позиционных задач в курсе геометрии средней школы: методические рекомендации учителям математики и студентам физ.-мат. факультета педагогического института / Сост. Я. М. Жовнир, И. А. Наумов.— Харьков: Издательство ХГУ им. А. М. Горького, 1976.— 63 с.
9. Четверухин Н. Ф. Изображение фигур в курсе геометрии.— М.: Учпедгиз, 1968.— 216 с.
10. Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже: пособие для учителя.— 3-е изд.— М.: Учпедгиз, 1955.— 228 с.